IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
07-02-2020. Tiempo estimado: 60 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+x}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2+3}}} = 1^{IND.} \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2+3}}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1+x-1}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2+3}}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-1}{2x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2+3}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x^2+1}{x-1}}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}\right]^{\frac{x-1}{2x^2+1}\cdot\frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2+3}}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(2x^2+1)\sqrt{4x^2+3}}} = e^{1/4}$$

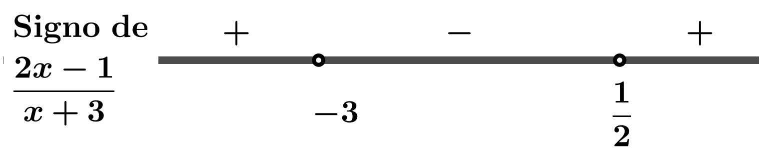
b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{2-2x} = \dfrac{0}{0} = IND. \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{2-2x} = \lim_{x\to1}\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(2-2x)(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x\to1}\frac{4-(x+3)}{(2-2x)(2+\sqrt{x+3})} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{1-x}{2(1-x)(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x\to1}\frac{1}{2(2+\sqrt{x+3})} = \frac{1}{8}$$

Solución del ejercicio 2

a) $Dom\ f = \left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \dfrac{2x-1}{x+3}>0\right\} = (-\infty,-3)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$



Asíntotas verticales: $x=-3$, $x=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-3^-}\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = \ln\left(\frac{-3}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty\,;\quad \nexists\lim_{x\to-3^+}\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) \Longrightarrow x=-3$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = \ln(0) = -\infty\,;\quad \nexists\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) \Longrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Asíntotas horizontales: $y=\ln(2)$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = \ln(2);\quad \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = \ln(2) \Longrightarrow y=\ln(2)$$

Asíntotas oblícuas: No hay.

b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{|x|-1}=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{x-1} & si \quad x\geq 0\\[2ex] -\dfrac{2x^2}{x+1} & si \quad x\leq 0\end{cases}$

Asíntotas verticales: $x=1$, $x=-1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty;\qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty\implies x=-1$$

$$\lim_{x\to -1^+}-\frac{2x^2}{x+1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty;\qquad \lim_{x\to -1^-}-\frac{2x^2}{x+1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty\implies x=1$$

Asíntotas horizontales: No hay.

Asíntotas oblícuas: $y=2x+2$; $y=-2x+2$

$$\left.\begin{aligned} m&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x(x-1)}=2;\\ n&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x-1}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}=2\end{aligned}\right\}\implies y=2x+2$$

$$\left.\begin{aligned} m&=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2x^2}{x(x+1)}=-2\\ n&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2x^2}{x+1}+2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2\end{aligned}\right\}\implies y=-2x+2$$

Solución del ejercicio 3

a) $(g\circ f)(x)=g(\ln(x+1))=e^{2\cdot\ln(x+1)}$

b) $y=\ln(x+1)\implies x+1=e^y\implies x=e^y-1\implies f^{-1}(x)=e^x-1$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$

e) $e^{2\cdot\ln(x+1)}=e^{\ln(x+1)^2}=(x+1)^2$

Solución del ejercicio 4

a) *La función es al menos continua en* $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

En $x=-1$*:*

$$\left.\begin{aligned} &f(-1)=1\\ &\lim_{x\to-1^-}x^2=1\\ &\lim_{x\to-1^+}x+3=1\end{aligned}\right\}\implies f \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x=-1$$

En $x=0$*:*

$$\left.\begin{aligned} &f(0)=3\\ &\lim_{x\to0^-}x+3=3\\ &\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty\end{aligned}\right\}\implies f \text{ tiene una discontinuidad de salto infinito en } x=0$$

Por tanto, f *solo es continua en* $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

b) $Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

En $x = 4$*:*

$$\left.\begin{array}{l} \nexists f(4) \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} x+4 = 8 \\ \\ \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} x+4 = 8 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de evitable en } x = 4$$

Solución del ejercicio 5

a) $|2x+4| = \begin{cases} 2x+4 & si \quad x \geq -2 \\ -2x-4 & si \quad x \leq -2 \end{cases}$

b) *Representación gráfica (lo más fácil es representar* $y = 2x+4$*, y dibujar por simetría con respecto al eje OX la semirrecta que queda por debajo del eje OX).*

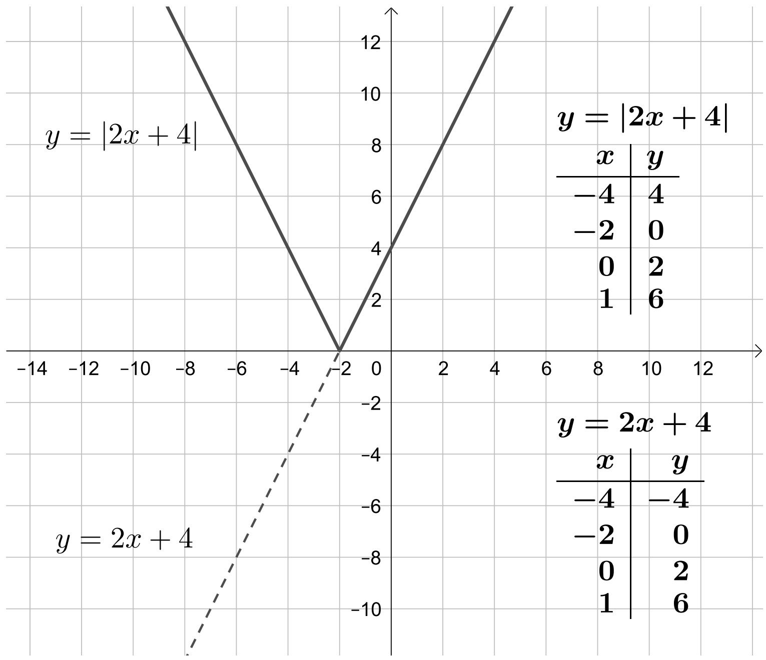


Figura 1: apartado b)