Resolución de ejercicios del boletín de repaso para el examen de Análisis

IES O Couto

Ejercicio 13
Apartado a
Apartado b
Apartado c

Resolución de ejercicios del boletín de repaso para el examen de Análisis

Matemáticas I

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 13

Para la función $f(x) = \dfrac{6x^3}{x^2+3x}$, estudia:

a) La continuidad (si encuentras discontinuidades, clasifícalas).

b) Existencia y ecuaciones de asíntotas.

c) La derivabilidad en $x=-3$, y en $x=0$.

Apartado a)

1. Cálculo del dominio

Apartado a)

1. Cálculo del dominio
   - $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$

Apartado a)

1. Cálculo del dominio
   - $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
2. Estudio de la continuidad:

Apartado a)

1. Cálculo del dominio
   - $Dom\,f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
2. Estudio de la continuidad:
   La función es continua al menos en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$

Apartado a)

1. Cálculo del dominio
   - $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
2. Estudio de la continuidad:
   La función es continua al menos en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
   - Estudio en $x = -3$:

Apartado a)

1. Cálculo del dominio
   - $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
2. Estudio de la continuidad:
   La función es continua al menos en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
   - Estudio en $x = -3$: Discontinuidad de salto infinito en $x = -3$

$$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(-3) \quad (3 \notin Dom\, f) \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -3^+} \frac{6x^3}{x^2+3x} = \frac{-6 \cdot 27}{0^-} = +\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -3^-} \frac{6x^3}{x^2+3x} = \frac{-6 \cdot 27}{0^+} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{disc. salto infinito}$$

Apartado a)

1. Cálculo del dominio
   - $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
2. Estudio de la continuidad:
   La función es continua al menos en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
   - Estudio en $x = -3$: Discontinuidad de salto infinito en $x = -3$

$$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(-3) \quad (3 \notin Dom\, f) \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -3^+} \frac{6x^3}{x^2+3x} = \frac{-6 \cdot 27}{0^-} = +\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -3^-} \frac{6x^3}{x^2+3x} = \frac{-6 \cdot 27}{0^+} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{disc. salto infinito}$$

   - Estudio en $x = 0$:

Apartado a)

1. Cálculo del dominio
   - $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
2. Estudio de la continuidad:
   La función es continua al menos en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
   - Estudio en $x = -3$: Discontinuidad de salto infinito en $x = -3$

$$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(-3) \quad (3 \notin Dom\, f) \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -3^+} \frac{6x^3}{x^2 + 3x} = \frac{-6 \cdot 27}{0^-} = +\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -3^-} \frac{6x^3}{x^2 + 3x} = \frac{-6 \cdot 27}{0^+} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{disc. salto infinito}$$

   - Estudio en $x = 0$: Discontinuidad evitable en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(0) \quad (0 \notin Dom\, f) \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{6x^3}{x(x+3)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{6x^2}{x+3} = 0 \in \mathbb{R} \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{6x^3}{x(x+3)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{6x}{x+3} = \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{disc. evitable}$$

Apartado a)

1. Cálculo del dominio
   - $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
2. Estudio de la continuidad:
   La función es continua al menos en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$
   - Estudio en $x = -3$: Discontinuidad de salto infinito en $x = -3$

$$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(-3) \quad (3 \notin Dom\, f) \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -3^+} \frac{6x^3}{x^2+3x} = \frac{-6 \cdot 27}{0^-} = +\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -3^-} \frac{6x^3}{x^2+3x} = \frac{-6 \cdot 27}{0^+} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{disc. salto infinito}$$

   - Estudio en $x = 0$: Discontinuidad evitable en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(0) \quad (0 \notin Dom\, f) \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{6x^3}{x(x+3)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{6x^2}{x+3} = 0 \in \mathbb{R} \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{6x^3}{x(x+3)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{6x}{x+3} = \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{disc. evitable}$$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$

Apartado b)

1. Asíntotas verticales:

Apartado b)

1. Asíntotas verticales: Al estudiar la continuidad se encontró una única asíntota vertical de ecuación $x = -3$

Apartado b)

1. Asíntotas verticales: Al estudiar la continuidad se encontró una única asíntota vertical de ecuación $x = -3$
2. Asíntotas oblícuas:

Apartado b)

1. Asíntotas verticales: Al estudiar la continuidad se encontró una única asíntota vertical de ecuación $x = -3$
2. Asíntotas oblícuas: $y = 6x - 18$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x^3}{x^3 + 3x^2} = 6 \in \mathbb{R} \\ n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-18x^2}{x^2 + 3x} \right) = -18 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

$$y = 6x - 18$$

Apartado b)

1. Asíntotas verticales: Al estudiar la continuidad se encontró una única asíntota vertical de ecuación $x = -3$
2. Asíntotas oblícuas: $y = 6x - 18$

$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^3}{x^3+3x^2} = 6 \in \mathbb{R} \\ n &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-18x^2}{x^2+3x}\right) = -18 \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\}$$

$$y = 6x - 18$$

$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3}{x^3+3x^2} = 6 \in \mathbb{R} \\ n &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-18x^2}{x^2+3x}\right) = -18 \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\}$$

$$y = 6x - 18$$

Apartado b)

1. Asíntotas verticales: Al estudiar la continuidad se encontró una única asíntota vertical de ecuación $x = -3$
2. Asíntotas oblícuas: $y = 6x - 18$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x^3}{x^3 + 3x^2} = 6 \in \mathbb{R} \\ n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-18x^2}{x^2 + 3x} \right) = -18 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

$$y = 6x - 18$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^3}{x^3 + 3x^2} = 6 \in \mathbb{R} \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-18x^2}{x^2 + 3x} \right) = -18 \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

$$y = 6x - 18$$

3. Asíntotas horizontales: No hay

Apartado c)

Al no ser continua en $x = 0$ ni en $x = -3$, la función no es derivable en dichos puntos.