SOLUCIÓN SIMULACRO FUNCIONES

① $f(x) = \frac{2}{3x-9}$ $\quad g(x) = x-2$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{2}{3x-9} + x - 2 = \frac{2+(3x-9)(x-2)}{3x-9} = \frac{2+3x^2-6x-9x+18}{3x-9} = \frac{3x^2-15x+20}{3x-9}$

$\text{Dom}(f+g)(x) = \mathbb{R}-\{3\}$

¡ojo!

$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{2}{3x-9} - (x-2) = \frac{2-(x-2)(3x-9)}{3x-9} = \frac{2-[3x^2-9x-6x+18]}{3x-9} =$

$= \frac{2-3x^2+15x-18}{3x-9} = \frac{-3x^2+15x-16}{3x-9} \Rightarrow +3x-9=0 \quad x=\frac{9}{3}=3 \quad \text{Dom}(f-g)(x) = \mathbb{R}-\{3\}$

$(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{2}{3x-9}\cdot(x-2) = \frac{2(x-2)}{3x-9} \quad \text{Dom}(f\cdot g)(x) = \mathbb{R}-\{3\}$

$(f/g)(x) = \frac{2}{3x-9} : (x-2) = \frac{2}{(3x-9)(x-2)}$ (No es necesario multiplicar el denominador)

$\text{Dom}(f/g)(x) = \mathbb{R}-\{3,2\}$

$(g\circ f)(x) = g\left(\frac{2}{3x-9}\right) = \frac{2}{3x-9} - 2 = \frac{2-2(3x-9)}{3x-9} = \frac{2-6x+18}{3x-9} = \frac{-6x+20}{3x-9} \quad \text{Dom}(g\circ f)(x) = \mathbb{R}-\{3\}$

$(f\circ g)(x) = f(x-2) = \frac{2}{3(x-2)-9} = \frac{2}{3x-6-9} = \frac{2}{3x-15} \quad \text{Dom}(f\circ g)(x) = \mathbb{R}-\{5\}$

$3x-15=0 \quad x = 15/3 = 5$

Inversa de $f(x) = f^{-1}(x)$ sí se puede por ser f inyectiva.

$y = \frac{2}{3x-9} \qquad 3x-9 = \frac{2}{y} \qquad 3x = \frac{2}{y}+9 = \frac{2+9y}{y} \Rightarrow x = \frac{2+9y}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{2+9x}{3}$

2.- $\lim_{x\to 2} \frac{3x-6}{x^2-5x+6} = \frac{3\cdot 2-6}{2^2-5\cdot 2+6} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{2-3} = \boxed{-3}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(1+\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(1+\sqrt{x+1})}{\cancel{1}-x-\cancel{1}} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+\sqrt{x+1})}{-\cancel{x}} = \frac{1+\sqrt{0+1}}{-1} = \boxed{-2}$

$\lim_{x\to\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-5x+6}\right) = \infty-\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-\sqrt{4x^2-5x+6})(2x+\sqrt{4x^2-5x+6})}{(2x+\sqrt{4x^2-5x+6})} =$

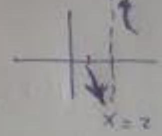
$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-(4x^2-5x+6)}{2x+\sqrt{4x^2-5x+6}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}+5x-6}{2x+\sqrt{4x^2-5x+6}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x}-\frac{6}{x}}{\frac{2x}{x}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}} = \boxed{\frac{5}{4}}$

$\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \frac{4-4}{2-\sqrt{4}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(4-x)}(2+\sqrt{x})}{\cancel{4-x}} = 2+\sqrt{4} = \boxed{4}$

Asíntotas de $y=\frac{3x^2+1}{x-2}$

A. vertical — Posibles asíntotas verticales, es donde no está definida la función es decir en este caso $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3x^2+1}{x-2}=\frac{+}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x^2+1}{x-2}=\frac{+}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=2 \text{ asíntota vertical}$$



A. horizontal $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+1}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\infty$ por tanto no hay A. horizontal

A. Oblicua $y=mx+n$ $\quad m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x-2}:x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-2x}=3$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x-2}-3x=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1-3x(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3x^2}+1-\cancel{3x^2}+6x}{x-2}=6$$

Por tanto $\boxed{y=3x+6}$

3.- $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si } x\le -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1<x\le 2 \\ \frac{x+3}{3-x} & \text{si } 2<x\end{cases}$

continua por ser polinómica en $(-\infty,-1)$

continua por ser polinómica en $(-1,2)$

continua excepto en el 3 porque no está definida $(2,+\infty)$

Por tanto solo hay que estudiar la continuidad en $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=2}$

En $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\cdot\ f(-1)=2\cdot(-1)+3=1 \\ \cdot\ \lim\limits_{x\to -1^-}2x+3=1 \\ \cdot\ \lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+1)=2\end{array}\right\}\ f(-1)\neq\lim_{x\to -1^+}f(x) \text{ no es continua}$$

discontinuidad de salto.

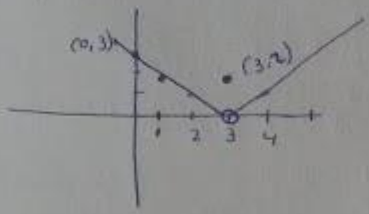
$$\lim_{x\to -1^+}f(x)\neq\lim_{x\to -1^-}f(x)$$

En $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\cdot\ f(2)=2^2+1=5 \\ \cdot\ \lim\limits_{x\to 2^-}x^2+1=5 \\ \cdot\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+3}{3-x}=\frac{5}{1}=5\end{array}\right\}\ f(2)=\lim_{x\to 2}f(x) \text{ por tanto continua.}$$

En $x=3$ No es continua porque falla la 1^{era} condición

④ $f(x) = \begin{cases} |x-3| & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases} \iff f(x) = \begin{cases} -(x-3) = -x+3 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \\ x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



Dominio $f(x) = \mathbb{R}$

Continuidad ¡Sólo en $x = 3$!

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0 \end{array}\right\} \text{ No es continua en } x = 3$$

(Discontinuidad evitable)

⑤ a) $f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1 \Rightarrow f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$

b) $f(x) = (x^2+2x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2+2x) \cdot (2x+2)$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot (x^2)' - (x^2) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) \cdot 2x - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

d) $f(x) = e^{7x} \cdot \text{sen}^3 x \Rightarrow f'(x) = (e^{7x})' \cdot \text{sen}^3 x + e^{7x} \cdot (\text{sen}^3 x)'$

$$= e^{7x} \cdot 7 \cdot \text{sen}^3 x + e^{7x} \cdot 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos x$$

ahora podemos sacar factor común y agrupar.

Ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $x = 2$

Ec. rect. tg. en $(x_0, f(x_0))$ $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Por tanto $f(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \frac{(x-1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad f'(2) = \frac{-2}{(2-1)^2} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{y - 3 = -2(x - x_0)}$$

COMO LA PARTE DE DERIVACIÓN ESTÁ FLOJA HARÉ UN BOLETÍN PARA REPASAR LAS REGLAS DE DERIVACIÓN Y LA APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS (CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS MÍNIMOS .....)