Resolución de ejercicios del boletín de repaso para el examen de Análisis

Matemáticas I

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 11

Estudia la monotonía y la existencia de extremos de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^7}{14} - \dfrac{x^5}{5} + 1$

b) $f(x) = e^{-x^2+4x}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

d) $f(x) = |-x^2 + 6x|$

Apartado a)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$

Apartado a)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$
2. Búsqueda de puntos críticos:
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x\left(\frac{x^5}{2} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[5]{2} \end{cases}$$

Apartado a)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$
2. Búsqueda de puntos críticos:
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x\left(\frac{x^5}{2} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[5]{2} \end{cases}$$
3. Estudio del signo de f':

Apartado a)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$
2. Búsqueda de puntos críticos:
   $$f'(x) = 0 \iff x\left(\frac{x^5}{2} - 1\right) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[5]{2} \end{cases}$$
3. Estudio del signo de f':

Signo de $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$	$+$	0	$-$	$\sqrt[5]{2}$	$+$

Apartado a)

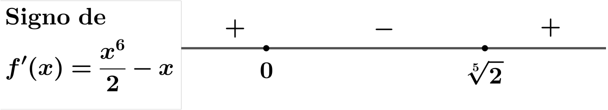
1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$
2. Búsqueda de puntos críticos:
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x\left(\frac{x^5}{2} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[5]{2} \end{cases}$$
3. Estudio del signo de f':

Signo de $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\sqrt[5]{\mathbf{2}}$	$+$

4. f crece en $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[5]{2}, +\infty)$ y decrece en $(0, \sqrt[5]{2})$

Apartado a)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$
2. Búsqueda de puntos críticos:
   $$f'(x) = 0 \iff x\left(\frac{x^5}{2} - 1\right) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[5]{2} \end{cases}$$
3. Estudio del signo de f':



4. f crece en $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[5]{2}, +\infty)$ y decrece en $(0, \sqrt[5]{2})$
5. f tiene un máximo relativo en $x = 0$, y un mínimo relativo en $x = \sqrt[5]{2}$

Apartado a)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$
2. Búsqueda de puntos críticos:
$$f'(x) = 0 \iff x\left(\frac{x^5}{2} - 1\right) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[5]{2} \end{cases}$$
3. Estudio del signo de f':

Signo de $f'(x) = \dfrac{x^6}{2} - x$	$+$	0	$-$	$\sqrt[5]{2}$	$+$

4. f crece en $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[5]{2}, +\infty)$ y decrece en $(0, \sqrt[5]{2})$
5. f tiene un máximo relativo en $x = 0$, y un mínimo relativo en $x = \sqrt[5]{2}$
6. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, f no tiene extremos absolutos.

Apartado b)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$

Apartado b)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$
2. Búsqueda de puntos críticos:
   $f'(x) = 0 \iff (-2x+4)e^{-x^2+4x} = 0 \iff -2x+4=0 \iff x=2$

Apartado b)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$
2. Búsqueda de puntos críticos:
   $f'(x) = 0 \iff (-2x+4)e^{-x^2+4x} = 0 \iff -2x+4 = 0 \iff x = 2$
3. Estudio del signo de f':

Apartado b)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$
2. Búsqueda de puntos críticos:
   $f'(x) = 0 \iff (-2x+4)e^{-x^2+4x} = 0 \iff -2x+4 = 0 \iff x = 2$
3. Estudio del signo de f':

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Signo de $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$	$+$		$-$

Apartado b)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$
2. Búsqueda de puntos críticos:
   $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow (-2x+4)e^{-x^2+4x} = 0 \Longleftrightarrow -2x+4 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$
3. Estudio del signo de f':

Signo de $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$	$+$	2	$-$

4. f crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$

Apartado b)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$
2. Búsqueda de puntos críticos:
   $f'(x) = 0 \iff (-2x+4)e^{-x^2+4x} = 0 \iff -2x+4 = 0 \iff x = 2$
3. Estudio del signo de f':

Signo de
$\boldsymbol{f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}}$

	$(-\infty, 2)$	$\mathbf{2}$	$(2, +\infty)$
	$+$	$\bullet$	$-$

4. f crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$
5. f tiene un máximo relativo en $x = 2$

Apartado b)

1. La función f es derivable en $\mathbb{R}$, con $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$
2. Búsqueda de puntos críticos:
   $f'(x) = 0 \iff (-2x+4)e^{-x^2+4x} = 0 \iff -2x+4=0 \iff x=2$
3. Estudio del signo de f':

Signo de $f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x}$	$+$	$\mathbf{2}$	$-$

4. f crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$
5. f tiene un máximo relativo en $x=2$
6. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, y $f(2) > 0$, $x=2$ es también el máximo absoluto de la función.

Apartado c)

1. La función f es derivable en su dominio, $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, con $f'(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \cdot \dfrac{1(x+2) - 1(x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

Apartado c)

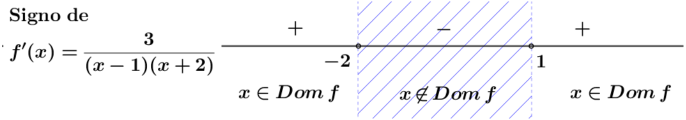
1. La función f es derivable en su dominio, $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$, con $f'(x)=\dfrac{x+2}{x-1}\cdot\dfrac{1(x+2)-1(x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$
2. Búsqueda de puntos críticos: f' nunca se anula porque no lo hace su numerador. Por tanto, no hay puntos críticos.

Apartado c)

1. La función f es derivable en su dominio, $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$, con $f'(x)=\dfrac{x+2}{x-1}\cdot\dfrac{1(x+2)-1(x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$
2. Búsqueda de puntos críticos: f' nunca se anula porque no lo hace su numerador. Por tanto, no hay puntos críticos.
3. Estudio del signo de f':

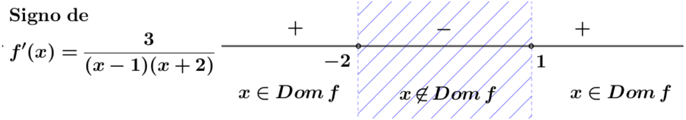
Apartado c)

1. La función f es derivable en su dominio, $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, con
$$f'(x) = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1(x+2) - 1(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$
2. Búsqueda de puntos críticos: f' nunca se anula porque no lo hace su numerador. Por tanto, no hay puntos críticos.
3. Estudio del signo de f':



Apartado c)

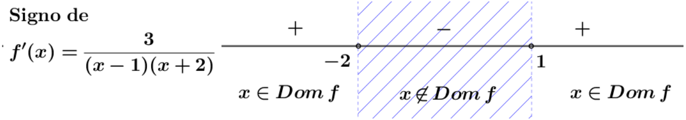
1. La función f es derivable en su dominio, $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, con
$$f'(x) = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1(x+2) - 1(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$
2. Búsqueda de puntos críticos: f' nunca se anula porque no lo hace su numerador. Por tanto, no hay puntos críticos.
3. Estudio del signo de f':



4. f crece en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Apartado c)

1. La función f es derivable en su dominio, $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$, con
$$f'(x)=\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{1(x+2)-1(x-1)}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x-1)(x+2)}$$
2. Búsqueda de puntos críticos: f' nunca se anula porque no lo hace su numerador. Por tanto, no hay puntos críticos.
3. Estudio del signo de f':



4. f crece en $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$
5. f no tiene extremos.

Apartado d)

1. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & si \quad x \leq 0 \ \text{o} \ x \geq 6 \\ -x^2 + 6x & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$ (porque el valor absoluto de una función continua es una función continua, y derivable siempre que no se anule)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & si \quad x < 0 \ \text{o} \ x > 6 \\ -2x + 6 & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$$

Apartado d)

1. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & si \quad x \leq 0 \text{ o } x \geq 6 \\ -x^2 + 6x & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$ (porque el valor absoluto de una función continua es una función continua, y derivable siempre que no se anule)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & si \quad x < 0 \text{ o } x > 6 \\ -2x + 6 & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$$

2. Búsqueda de puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 & si \quad x < 0 \text{ o } x > 6 \\ -2x + 6 = 0 & si \quad 0 < x < 6 \end{cases} \Longleftrightarrow x = 3$$

Apartado d)

1. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & si \quad x \leq 0 \text{ o } x \geq 6 \\ -x^2 + 6x & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$ (porque el valor absoluto de una función continua es una función continua, y derivable siempre que no se anule)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & si \quad x < 0 \text{ o } x > 6 \\ -2x + 6 & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$$

2. Búsqueda de puntos críticos:
$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 6 = 0 & si \quad x < 0 \text{ o } x > 6 \\ -2x + 6 = 0 & si \quad 0 < x < 6 \end{cases} \iff x = 3$

3. Estudio del signo de f':

Apartado d)

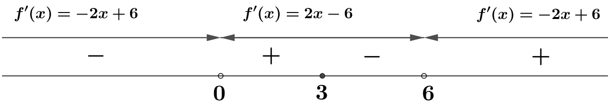
1. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & si \quad x \leq 0 \text{ o } x \geq 6 \\ -x^2 + 6x & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$, y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$ (porque el valor absoluto de una función continua es una función continua, y derivable siempre que no se anule)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & si \quad x < 0 \text{ o } x > 6 \\ -2x + 6 & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$$

2. Búsqueda de puntos críticos:
$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 6 = 0 & si \quad x < 0 \text{ o } x > 6 \\ -2x + 6 = 0 & si \quad 0 < x < 6 \end{cases} \iff x = 3$$

3. Estudio del signo de f':

Signo de
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & si \quad x < 0 \text{ o } x > 6 \\ -2x + 6 & si \quad 0 < x < 6 \end{cases}$$



1. f crece en $(0, 3) \cup (6, +\infty)$, y decrece en $(-\infty, 0) \cup (3, 6)$

1. f crece en $(0,3) \cup (6,+\infty)$, y decrece en $(-\infty,0) \cup (3,6)$
2. f tiene dos mínimos relativos en $x=0$ y en $x=6$, y tiene un máximo relativo en $x=3$.

1. f crece en $(0,3) \cup (6,+\infty)$, y decrece en $(-\infty,0) \cup (3,6)$
2. f tiene dos mínimos relativos en $x = 0$ y en $x = 6$, y tiene un máximo relativo en $x = 3$.
3. Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, entonces, los mínimos relativos también son mínimos absolutos (ambos son mínimos absolutos porque $f(0) = f(6)$)