IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
14-01-2019. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

$$\frac{6\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} - \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{6\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3} - \frac{2+1-2\sqrt{2}}{1} =$$

$$= 2\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{3}) - (3-2\sqrt{2}) = 2\cdot 3\sqrt{2} + 2\cdot 3 - 3 + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}+3$$

Solución del ejercicio 2

a) Lo mejor es utilizar la fórmula de De Moivre para z_1^3*:*

$$z_1^3 = (2\,\cos 150^\circ + i\,2\,\operatorname{sen} 150^\circ)^3 = 2^3\,\cos(3\cdot 150^\circ) + i\,2^3\,\operatorname{sen}(3\cdot 150^\circ) \implies$$

$$z_1^3 = 8\,\cos 450^\circ + i\,8\,\operatorname{sen} 450^\circ = 8\,i$$

b) Como $z_3 - \overline{z_3} = 2\,i\,Im(z_3)$*, y* $z_2 = \sqrt{3}\cdot(-i)$ *entonces:*

$$(z_3 - \overline{z_3})\cdot z_2 = -6\,i\cdot(-\sqrt{3}\,i) = -6\sqrt{3}$$

c) Como $z_1 = 2\,\cos 150^\circ + i\,2\,\operatorname{sen} 150^\circ = -\sqrt{3}+i$*, entonces:*

$$z_1\cdot z_3 = (-\sqrt{3}+i)(2-3i) = -2\sqrt{3}+3+i\,(3\sqrt{3}+2)$$

d) $(-z_2)^{-1} = \left(-\sqrt{3}_{270^\circ}\right)^{-1} = \left(\sqrt{3}_{90^\circ}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)_{-90^\circ} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)_{-90^\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,i$

Solución del ejercicio 3

$$(1+\sqrt{3}\,i)z^4 - 9 = 0 \implies z^4 = \frac{9}{1+\sqrt{3}\,i} \implies z^4 = \frac{9(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)} \implies$$

$$\implies z^4 = 9\left(\frac{1}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \implies z^4 = \left(\frac{9}{2}\right)_{-60^\circ} \implies z = \sqrt[4]{\left(\frac{9}{2}\right)_{-60^\circ}}$$

Las raíces cuartas del número complejo $\left(\dfrac{9}{2}\right)_{-60^\circ}$ *son los complejos* $w_k = \sqrt[4]{\dfrac{9}{2}}_{\frac{-60^\circ+360^\circ\,k}{4}}$, *con* $k = 0,1,2,3.$

Es decir, $w_k = \sqrt[4]{\left(\dfrac{9}{2}\right)}_{-15^\circ+90^\circ\,k}$*:*

$$w_0 = \sqrt[4]{\frac{9}{2}}_{-15^\circ},\; w_1 = \sqrt[4]{\frac{9}{2}}_{75^\circ},\; w_2 = \sqrt[4]{\frac{9}{2}}_{165^\circ},\; w_3 = \sqrt[4]{\frac{9}{2}}_{255^\circ}$$

Solución del ejercicio 4

$$\left(1-\frac{x^2+x-1}{x^2+2x-3}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{x+2}{x-2}\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2+2x-3-(x^2+x-1)}{x^2+2x-3}\right)\cdot\left(\frac{1}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+2}{x-2}\right)=$$

$$=\frac{(x-2)}{(x+3)(x-1)}\cdot\frac{(1-(x+2)^2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x-2)(-x^2-4x-3)}{(x+3)(x-1)(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{(x-2)(-1)(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x-2)(x+2)}=-\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$

Solución del ejercicio 5

$$\log(x^2+4x+4)-4\log(\sqrt{x+1})=\log(2x+4)\implies\log(x^2+4x+4)-\log(\sqrt{x+1})^4=\log(2x+4)$$

$$\implies\log(x^2+4x+4)-\log(x+1)^2=\log(2x+4)\implies\log\left(\frac{x^2+4x+4}{(x+1)^2}\right)=\log(2x+4)$$

$$\implies\frac{x^2+4x+4}{(x+1)^2}=2x+4\implies x^2+4x+4=(x+1)^2\cdot(2x+4)$$

Es más fácil probar a hacer algún tipo de simplificación, que hacer los productos e intentar resolver la ecuación de grado 3 que resultaría.

Como $x^2+4x+4=(x+2)^2$*, y también* $2x+4=2(x+2)$*, entonces tenemos:*

$$x^2+4x+4=(x+1)^2\cdot(2x+4)\implies(x+2)^2=2(x+1)^2(x+2)$$

En esta última igualdad, vemos que $x_1=-2$ *es una solución de la ecuación polinómica.*

Si buscamos ahora las soluciones distintas de $x_1=-2$*, simplificando la última ecuación, tenemos*

$$(x+2)^2=2(x+1)^2(x+2)\implies x+2=2(x+1)^2\implies x+2=2x^2+4x+2\implies 2x^2+3x=0$$

$$\implies x(2x+3)=0\implies\begin{cases}x_2=0\\x_3=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

Ahora hay que comprobar cuáles de las soluciones de la ecuación polinómica son soluciones de la ecuación del enunciado:

- *Validación de* $x_1=-2$*:*

  Si se cambia en cualquiera de los miembros de la ecuación logarítmica x *por* -2*, sería necesario efectuar el logaritmo de cero, o la raíz cuadrada de un número negativo. Por tanto,* $x_1=-2$ *no se admite como solución.*

- *Validación de* $x_2=0$*:*

  Si se hace la sustitución, pueden hacerse todas las operaciones correspondientes (y se cumple la igualdad). Por tanto, se admite $x_2=0$ *como solución.*

- *Validación de $x_3 = -\frac{3}{2}$:*

  Si se sustituye en el miembro izquierdo de la ecuación la variable por $-\frac{3}{2}$, tendríamos que calcular $\sqrt{-\frac{1}{2}}$, que no pertenece a $\mathbb{R}$. Por tanto, no se admite $x_3 = -\frac{3}{2}$ como solución.

Solución del ejercicio 6

a) *Esta desigualdad puede resolverse rápidamente teniendo en cuenta su significado geométrico: se buscan los números reales cuya distancia a -3 sea inferior a 3. Por tanto, la solución es el intervalo $(-6, 0)$*

b) *Factorizamos el polinomio $x^4 - x^2 - 2$, resolviendo la ecuación $x^4 - x^2 - 2 = 0$.*

Si $x^2 = t$, entonces:

$$x^4 - x^2 - 2 = 0 \implies t^2 - t - 2 = 0 \implies t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \implies \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Por tanto:

$t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = (x^2-2)(x^2+1) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$

Para resolver $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1) \leq 0$, tanteamos en la recta real

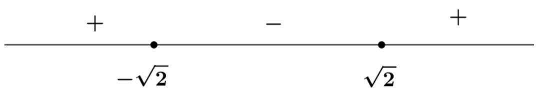

Figura 1: Ejercicio 6b

La solución es el intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

c) *Factorizando el polinomio del numerador, tenemos* $\dfrac{x^2(x+1)}{x-1} \geq 0$.

Tanteamos en la recta real

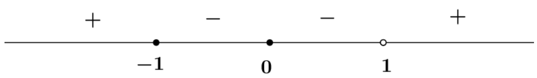

Figura 2: Ejercicio 6c

La solución es el conjunto $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty) \cup \{0\}$ (x = 1 no es del conjunto solución porque anula el denominador, y para $x = 0$ se anula la expresión)

Solución del ejercicio 7

$$\left.\begin{array}{rcr} x - 3y + z &=& 5 \\ x - y + 3z &=& 4 \\ -x + y + 2z &=& 1 \end{array}\right\} \xrightarrow[F_1+F_3 \to F_3]{-1\cdot F_1+F_2 \to F_2} \left.\begin{array}{rcr} x - 3y + z &=& 5 \\ 2y + 2z &=& -1 \\ -2y + 3z &=& 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_2+F_3 \to F_3} \left.\begin{array}{rcr} x - 3y + z &=& 5 \\ 2y + 2z &=& -1 \\ 5z &=& 5 \end{array}\right\}$$

Es decir:

- $5z = 5 \implies z = 1$
- $2y + 2z = -1 \implies 2y + 2 = -1 \implies y = -\frac{3}{2}$
- $x - 3y + z = 5 \implies x + \frac{9}{2} + 1 = 5 \implies x = \frac{1}{2}$

El sistema es compatible determinado, con solución $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$

Solución del ejercicio 8

1. *Despejamos* x^2 *de la segunda ecuación:*

   $x^2 = 2y - 3$

2. *Lo sustituimos en la primera ecuación, y la resolvemos:*

$$2^{y+1} - 2^{2y-3+1} = 4 \implies 2 \cdot 2^y - 2^{-2} \cdot 2^{2y} = 4 \implies 2 \cdot 2^y - \frac{1}{4}(2^y)^2 = 4$$

   Haciendo $t = 2^y$*, resolvemos* $2t - \dfrac{t^2}{4} = 4$*:*

$$2t - \frac{t^2}{4} = 4 \implies 8t - t^2 = 16 \implies t^2 - 8t + 16 = 0 \implies (t-4)^2 = 0 \implies t = 4$$

   Como $t = 2^y$*, entonces* $4 = 2^y \implies y = 2$

3. *Calculamos* x *en* $x^2 = 2y - 3$*:*

   $x^2 = 2 \cdot 2 - 3 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$

4. *La solución del sistema son los dos puntos* $(1, 2)$ *y* $(-1, 2)$

Solución del ejercicio 9

Elegimos las siguientes incógnitas:

- *A: precio del regalo A.*
- *B: precio del regalo B.*
- *C: precio del regalo C.*

Resolución:

- *Hemos pagado* 117 € *por los tres regalos tras habernos hecho un descuento del* 10 % *sobre el precio total.*

$$0.9(A + B + C) = 117$$

- *El precio del regalo C es el doble que el del regalo A.*

$$C = 2A$$

- *El regalo C es* 20 € *más caro que el regalo B.*

$$C = B + 20$$

Obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcr} 0.9(A+B+C) & = & 117 \\ C & = & 2A \\ C & = & B+20 \end{array}\right.$$