IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I. 1º Bachillerato-A
2º Parcial. 26-11-2018. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) *Primero se factorizan todos los polinomios, y luego, se van efectuando las operaciones siguiendo el orden habitual, y efectuando todas las posibles simplificaciones para que el cálculo sea más eficiente.*

$$\left(\frac{1}{(x-2)(x+2)}-\frac{x-2}{x+2}\right):\frac{2(x-1)}{(x+2)^2}=\frac{(1-(x-2)^2)}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)^2}{2(x-1)}=$$

$$\frac{(1-(x^2-4x+4))}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)^2}{2(x-1)}=\frac{(-x^2+4x-3)}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)^2}{2(x-1)}$$

Factorizando el polinomio $-x^2+4x-3$ (resolviendo la ecuación $-x^2+4x-3=0$ o por el método de Ruffini), la expresión resultaría:

$$\frac{(-1)(x-3)(x-1)}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)^2}{2(x-1)}=-\frac{(x-3)(x+2)}{2(x-2)}$$

b) *Se empieza descomponiendo el polinomio $4x^3-4x^2-x+1$ por el método de Ruffini, y se encuentra la raíz $x=1$, llegando a que se puede expresar como $(x-1)(4x^2-1)$. Luego puede terminarse muy rápido identificando el producto notable.*

Para x^3+x basta sacar x factor común.

Todos los demás son resultado de productos notables, y utilizar esto es mucho más fácil que resolver las ecuaciones de segundo grado (aunque también sería una opción válida)

$$\frac{4x^3-4x^2-x+1}{x^4-1}\cdot\frac{x^3+x}{4x^2+4x+1}=\frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\cdot\frac{x(x^2+1)}{(2x+1)^2}=$$

$$\frac{x(2x-1)}{(x+1)(2x+1)}$$

Si se opta por no recurrir a los productos notables, se llega a la solución equivalente:

$$\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

Solución del ejercicio 2

a) $x^3-x=x \implies x^3-2x=0 \implies x(x^2-2)=0 \implies x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

Por tanto, las soluciones reales son: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$

b) $4^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 16 \implies (2^x)^2 + 3 \cdot 2 \cdot 2^x - 16 = 0 \implies (2^x)^2 + 6 \cdot 2^x - 16 = 0$

Haciendo $t = 2^x$, llegamos a la ecuación $t^2 + 6t - 16 = 0$:

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} \implies \begin{cases} t_1 &= 2 \\ t_2 &= -8 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable:

i) $2^x = 2 \implies x = 1$, *que es una solución válida.*

ii) $2^x = -8 \implies x \notin \mathbb{R}$

c) *Aplicamos propiedades de logaritmos:*

$$\log(1-x^2) - 2\log x = \log(1+x) - \log(1-x) \implies \log\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \implies$$

$$\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1+x}{1-x} \implies \frac{(1-x)(1+x)}{x^2} = \frac{1+x}{1-x} \implies (1-x)^2(1+x) = x^2(1+x)$$

Podemos simplificar la última ecuación eliminando el factor $(1+x)$, pero deberemos tener en cuenta que de dicha ecuación, $x = -1$ es una solución.

Simplificándola:

$$(1-x)^2 = x^2 \implies 1 - 2x + x^2 = x^2 \implies 1 - 2x = 0 \implies x = \frac{1}{2}$$

En principio, las soluciones encontradas para $(1-x)^2(1+x) = x^2(1+x)$ fueron $x_1 = -1$, y $x_2 = \frac{1}{2}$. Ahora debemos asegurarnos de que podemos acepatarlas para el problema original.

i) *Aceptar $x_1 = -1$ implicaría, entre otras cosas, tener $\log(1-(-1)^2) = \log 0$, que no existe. Por tanto, $x_1 = -1$ no se admite como solución al ejercicio.*

ii) *Para validar $x_2 = \frac{1}{2}$, sustituimos en ambos lados de la ecuación, y comprobamos si se cumple la igualdad:*

- $\log\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\frac{1}{4} = \log 3$
- $\log\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 3$

Por tanto, $x_2 = \frac{1}{2}$ es la única solución válida del ejercicio.

OBSERVACIÓN:

Podría haberse empezado el ejercicio aplicando las propiedades de los logaritmos de otra forma:

$$\log(1-x^2) - 2\,\log x = \log(1+x) - \log(1-x) \implies$$

$$\log(1+x) + \log(1-x) - 2\,\log x = \log(1+x) - \log(1-x) \implies$$

$$2\,\log(1-x) = 2\,\log x \implies 1 - x = x \implies x = \frac{1}{2}$$

d) *Aplicando propiedades de logaritmos:*

$$3^x = 2 \implies \log 3^x = \log 2 \implies x \cdot \log 3 = \log 2 \implies x = \frac{\log 2}{\log 3}$$

e) *Empezamos aislando el radical en un lado de la igualdad.*

$$x + \sqrt{7-3x} = 1 \implies \sqrt{7-3x} = 1 - x \implies 7 - 3x = (1-x)^2 \implies$$

$$7-3x = 1-2x+x^2 \implies x^2+x-6 = 0 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \implies \begin{cases} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -3 \end{cases}$$

Ahora debemos asegurarnos de que podemos aceptar x_1 y x_2 para resolver el problema original.

Para validarlas, las sustituimos en la ecuación, y comprobamos si se cumple la igualdad:

i) *Si $x_1 = 2$,*

$$2 + \sqrt{7 - 3 \cdot 2} = 2 + 1 = 3 \neq 1 \implies x_1 = 2 \text{ no es solución de la ecuación}$$

ii) *Si $x_2 = -3$,*

$$-3 + \sqrt{7 - 3 \cdot (-3)} = -3 + 4 = 1 \implies x_2 = -3 \text{ es solución de la ecuación}$$

Solución del ejercicio 3

$$\begin{cases} x - 2y + 2x &= 1 \\ 2x + 3y - 3z &= -5 \\ -3x + y + 2z &= 7 \end{cases} \xrightarrow[3F_1+F_3 \to F_3]{-2F_1+F_2 \to F_2} \begin{cases} x - 2y + 2x &= 1 \\ 7y - 7z &= -7 \\ -5y + 8z &= 10 \end{cases} \xrightarrow{\frac{F_2}{7} \to F_2}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2x &= 1 \\ y - z &= -1 \\ -5y + 8z &= 10 \end{cases} \xrightarrow{5F_2+F_3 \to F_3} \begin{cases} x - 2y + 2x &= 1 \\ y - z &= -1 \\ 3z &= 5 \end{cases}$$

i) *De la tercera ecuación, obtenemos $z = \frac{5}{3}$*

ii) *Sustituyendo z en la segunda ecuación, obtenemos $y - \frac{5}{3} = -1 \implies y = \frac{2}{3}$*

iii) *Sustituyendo z e y en la primera ecuación, obtenemos $x - 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} = 1 \implies x = -1$*

Por tanto, la solución del sistema es $\left(-1, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Solución del ejercicio 4

i) *Despejamos x de la segunda ecuación: $x = -\dfrac{3}{y}$*

ii) *Sustituimos x en la primera ecuación:*

$$\left(-\frac{3}{y}\right)^2 - y^2 = 8 \implies \frac{9}{y^2} - y^2 = 8 \implies 9 - y^4 = 8y^2 \implies y^4 + 8y^2 - 9 = 0$$

III) *Resolviendo la ecuación bicuadrada con el cambio $t = x^2$:*

$$t^2 + 8t - 9 = 0 \implies t = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{2} \implies \begin{cases} t_1 &= & 1 \\ t_2 &= & -9 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

- *Si* $y^2 = 1 \implies y_1 = 1,\ y_2 = -1$
- *Si* $y^2 = -9$*, y no sería un número real.*

IV) *Encontramos las coordenadas x para cada una de las coordenadas y obtenidas:*

- *Si* $y = 1 \implies x = -\dfrac{3}{1} \implies x = -3$
- *Si* $y = -1 \implies x = -\dfrac{3}{(-1)} \implies x = 3$

Por tanto, el sistema tiene dos soluciones: $(-3, 1)$ *y* $(3, -1)$

Solución del ejercicio 5

Elegimos, por ejemplo, las siguientes incógnitas:
x: Número de películas infantiles.
y: Número de películas del oeste americano.
z: Número de películas de terror.

I) *El 60 % de las películas infantiles, más el 50 % de las del oeste, representan el 30 % del total de las películas:*

$$0.6x + 0.5y = 0.3(x + y + z)$$

II) *El 20 % de las infantiles, más el 60 % de las del oeste, más el 60 % de las de terror, representan la mitad del total de las películas:*

$$0.2x + 0.6y + 0.6z = \frac{x + y + z}{2}$$

III) *Hay 100 películas más del oeste, que infantiles:*

$$y = x + 100$$

Esto nos daría el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0.6x + 0.5y &=& 0.3(x + y + z) \\ 0.2x + 0.6y + 0.6z &=& \dfrac{x + y + z}{2} \\ y &=& x + 100 \end{array} \right.$$

O el transformado (aunque con la respuesta anterior, ya se obtendría la puntuación completa):

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x + 2y - 3z &=& 0 \\ -3x + y + z &=& 0 \\ -x + y &=& 100 \end{array} \right.$$