Resolución de ejercicios del boletín de repaso para el examen de Análisis

Matemáticas I

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 14

Para la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$

a) Determinar: dominio, puntos de corte con los ejes, ecuación de sus asíntotas, monotonía, y existencia de extremos.

b) Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -1$.

Apartado a)

1. $Dom\, f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-x}{x+4} > 0 \right\} = (-4, 2)$

Apartado a)

1. $Dom\, f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-x}{x+4} > 0 \right\} = (-4, 2)$
2. Puntos de corte con OX:

Apartado a)

1. $Dom\, f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-x}{x+4} > 0 \right\} = (-4, 2)$
2. Puntos de corte con OX: $(-1, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{2-x}{x+4} = 1 \Longrightarrow x = -1$$

Apartado a)

1. $Dom\, f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-x}{x+4} > 0 \right\} = (-4, 2)$
2. Puntos de corte con OX: $(-1, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2-x}{x+4} = 1 \Longrightarrow x = -1$$

3. Puntos de corte con OY:

Apartado a)

1. $Dom\, f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-x}{x+4} > 0 \right\} = (-4, 2)$
2. Puntos de corte con OX: $(-1, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2-x}{x+4} = 1 \Longrightarrow x = -1$$

3. Puntos de corte con OY: $(0, -\ln 2)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow y = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right) \Longrightarrow y = -\ln 2$$

Apartado a)

1. $Dom\, f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-x}{x+4} > 0 \right\} = (-4, 2)$
2. Puntos de corte con OX: $(-1, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{2-x}{x+4} = 1 \Longrightarrow x = -1$$

3. Puntos de corte con OY: $(0, -\ln 2)$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array} \right\} \Longrightarrow y = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right) \Longrightarrow y = -\ln 2$$

4. Asíntotas (solo tiene sentido buscar las verticales):

Apartado a)

1. $Dom\, f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-x}{x+4} > 0 \right\} = (-4, 2)$
2. Puntos de corte con OX: $(-1, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{2-x}{x+4} = 1 \Longrightarrow x = -1$$

3. Puntos de corte con OY: $(0, -\ln 2)$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array} \right\} \Longrightarrow y = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right) \Longrightarrow y = -\ln 2$$

4. Asíntotas (solo tiene sentido buscar las verticales): $x = -4$

$$\lim_{x \to -4^+} \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right) = \ln\left(\frac{6}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Apartado a)

1. $Dom\, f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-x}{x+4} > 0 \right\} = (-4, 2)$
2. Puntos de corte con OX: $(-1, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{2-x}{x+4} = 1 \Longrightarrow x = -1$$

3. Puntos de corte con OY: $(0, -\ln 2)$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right) \end{array} \right\} \Longrightarrow y = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right) \Longrightarrow y = -\ln 2$$

4. Asíntotas (solo tiene sentido buscar las verticales): $x = -4,\ x = 2$

$$\lim_{x \to -4^+} \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right) = \ln\left(\frac{6}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{6}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

5. Búsqueda de puntos críticos:

5. Búsqueda de puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2-x}{x+4}} \cdot \frac{-1(x+4) - 1(2-x)}{(x+4)^2} = \frac{x+4}{2-x} \cdot \frac{-6}{(x+4)^2} = -\frac{6}{(2-x)(x+4)}$$

5. Búsqueda de puntos críticos: No hay

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2-x}{x+4}} \cdot \frac{-1(x+4) - 1(2-x)}{(x+4)^2} = \frac{x+4}{2-x} \cdot \frac{-6}{(x+4)^2} = -\frac{6}{(2-x)(x+4)}$$

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in Dom\, f = (-4, 2)$$

5. Búsqueda de puntos críticos: No hay. Por tanto, f no tiene extremos relativos

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2-x}{x+4}} \cdot \frac{-1(x+4) - 1(2-x)}{(x+4)^2} = \frac{x+4}{2-x} \cdot \frac{-6}{(x+4)^2} = -\frac{6}{(2-x)(x+4)}$$

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in Dom\, f = (-4, 2) \Longrightarrow \; f \text{ no tiene extremos relativos}$$

5. Búsqueda de puntos críticos: No hay. Por tanto, f no tiene extremos relativos

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{2-x}{x+4}}\cdot\frac{-1(x+4)-1(2-x)}{(x+4)^2}=\frac{x+4}{2-x}\cdot\frac{-6}{(x+4)^2}=-\frac{6}{(2-x)(x+4)}$$

$$f'(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in Dom\, f=(-4,2)\Longrightarrow \; f \text{ no tiene extremos relativos}$$

6. Estudio de la monotonía:

5. Búsqueda de puntos críticos: No hay. Por tanto, f no tiene extremos relativos

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2-x}{x+4}} \cdot \frac{-1(x+4) - 1(2-x)}{(x+4)^2} = \frac{x+4}{2-x} \cdot \frac{-6}{(x+4)^2} = -\frac{6}{(2-x)(x+4)}$$

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in Dom\, f = (-4, 2) \Longrightarrow \; f \text{ no tiene extremos relativos}$$

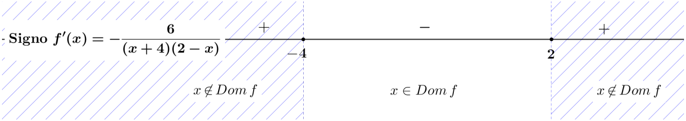
6. Estudio de la monotonía: Hay que estudiar el signo de f'

5. Búsqueda de puntos críticos: No hay. Por tanto, f no tiene extremos relativos

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{2-x}{x+4}} \cdot \frac{-1(x+4) - 1(2-x)}{(x+4)^2} = \frac{x+4}{2-x} \cdot \frac{-6}{(x+4)^2} = -\frac{6}{(2-x)(x+4)}$$

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in Dom\, f = (-4, 2) \Longrightarrow \ f \text{ no tiene extremos relativos}$$

6. Estudio de la monotonía: Hay que estudiar el signo de f'

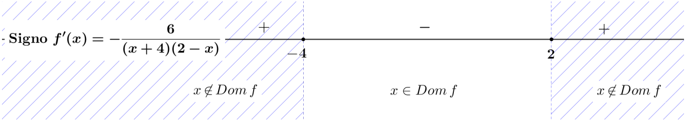


5. Búsqueda de puntos críticos: No hay. Por tanto, f no tiene extremos relativos

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{2-x}{x+4}}\cdot\frac{-1(x+4)-1(2-x)}{(x+4)^2}=\frac{x+4}{2-x}\cdot\frac{-6}{(x+4)^2}=-\frac{6}{(2-x)(x+4)}$$

$$f'(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in Dom\, f=(-4,2)\Longrightarrow\ f \text{ no tiene extremos relativos}$$

6. Estudio de la monotonía: Hay que estudiar el signo de f'



Por tanto, f es decreciente en $(-4,2)$

Apartado b)

La ecuación de la recta será $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$:

Apartado b)

La ecuación de la recta será $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$:

- $f(-1) = 0$

Apartado b)

La ecuación de la recta será $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$:

- $f(-1) = 0$
- $f'(x) = -\dfrac{6}{(x+4)(2-x)} \implies f'(-1) = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$

Apartado b)

La ecuación de la recta será $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$:

- $f(-1) = 0$
- $f'(x) = -\dfrac{6}{(x+4)(2-x)} \implies f'(-1) = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$

Por tanto, la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -1$ es

$$y = -\frac{2}{3}(x+1)$$