IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
10-01-2020. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \dfrac{6\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \dfrac{6\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} =$
$= 2\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{10}+4$

b) $\dfrac{4}{15}\sqrt{\dfrac{9}{8}} - \dfrac{7}{5}\sqrt{32} = \dfrac{4}{15}\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}} - \dfrac{7}{5}\cdot 4\cdot\sqrt{2} = \dfrac{4}{15}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{28}{5}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{2} - \dfrac{28}{5}\sqrt{2} = -\dfrac{27\sqrt{2}}{5}$

Solución del ejercicio 2

a) $z - \overline{z} = i\, 2\, Im(z) = i = 1_{90^\circ}$

b) *Se tiene que* $|z| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$*, y que* $\dfrac{Im(z)}{Re(z)} = -1$.

Por tanto, como el afijo de z está en el segundo cuadrante, el complejo z en forma polar es $z = \sqrt{\dfrac{1}{2}}_{135^\circ} \implies z = \sqrt{\dfrac{1}{2}}_{135^\circ + 360^\circ k} \implies \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{1}{2}}}_{45^\circ + 120^\circ k}$.

Por tanto, las soluciones son:

$$w_0 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}_{45^\circ},\ w_1 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}_{165^\circ},\ w_2 = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}_{285^\circ}$$

c) $z^6 = \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}_{135^\circ}\right)^6 = \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^6_{135^\circ\cdot 6} = \left(\dfrac{1}{8}\right)_{810^\circ} = \left(\dfrac{1}{8}\right)_{90^\circ} = \dfrac{1}{8}\,i$

Solución del ejercicio 3

$$\left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3}\right) : \frac{x^2-4x+4}{2x-6} = \left(\frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{x-3}{x+3}\right) : \frac{(x-2)^2}{2(x-3)} =$$

$$= \left(\frac{1-(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}\right)\cdot\frac{2(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{[1-(x^2-6x+9)]}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{2(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{(-x^2+6x-8)}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{2(x-3)}{(x-2)^2} =$$

Dado que $-x^2+6x-8 = (-1)(x-2)(x-4)$*:*

$$\frac{(-x^2+6x-8)}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{2(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{(-1)(x-2)(x-4)}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{2(x-3)}{(x-2)^2} = -\frac{2(x-4)}{(x-2)(x+3)}$$

Solución del ejercicio 4

a) $3\log x = \log(3x) + \log(2x-3) \implies \log x^3 = \log(3x(2x-3)) \implies x^3 = 3x(2x-3)$

$$\implies x^3 = 6x^2 - 9x \implies x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \implies x(x-3)^2 = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobación de las soluciones:

- $x = 0$:
  Dado que $\nexists \log 0$, *esta solución no es válida.*
- $x = 3$:
  Si sustituimos $x = 3$ *en el miembro izquierdo de la ecuación:*

  $$3\log 3 = \log 3^3 = \log 27$$

  Si sustituimos $x = 3$ *en el miembro derecho de la ecuación:*

  $$\log 9 + \log 3 = \log 27$$

  Por tanto, $x = 3$ *es una solución válida.*

b) *1º) En la segunda ecuación obtenemos* $y = x + 2$

2º) Sustituyendo en la primera ecuación:

$$4^x + 2^{x+3} = 20 \implies (2^2)^x + 2^3\cdot 2^x = 20 \implies (2^x)^2 + 8\cdot 2^x = 20 \overset{t=2^x}{\implies} t^2 + 8t - 20 = 0$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{64+80}}{2} = \frac{-8 \pm 12}{2} \implies t = \begin{cases} -10 \\ 2 \end{cases} \overset{t=2^x}{\implies} \begin{cases} 2^x = -10 \implies x \notin \mathbb{R} \\ 2^x = 2 \implies x = 1 \end{cases}$$

3º) Si $x = 1$, *entonces* $y = 3$. *Por tanto, la solución del sistema es* $(1, 3)$

Solución del ejercicio 5

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& -1 \\ -x+2y-3z &=& 5 \\ x+7y+2z &=& -3 \end{array}\right. \xrightarrow[F_3-F_1\to F_3]{F_1+F_2\to F_2} \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& -1 \\ 3y-2z &=& 4 \\ 6y+z &=& -2 \end{array}\right. \xrightarrow{F_3-2F_2\to F_3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& -1 \\ 3y-2z &=& 4 \\ 5z &=& -10 \end{array}\right. \implies \begin{array}{l} 5z = -10 \implies z = -2 \\ 3y-2z = 4 \implies 3y - 2(-2) = 4 \implies y = 0 \\ x+y+z = -1 \implies x + 0 + (-2) = -1 \implies x = -1 \end{array}$$

Solución del ejercicio 6

a) $x^3 - x^2 + 2x > 2 \iff x^3 - x^2 + 2x - 2 > 0$

1º) $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0 \iff (x-1)(x^2+2) = 0 \iff x = 1$

2º) Tanteando en la recta real, se obtiene el intervalo $(1, +\infty)$

b) $\dfrac{x^4-1}{x^2+3x} \geq 0 \iff \dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x(x+3)} \geq 0$

Tanteando en la recta real, se obtiene $(-\infty, -3) \cup [-1, 0) \cup [1, +\infty)$