# EJERCICIOS DERIVADAS

**<u>*1.-*</u>Calcula $f'(2)$, utilizando la definición de derivada, siendo: $f(x) = 2x^2 + 5x$**

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^2+5(2+h)-18}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(4+4h+h^2)+10+5h-18}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8+8h+2h^2+10+5h-18}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+13h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2h+13)}{h} = \lim_{h\to 0} (2h+13) = 13$$

**<u>*2.-*</u>Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, que es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.**

•Si es paralela a la recta $2x+3y-1=0 \;\rightarrow\; y = \frac{-2x+1}{3}$, tendrá la misma pendiente $y' = \frac{-2}{3}$

$$f'(x) = 4x - 3 = \frac{-2}{3} \;\rightarrow\; 4x = \frac{7}{3} \;\rightarrow\; x = \frac{7}{12}$$

•Ordenada en el punto:

$$f\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{-5}{72}$$

•Ecuación de la recta tangente:

$$y = \frac{-5}{72} - \frac{2}{3}\left(x - \frac{7}{12}\right) \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{3}x + \frac{23}{72}$$

**<u>*3.-*</u>Considera la función: $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$**

**Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.**

$f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6(x^2 + 3x + 2) = 0$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

• Signo de $f'(x)$:

| $f'>0$ | | $f'<0$ | | $f'>0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$; es decreciente en $(-2, -1)$. Tiene un máximo en $(-2, -3)$ y un mínimo en $(-1, -4)$.

<u>*4.-*</u>

**a) Halla la T.V.M. de la función $f(x) = \frac{-x^2+1}{3}$ en el intervalo $[2,\, 2+h]$.**

**b) Con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.**

a) $\text{T.V.M.}[2,\, 2+h] = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{-(2+h)^2+1}{3} - \dfrac{(-3)}{3}}{h} = \dfrac{-(4+4h+h^2)+1+3}{3h} =$

$= \dfrac{-4-4h-h^2+4}{3h} = \dfrac{h(-4-h)}{3h} = \dfrac{-4-h}{3}$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-4-h)}{3} = \dfrac{-4}{3}$

**5.-Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.**

- Si son paralelas a la recta $y = 10x + 2$, tienen la misma pendiente; es decir, ha de ser:

  $f'(x) = 10$

  $f'(x) = 12x^2 - 2 = 10 \ \rightarrow\ 12x^2 = 12 \ \rightarrow\ x^2 = 1 \ \rightarrow\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

- Ordenadas en los puntos:

  $f(-1) = -1$; $f(1) = 3$

- Ecuaciones de las rectas tangentes:

  - En $x = -1 \ \rightarrow\ y = -1 + 10(x + 1) \ \rightarrow\ y = 10x + 9$

  - En $x = 1 \ \rightarrow\ y = 3 + 10(x - 1) \ \rightarrow\ y = 10x - 7$

**6.-Halla los máximos, mínimos $f(x) = (x - 2)^2 (x + 1)$ Di dónde es creciente, decreciente,**

- Derivada:

  $f'(x) = 2(x - 2)(x + 1) + (x - 2)^2 = (x - 2)[2(x + 1) + x - 2] =$

  $= (x - 2)(2x + 2 + x - 2) = 3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ 3x(x-2) = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

- Signo de $f'(x)$: $\begin{array}{ccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \nearrow & 0 & \searrow & 2 & \nearrow \end{array}$ $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(0, 2)$. Tiene un máximo en $(0, 4)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

**7.- Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}}$$

- Dominio $= \mathbf{R} - \{1\}$

- Derivada:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\,(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad\to\quad x^2-2x=0 \quad\to\quad x(x-2)=0 \;\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

- Signo de $f'(x)$.

| $f'>0$ | | $f'<0$ | | $f'<0$ | | $f'>0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | 1 | $\searrow$ | 2 | $\nearrow$ |

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$. Tiene un máximo en $(0, -2)$ y un mínimo en $(2, 2)$.

**8.-Halla la derivada de la función $f(x)$, en $x_0 = -1$, utilizando la definición de derivada:**

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{4x^2+1}{2}}$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4(-1+h)^2+1}{2}-\frac{5}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4(1-2h+h^2)+1}{2}-\frac{5}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-8h+4h^2+1-5}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h^2-8h}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h(2h-4)}{2h}=\lim_{h\to 0}(2h-4)=-4$$

**Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\frac{x-2}{x+1}$ en el punto de corte con el eje de abscisas.**

- Punto de corte con el eje $X$:

$$y=0 \quad\to\quad \frac{x-2}{x+1} \quad\to\quad x-2=0 \quad\to\quad x=2 \quad\to\quad \text{Punto } (2, 0)$$

- Pendiente de la recta:

$$y'=\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2} \qquad y'(2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

- Ecuación de la recta tangente: $y=\frac{1}{3}(x-2) \quad\to\quad y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$