Resolución de ejercicios del boletín de repaso para el examen de Análisis

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 12

Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de las siguientes funciones.

a) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x^2 + x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Apartado a)

1. Estudio de la continuidad en $x = 0$:

Apartado a)

1. Estudio de la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \overset{(1)}{=} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

Apartado a)

1. Estudio de la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \overset{(1)}{=} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

---

(1) Para resolver este límite usamos la siguiente propiedad:

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ ii) -1 \leq \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$$

Es decir, el producto de una función que tiende a 0 por otra función acotada, es una función cuyo límite es cero

---

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(2)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(2)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(3)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(2)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(3)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f'(0^+) = f'(0^-) \in \mathbb{R} \implies f \text{ derivable en } x = 0$$

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(2)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(3)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f'(0^+) = f'(0^-) \in \mathbb{R} \implies f \text{ derivable en } x = 0$$

---

(2) y (3): Vuelve a usarse la propiedad anterior

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \\ ii)\ -1 \leq \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

---

(2) y (3): La Regla de L'Hôpital dice que si existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y también es L.

Esto significa que si no existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, nada puede concluirse de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ hasta que no pueda resolverse por otros medios. Es decir, que cuando en un ejercicio escribimos $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ estamos abusando del lenguaje para simplificar la resolución del límite, pero tenemos que ser cuidadosos con lo que puede pasar.

En este ejercicio, podríamos haber hecho esta simplificación, y entonces tendríamos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \stackrel{\text{f cont.}}{=} \frac{0}{0} = IND \stackrel{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{xo0} \left(2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Pero este último límite no existe al no existir $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, por eso para resolver este ejercicio no pudo usarse la regla de L'Hôpital.

Apartado b)

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{x^2+x} & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2+x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Estudio de la continuidad en $x = 0$:

Apartado b)

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{x^2+x} & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2+x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Estudio de la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x+1} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{x^2}{x^2+x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x+1} = -1$$

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\frac{x^2}{x^2+x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x+1} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{x^2+x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

3. Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{x^2}{x^2+x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x+1} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2}{x^2+x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$f'(0^+) \neq f'(0^-) \implies f \text{ no derivable en } x = 0$$

Al estudiar la derivabilidad de una función en un punto concreto $x = a$ siempre se comprueba antes que la función sea continua en $x = a$, porque si la función no fuese continua en $x = a$ ya podríamos asegurar que no es derivable en $x = a$ sin necesidad de hacer ningún límite.
