Números Complejos

IES O Couto

curso 2019-2020

Introducción: Números imaginarios

Los números complejos surgen para extender el cuerpo de los números reales, y poder resolver ecuaciones como

$$x^2 + 1 = 0$$

Se define un número i (llamado **unidad imaginaria**), que cumple que

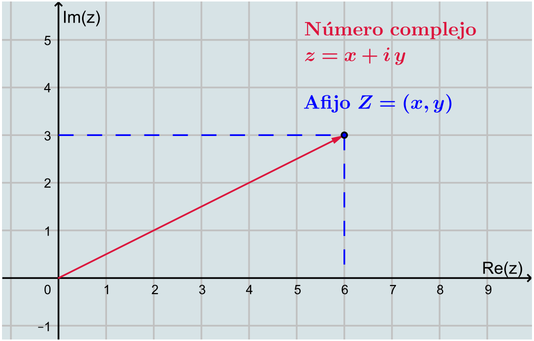
$$i^2 = -1$$

Es decir, que es solución de la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

Representación binómica de un número complejo

Para visualizar un modelo del cuerpo de los números complejos, se identifica cada $z \in \mathbb{C}$ con un punto del plano cartesiano (el llamado **afijo** del complejo z).



El conjunto $\mathbb{C}$

Se define el conjunto de los números complejos como:

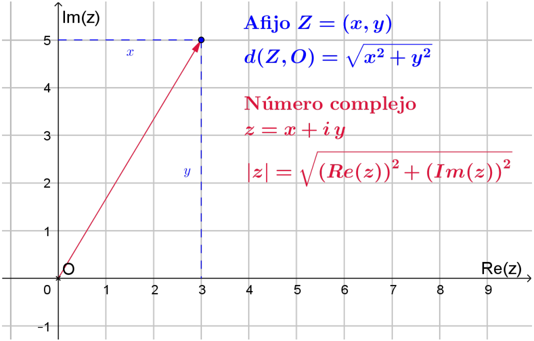
$$\mathbb{C} = \{z = x + i\,y \,/\, x \in \mathbb{R}\,, y \in \mathbb{R}\}$$

- x se llama **parte real** del complejo z. Es decir, $Re(z) = x$
- y se llama **parte imaginaria** del complejo z. Es decir, $Im(z) = y$

Módulo de un complejo

El **módulo** del complejo z se define como la distancia del afijo Z al origen de coordenadas. Es decir:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$



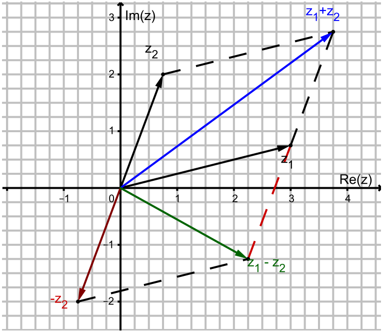
Operaciones con complejos: Suma y resta

El proceso es el mismo que cuando se suman y restan vectores en el plano.

Dados los números complejos $z_1 = x_1 + i\,y_1$ y $z_2 = x_2 + i\,y_2$:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i\,(y_1 - y_2)$$



Operaciones con complejos: Producto y división

Dados $z_1 = x_1 + i\,y_1$ y $z_2 = x_2 + i\,y_2$

Producto

Para efectuar $z_1 \cdot z_2$ se procede como cuando se aplica la propiedad distributiva. Solo hay que tener en cuenta que $i^2 = -1$. Así:

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i\,(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

División

Para efectuar $z_1 : z_2$ basta multiplicar el numerador y el denominador por "el conjugado" del denominador: $x_2 - i\,y_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + i\,y_1)(x_2 - i\,y_2)}{(x_2 + i\,y_2)(x_2 - i\,y_2)} = \frac{(x_1 + i\,y_1)(x_2 - i\,y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ejemplo 1

Dados $z_1 = 2 - 3\,i$ y $z_2 = -1 + 2\,i$:

a) $z_1 + z_2 - 2(z_1 - z_2) = 1 - i - 2(3 - 5\,i) = 1 - i - 6 + 10\,i = -5 + 9\,i$

b) $z_1 + \overline{z_1} - i\,(z_2 - \overline{z_2}) = 4 - i \cdot 4\,i = 8$

c) $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3\,i)(-1 + 2\,i) = -2 + 4\,i + 3\,i + 6 = 4 + 7\,i$

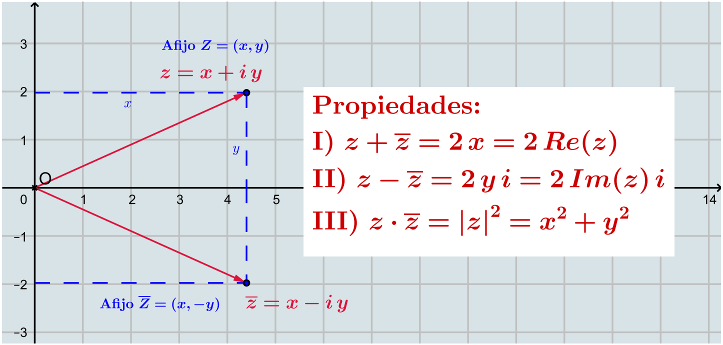
d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2 - 3\,i}{-1 + 2\,i} = \dfrac{(2 - 3\,i)(-1 - 2\,i)}{(-1 + 2\,i)(-1 - 2\,i)} = \dfrac{-8 - i}{5} = -\dfrac{8}{5} - \dfrac{1}{5}\,i$

Conjugado de un complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$, se define su **conjugado** como el complejo

$$\overline{z} = x - i\,y$$

Se cumple que $\overline{z}$ es el simétrico de z respecto al eje OX.

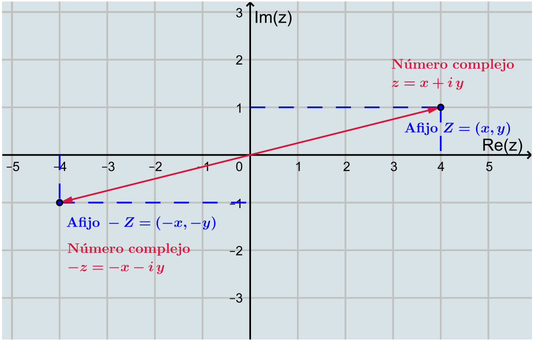


Opuesto de un complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$, se define su opuesto como

$$-z = -x - i\,y$$

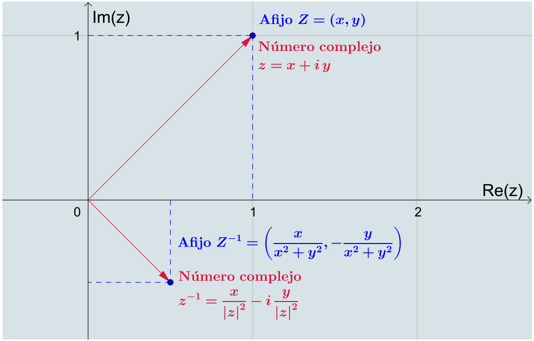
Se cumple que $-z$ es el simétrico de z respecto el origen de coordenadas.



Inverso de un complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$, se define su inverso $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ como el complejo que verifica que $z \cdot z^{-1} = 1$.

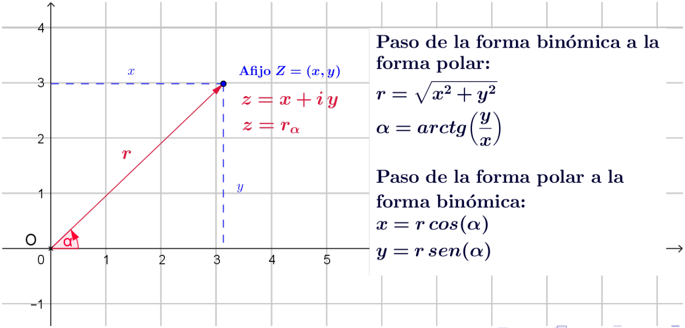
Haciendo operaciones se tiene que $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$



Forma Polar de un complejo

Un complejo z (o su afijo) puede referenciarse indicando a qué distancia se encuentra del origen de coordenadas, y qué ángulo forma su vector de posición con la parte positiva del eje OX.

- Módulo (r): Es la distancia de Z al origen. Coincide con $|z|$
- Argumento (α) : Es el ángulo que forma OZ con la dirección positiva del eje OX.



Otras formas de expresar un complejo z

Dado el número complejo $z = r_\alpha$

Forma Trigonométrica

Teniendo en cuenta la relación entre sus formas polar y binómica, podemos expresarlo como:

$$z = r\, cos(\alpha) + i\, r\, sen(\alpha)$$

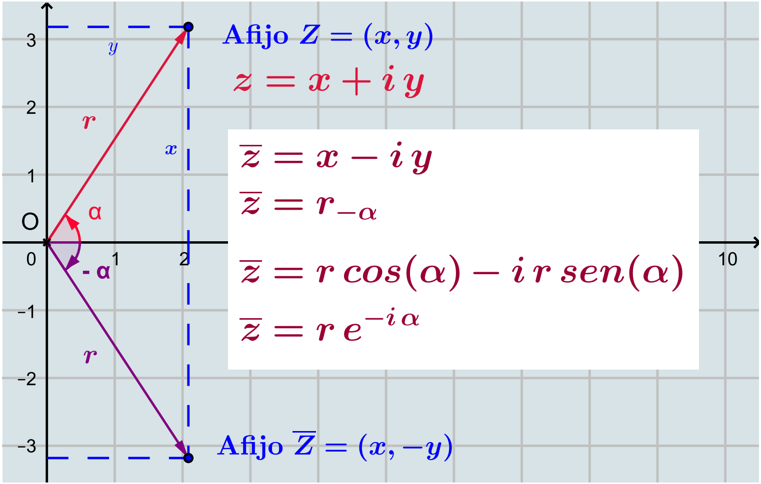
Forma Exponencial

Su forma exponencial es:

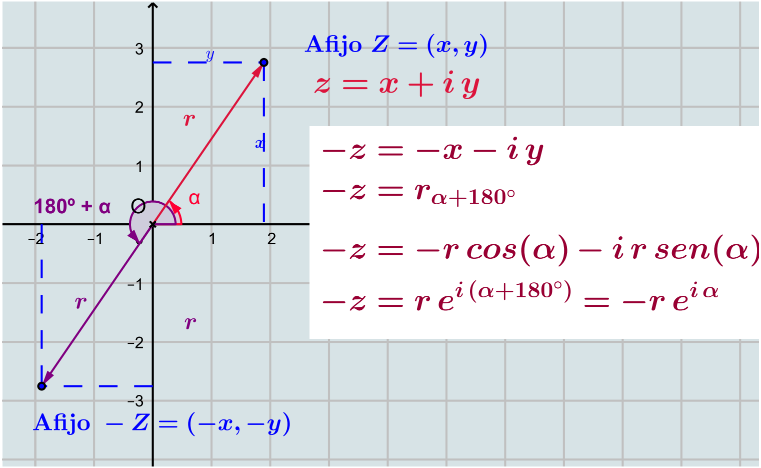
$$z = r\, e^{i\,\alpha} \text{ (Fórmula de Euler)}$$

Expresiones del conjugado de un complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$, teniendo en cuenta la definción de $\overline{z}$ y las distintas expresiones de números complejos, se tiene:



Expresiones del opuesto de un complejo



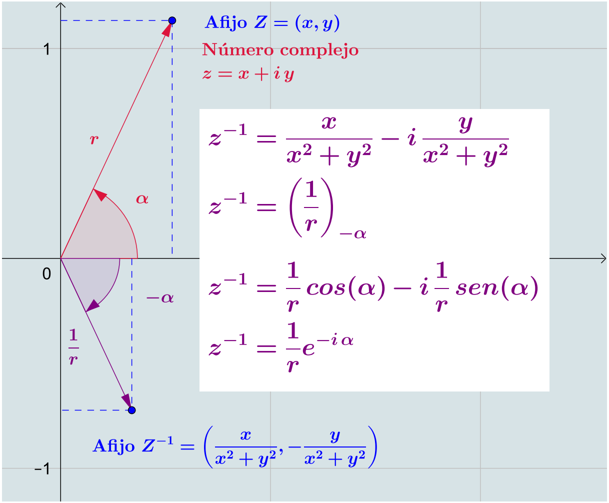
$$-z = -x - i\,y$$

$$-z = r_{\alpha+180^\circ}$$

$$-z = -r\cos(\alpha) - i\,r\,sen(\alpha)$$

$$-z = r\,e^{i\,(\alpha+180^\circ)} = -r\,e^{i\,\alpha}$$

Expresiones del inverso de un complejo



$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z^{-1}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$$

$$z^{-1}=\frac{1}{r}\,cos(\alpha)-i\,\frac{1}{r}\,sen(\alpha)$$

$$z^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\,\alpha}$$

Operaciones con complejos en forma polar: Producto y división

La suma y la resta no suelen ser necesariamente más sencillas con los complejos en forma polar, pero sí los productos y divisiones.

Como consecuencia de la fórmula de Euler, si $z_1 = r_{\alpha_1}$ y $z_2 = s_{\alpha_2}$, entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = r\, s\, e^{i\,(\alpha_1+\alpha_2)} \implies z_1 \cdot z_2 = (r \cdot s)_{\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r\, e^{i\,\alpha_1}}{s\, e^{i\,\alpha_2}} \implies \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}$$

Ejemplo 2

Dados $z_1 = 4_{25^\circ}$ y $z_2 = 5_{75^\circ}$

a) $z_1 \cdot z_2 = 20_{100^\circ}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{4}{5}\right)_{-50^\circ}$

Aplicaciones geométricas del producto de números.

Ejemplo 3

Dado el triángulo $\Delta\, ABC$ de vértices $A = (1, -2)$, $B = (2, 1)$, y $C = (-1, 3)$, calcular las coordenadas de los vértices del triángulo $\Delta\, A'B'C'$ obtenido al efectuar sobre $\Delta\, ABC$ un giro de centro el origen de coordenadas, y amplitud 60°

Efectuar un giro de centro $(0, 0)$ y amplitud 60° equivale a multiplicar los afijos de los vértices del triángulo por el número complejo:

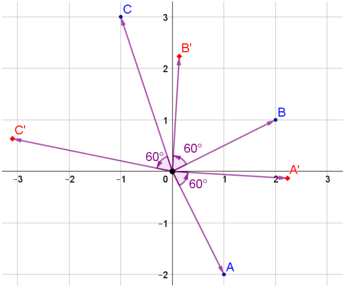
$$z = e^{i\,60^\circ} = 1_{60^\circ} = \cos 60^\circ + i \text{ sen } 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

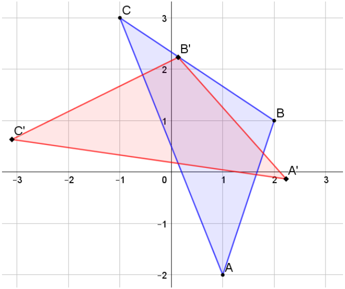
Por tanto:

$$A' = z \cdot A = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)(1 - 2\, i) = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 2}{2}\, i$$

$$B' = z \cdot B = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)(2 + i) = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\, i$$

$$C' = z \cdot C = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)(-1 + 3\, i) = -\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\, i$$





Operaciones con complejos: Potencias

En forma binómica

Si se expresa en forma binómica $z = x + i\,y$, por la fórmula del binomio de Newton:

$$(x + i\,y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \,(i\,y)^{n-k}$$

En forma polar

Si $z = r_\alpha$, como consecuencia de la fórmula de Euler:

$$z^n = (r\,e^{i\,\alpha})^n = (r^n)_{n\alpha}$$

En forma trigonométrica: Fórmula de De Moivre

Si $z = r\,cos(\alpha) + i\,r\,sen(\alpha)$, entonces:

$$z^n = r^n\,cos(n\,\alpha) + i\,r^n\,sen(n\,\alpha)$$

Ejemplo 4

Dado $z = 1 - i = \sqrt{2}_{-45^\circ} = \sqrt{2}cos(45^\circ) + i\,\sqrt{2}sen(-45^\circ)$, podemos calcular z^4 trabajando en forma binómica, polar, o trigonométrica.

a) En forma binómica, usando la fórmula del binomio de Newton:
$(1-i)^4 = \binom{4}{0}(-i)^4 + \binom{4}{1}(-i)^3 + \binom{4}{2}(-i)^2 + \binom{4}{3}(-i)^1 + \binom{4}{4}(-i)^4 =$
$1 + 4\,i - 6 - 4\,i + 1 = -4$

b) En forma polar:
$(\sqrt{2}_{-45^\circ})^4 = 4_{180^\circ} = -4$

c) En forma trigonométrica, usando la fórmula de De Moivre:
$(\sqrt{2}cos(45^\circ) + i\,\sqrt{2}sen(-45^\circ))^4 = 4\,cos(180^\circ) + i\,4\,sen(-180^\circ) = -4$

Operaciones con complejos: Raíces enésimas

La mejor manera es partir del complejo en forma polar, y tener en cuenta que $z = r_\alpha = r_{\alpha + 360^\circ\, k}$ (con $k \in \mathbb{Z}$).
Así,

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha + 360^\circ\, k}{n}} \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots n - 1$$

- Cualquier $z \in \mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces enésimas, cuyos argumentos difieren en $\frac{360^\circ}{n}$.
- Los afijos de las raíces enésimas de cualquier $z \in \mathbb{C}$ forman los vértices de un polígono regular de n lados.

Ejemplo: Raíces sextas de la unidad