# Ejercicios de repaso

**Ejercicio 1** *Reduce hasta donde sea posible (recuerda que puede ser necesario simplificar y/o racionalizar).*

*a)* $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{a-\sqrt{a}} - \dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$

*b)* $(1+\sqrt{5})^4 - (2-\sqrt{5})^2$

*c)* $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{\dfrac{12}{625}}$

*d)* $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{50}{27}} - \dfrac{1}{5}\sqrt{24}$

*e)* $(1.\widehat{7})^{-0.5}\cdot 81^{-0.\widehat{3}}$

*f)* $\dfrac{2}{\sqrt{5-\sqrt{3}}}$

*g)* $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}-3}$

*h)* $\dfrac{\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

**Ejercicio 2** *Dados los complejos* $z_1 = 1+2\,i$, $z_2 = 2-2\,i$, $z_3 = 2\sqrt{3}-2\,i$, $z_4 = \sqrt{2}\,i$ *y* $z_5 = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{4} - i\,\dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}$

*a)* *Expresa en forma binómica el resultado de las siguientes operaciones:*

I) $(z_1-\overline{z_1})\cdot z_4$   II) $\dfrac{z_2}{z_3}$   III) $(z_5)^8$   IV) $(z_2+\overline{z_2})z_3\cdot z_4$

*b)* *Expresa en forma polar:*

I) $(z_2)^{\frac{1}{5}}$   II) $\sqrt[4]{z_3}$   III) $\sqrt[3]{\dfrac{z_1-i}{z_3}}$

*c)* *Expresa en forma polar el opuesto, el conjugado, y el inverso de* $z_2$

**Ejercicio 3** *El afijo del complejo* $w = 2 - i\,4\sqrt{3}$ *es uno de los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas. Calcula el radio de la circunferencia, y los vértices y el perímetro de dicho triángulo.*

**Ejercicio 4** *El complejo* $w = 3-5\,i$ *es una raíz cuarta de la unidad. Obtén las otras tres raíces, y el área del polígono regular que determinan los afijos de dichas cuatro raíces de la unidad.*

**Ejercicio 5** *Factoriza en* $\mathbb{R}[x]$ *los siguientes polinomios, e indica cuáles son sus raíces reales.*

*a)* $6x^4+4x^2-2$

*b)* $-x^3+3x^2-6x+8$

*c)* $4x^5+4x^4-19x^3-22x^2$

*d)* $x^8-15x^4-16$

*e)* $x^5-3x^4+x^3+5x^2-6x+2$

*f)* $-x^4+x^2+20$

**Ejercicio 6** *Resuelve las siguientes cuestiones:*

*a)* *Obtén un polinomio de grado 5, que tenga únicamente una raíz real triple.*

*b)* *Obtén un polinomio de grado 2 cuyas raíces sean el número $2-3\,i$, y su conjugado.*

*c)* *Obtén el polinomio de grado 2, con coeficiente principal 3, y cuyas raíces sean el número $w_1=-1+i$ y su conjugado.*

*d)* *Los números complejos $w_1=\dfrac{1}{2}-2\,i$, $w_2=1+\dfrac{1}{2}\,i$, y sus conjugados, son las raíces de un polinomio de grado cuatro y con coeficiente principal 2. Obtén dicho polinomio.*

**Ejercicio 7** *Resuelve en $\mathbb{C}$ estas ecuaciones:*

*a)* $z^4+2z^2-3=0$

*b)* $z^3-3z^2+z+5=0$

*c)* $z^4+5z^2+25z=26+5z^3$

*d)* $z^4+2z^3+2z+4=0$

*e)* $z^4-2z^2+16z=15$

*f)* $z^6=4z^2$

*g)* $z^4+10z^2=6z^3+8z$

*h)* $(1+i)z^3-z=0$

*i)* $4i\,z^4-3z=0$

*j)* $(1-i)z^6-1+i=0$

**Ejercicio 8** *Calcula y simplifica si es posible.*

*a)* $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{x+3}{2x+2}+\dfrac{x}{(x+1)^2}$

*b)* $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x^2+1}{4-x^2}$

*c)* $\dfrac{1-x^2}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}$

*d)* $\dfrac{9-x^2}{2x+x^2}:\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+4x+4}$

*e)* $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{2x^2-6}{2x^3}$

*f)* $\left(\dfrac{2}{x}+x^2\right):\dfrac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}$

*g)* $\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{x+5}{x-5}-\dfrac{8x^2}{2x^2-50}$

*h)* $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\dfrac{2x-10}{25-x^2}$

*i)* $\left[\dfrac{1}{(2x+1)^2}-\dfrac{2x-1}{4x+2}\right]\cdot\dfrac{6x+3}{16x^4-9}$

*j)* $\dfrac{x+2y}{x^3y-y^3}-\dfrac{x-y}{x+y}$

**Ejercicio 9** *Escribe utilizando notación de intervalos el conjunto de números reales que satisfacen las siguientes desigualdades.*

*a)* $-x^3+x^2+3x\geq 3$

*b)* $x-\dfrac{5-x}{10}+\dfrac{x+1}{5}<x-\dfrac{1}{2}$

*c)* $|2x-1|\geq 6$

*d)* $|3-4x|\leq 7$

*e)* $|x-2|<|3x+5|$

*f)* $\dfrac{1-x^4}{2x^4-2}\leq 0$

*g)* $\dfrac{x^3-x}{4-x^2}\geq 0$

*h)* $\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-9}\geq 0$

*i)* $\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}\geq 0$

*j)* $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2}{x(x-1)}\leq 0$

*k)* $\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{2}{1-x}\geq 0$

*l)* $\dfrac{x}{x-1} \leq -\dfrac{2}{1-2x+x^2}$

*m)* $\dfrac{x^2}{x^2+4x+4} - \dfrac{x-2}{2x+4} > 1$

**Ejercicio 10** *Resuelve en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones.*

*a)* $\sqrt{5x+1} = \sqrt{x^2-5}$

*b)* $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$

*c)* $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+2} = 0$

*d)* $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1$

*e)* $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$

*f)* $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+19} = -1$

*g)* $\sqrt{q-3} + \sqrt{q+4} = \sqrt{4q+1}$

*h)* $\sqrt{8r-4} = \sqrt{6r+1} + \sqrt{2r+9}$

*i)* $\sqrt{9\sqrt{15-s}} = 6\sqrt{2s+3}$

**Ejercicio 11** *Resuelve en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones logarítmicas.*

*a)* $\log\sqrt{x^2-3x+2} = \log x$

*b)* $\ln(6x) - \ln\sqrt{6x} = \ln\sqrt{x^2+9}$

*c)* $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln(x^2)$

*d)* $\ln(x^2+3x+2) - \ln(x+1) = \ln(1-x)$

*e)* $\log_2(5x^2+15x+10) - \log_2(x+2) = 2$

*f)* $\log(3^x) + 5 = \log(9^x)$

**Ejercicio 12** *Resuelve en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones exponenciales.*

*a)* $4^x - 3\cdot 2^x = 10$

*b)* $3\cdot 4^x + 6\cdot 2^x = 24$

*c)* $3^{2x-1} - 3^x = 18$

*d)* $2^{4x+2} - 48\cdot 2^{2x-2} + 8 = 0$

*e)* $9\cdot \sqrt[3x-1]{9} = 9^x$

*f)* $25^{2x} - 3\cdot 5^{2x} = 4$

*g)* $2^{2x-2} = 20$

*h)* $2^{2x} + 20 = 9\cdot 2^x$

*i)* $2^{x-1} + 2^{3-x} = 5$

**Ejercicio 13** *Resuelve en $\mathbb{R}$ los siguientes sistemas por el procedimiento más adecuado, indicando brevemente los pasos seguidos.*

*a)* $\begin{cases} x-2y=1 \\ -x-2y+z=0 \\ 3x-y+z=-1 \end{cases}$

*b)* $\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

*c)* $\begin{cases} x+y-2z=10 \\ 2x-y+3z=-5 \\ 4x+y+2z=-1 \end{cases}$

*d)* $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ x+y=6 \end{cases}$

*e)* $\begin{cases} -x+2y+2z=1 \\ x-y-z=-2 \\ x+y+z=-4 \end{cases}$

*f)* $\begin{cases} x=y^2-1 \\ 2^{y^2}-3\cdot 4^x=-8 \end{cases}$