IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Métodos Estadísticos y Numéricos. 2º Bachillerato - A
1ª Evaluación. 10-12-2018. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

$$\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right):\sqrt{8}=\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}-\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=$$
$$\frac{2+1+2\sqrt{2}-(2+1-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2$$

Solución del ejercicio 2

a) *Si ponemos z_3 en forma polar:*

$$z_3=2_{60^\circ}\implies z_3^3=2^3_{3\cdot 60^\circ}=8_{180^\circ}=-8$$

Si utilizamos la fórmula de De Moivre:

$$z_3^3=(2\,\cos 60^\circ+i\,2\,\operatorname{sen}60^\circ)^3=8\,\cos(3\cdot 60^\circ)+i\,8\,\operatorname{sen}(3\cdot 60^\circ)\implies$$
$$z_3=8\,\cos 180^\circ+i\,8\,\operatorname{sen}180^\circ=-8$$

b)
$$\left.\begin{aligned} z_2=\sqrt{3}_{270^\circ}\implies z_2=-\sqrt{3}\,i\\ z_1-\overline{z_1}=2\,Im(z_1)\,i=2\sqrt{3}\,i\end{aligned}\right\}\implies (z_1-\overline{z_1})\cdot z_2=2\sqrt{3}\,i\cdot(-\sqrt{3}\,i)=6$$

c) $z_1\cdot z_4=(-1+i\,\sqrt{3})(2\sqrt{3}-i)=-2\sqrt{3}+i+6\,i+\sqrt{3}=-\sqrt{3}+7\,i$

d) $(-\sqrt{3}_{270^\circ})^{-1}=(\sqrt{3}_{90^\circ})^{-1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)_{-90^\circ}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,i$

Solución del ejercicio 3

$$(1-i)z^3-4i=0\implies z^3=\frac{4\,i}{1-i}=\frac{4\,i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-2+2\,i=2\sqrt{2}_{135^\circ+360^\circ\,k}$$

Las raíces cúbicas de $2\sqrt{2}_{135^\circ+360^\circ\,k}$ son los números $w_k=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}_{\frac{135^\circ+360^\circ\,k}{3}}$:

$$w_0=\sqrt{2}_{45^\circ},\ w_1=\sqrt{2}_{165^\circ},\ w_2=\sqrt{2}_{285^\circ}$$

Solución del ejercicio 4

$$\frac{x^2+2x}{x-1}\cdot\left(\frac{3}{x^2-4}-\frac{x}{x-2}\right)=\frac{x(x+2)}{x-1}\cdot\left(\frac{3-x(x+2)}{(x-2)(x+2)}\right)=\frac{x(x+2)}{x-1}\cdot\frac{(-x^2-2x+3)}{(x-2)(x+2)}$$

Factorizamos el polinomio $-x^2-2x+3$ por el método de Ruffini, o resolviendo la ecuación $-x^2-2x+3=0$.

Si resolvemos esta ecuación, las raíces son $x=1$ y $x=-3$, y como el coeficiente principal del polinomio es -1, entonces $-x^2-2x+3=-1(x-1)(x+3)$:

$$\frac{x(x+2)}{x-1}\cdot\frac{(-x^2-2x+3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x+2)}{x-1}\cdot\frac{(-1)(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=-\frac{x(x+3)}{x-2}$$

Solución del ejercicio 5

Aplicando propiedades de logaritmos:

$$3\log x = \log(3x) + \log(2x-3) \implies \log(x^3) = \log(3x(2x-3)) \implies x^3 = 3x(2x-3)$$

Una solución trivial de la última ecuación es $x = 0$, con lo que ya tendríamos una posible solución al problema de partida.

Para buscar las otras soluciones $x \neq 0$, simplificando

$$x^3 = 3x(2x-3) \implies x^2 = 3(2x-3) \implies x^2 - 6x + 9 = 0 \implies (x-3)^2 = 0 \implies x = 3$$

En principio tenemos las posibles soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$. Ahora hay que validarlas en el problema del enunciado:

· *Aceptar $x = 0$ supone calcular $\log 0$, que no existe, por tanto, rechazamos $x = 0$ como solución.*

· *Si sustituimos $x = 3$:*

- *En el lado izquierdo queda* $3\log 3 = \log(3^3) = \log 27$
- *En el lado derecho queda* $\log 9 + \log 3 = \log(9 \cdot 3) = \log 27$

Por tanto, $x = 3$ es solución de la ecuación.

Solución del ejercicio 6

a) *El problema equivale a buscar números cuya distancia al 5 sea mayor que 2:*

$$(-\infty, 3) \cup (7, +\infty)$$

b) *Buscamos los valores reales que verifican $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.*

La ecuación es bicuadrada, y solo tiene dos soluciones reales: $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

También podría factorizarse el polinomio, obteniendo el planteamiento equivalente

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1) \leq 0$$

.

En cualquier caso, tanteando en la recta real, se encuentra que la solución es el intervalo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

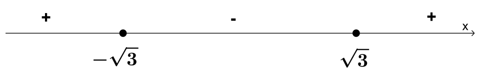

Figura 1: Ejercicio 5b

c) *Factorizamos el polinomio del numerador, y tenemos la inecuación*

$$\frac{x(x^2+4)}{x-2} \geq 0$$

El numerador cambia de signo en $x = 0$*, y el denominador lo hace en* $x = 2$*. Utilizamos estos dos valores para tantear en la recta, y encontramos la solución*

$$(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$$

(El valor $x = 2$ *no se incluye porque anula el denominador).*

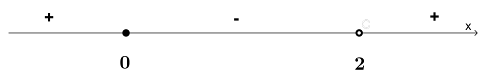

Figura 2: Ejercicio 5c

Solución del ejercicio 7

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+z & = & 3 \\ 2x-3y+3z & = & 10 \\ -x+y-3z & = & -10 \end{array}\right. \xrightarrow[F_1+F_3 \to F_3]{-2F_1+F_2 \to F_2} \left\{\begin{array}{rcr} x-2y+z & = & 3 \\ y+z & = & 4 \\ -y-2z & = & -7 \end{array}\right. \xrightarrow{F_2+F_3 \to F_3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+z & = & 3 \\ y+z & = & 4 \\ -z & = & -3 \end{array}\right.$$

· *En* F_3*:* $-z = -3 \implies z = 3$

· *En* F_2*:* $y + 3 = 4 \implies y = 1$

· *En* F_1*:* $x - 2 \cdot 1 + 3 = 3 \implies x = 2$

El sistema es compatible determinado, con solución $(2, 1, 3)$

Solución del ejercicio 8

I*)* *Despejamos* y *en la segunda ecuación:* $y = x + 1$

II*)* *Sustituímos* y *en la primera ecuación:*

$$9^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 27 \implies (3^x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3^x = 27 \implies (3^x)^2 + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

Haciendo $t = 3^x$*:*

$$t^2 + 6t - 27 = 0 \implies t = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{2} = \left\{\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -9 \end{array}\right.$$

Si $t = 3,$ *entonces* $3^x = 3 \implies x = 1$

Si $t = -9,$ *entonces* $3^x = -9 \implies x \notin \mathbb{R}$

El único valor posible encontrado para x *es* $x = 1$

III) *Calculamos y:*

$$y = x + 1 \implies y = 2$$

IV) *El punto* $(1, 2)$ *verifica las dos ecuaciones del sistema, por tanto es solución.*

Solución del ejercicio 9

Elegimos:
x *Número de alumnos de 2º A*
y *Número de alumnos de 2º B*
z *Número de alumnos de 2º C*

I) *Los* 90 *alumnos de 2º de bachillerato de un instituto están divididos en tres grupos A, B y C:*

$$x + y + z = 90$$

II) *Si se pasan* 7 *alumnos del grupo B al grupo A, ambos grupos tendrían el mismo número de alumnos:*

$$y - 7 = x + 7$$

III) *Si se pasan* 4 *alumnos del grupo C al grupo A, en éste habría la mitad de alumnos que en el grupo C.*

$$\frac{z - 4}{2} = x + 4$$

Tenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z & = & 90 \\ y - 7 & = & x + 7 \\ \dfrac{z - 4}{2} & = & x + 4 \end{array} \right.$$