IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Global 3ªEvaluación. Tiempo estimado: 60 min

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

- *Asíntotas verticales*

  Hay que estudiar qué ocurre con los límites en $x \to \frac{\pi}{2}$, porque cambia la definición de f, y también qué ocurre con los límites en los puntos en los que se anulan los denominadores.

  - *En* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *la función* $y = \operatorname{tg} x$ *no tiene ceros en el denominador.*
  - *En* $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{5x^3-2x^2}{x^2+x} \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ es asíntota vertical}$$

  - *En* $\left(\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right)$ *el denominador de* $y = \dfrac{5x^3-2x^2}{x^2+x}$ *no se anula, por tanto no encontraremos más asíntotas verticales.*

- *Asíntotas horizontales*

  En este caso solo tiene sentido estudiar el límite cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-2x^2}{x^2+x} = +\infty \Longrightarrow \text{ No hay asíntotas horizontales}$$

- *Asíntotas oblícuas*

  Como en el caso anterior, solo tiene sentido estudiar el límite cuando $x \to +\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3-2x^2}{x(x^2+x)} = 5 \\ \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-5x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x^3-2x^2}{x^2+x} - 5x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-7x^2}{x^2+x}\right) = -7 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$y = 5x - 7 \text{ es asíntota oblícua}$$

Solución del ejercicio 2

Calculamos la derivada segunda de la función:

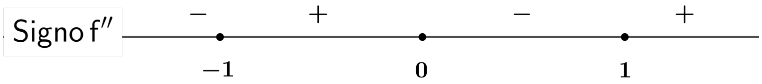
$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 10 \Longrightarrow f'(x) = 15x^4 - 30x^2 \Longrightarrow f''(x) = 60x^3 - 60x$$

Analizamos los cambios de signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 60x^3 - 60x = 0 \Longleftrightarrow 60x(x^2-1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Entendiendo $y = x^2$ como función convexa:

- $f'' < 0$ *en* $(-\infty, -1) \cup (0,1) \implies f$ *cóncava en* $(-\infty, -1) \cup (0,1)$
- $f'' > 0$ *en* $(-1, 0) \cup (1, +\infty) \implies f$ *convexa en* $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
- *Hay tres puntos de inflexión: en $x = 1$, en $x = 0$, y en $x = 1$.*



Solución del ejercicio 3
Conviene expresar $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *y* $\operatorname{sen}(2\alpha)$ *en función de razones trigonométricas de α:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cos\alpha & = & \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right\} \implies 1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \implies \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(1+\cos\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{2\cdot 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha} \implies$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{4\cos\alpha} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$$

Solución del ejercicio 4
Modificamos la expresión de la ecuación utilizando las razones trigonométricas del ángulo suma.

- $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x$
- $1 + \cos(2x) = 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x$

Por tanto:

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos(2x) \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$$

$$\Longleftrightarrow \cos x = 2\cos^2 x \Longleftrightarrow \cos x - 2\cos^2 x = 0 \Longleftrightarrow \cos x(1 - 2\cos x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 2\cos x = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los conjuntos de soluciones:

- $\cos x = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_k = \dfrac{\pi}{2} + 2\,\pi\,k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \\ x'_k = -\dfrac{\pi}{2} + 2\,\pi\,k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $1 - 2\cos x = 0 \Longleftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x''_k = \dfrac{\pi}{3} + 2\,\pi\,k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \\ x'''_k = -\dfrac{\pi}{3} + 2\,\pi\,k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Solución del ejercicio 5

1. *Comprobamos si los lados opuestos son paralelos dos a dos:*

   $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (4,2) \\ \overrightarrow{CD} = (-12,-6) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{CD} = -3\cdot\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$$

   $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (4,8) \\ \overrightarrow{AD} = (-4,4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{AD}$$

   Puesto que los lados AB y CD son paralelos, y BC y AD no lo son, el cuadrilátero es un trapecio.

2. *El área de un trapecio es* $\text{Área} = \dfrac{(Base\,Mayor + base\,menor)altura}{2}$.

   En este caso, la base mayor es $|\overrightarrow{CD}|$, la base menor es $|\overrightarrow{AB}|$, y la altura es la distancia del vértice D al segmento AB

   - *Base menor:* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$
   - *Base mayor:* $|\overrightarrow{CD}| = |-3\overrightarrow{AB}| = 3\cdot|\overrightarrow{AB}| = 6\sqrt{5}$
   - *Altura $d(D,AB)$:*
     - *Sea r la recta que une A y B. Podemos tomar como vector normal a r el vector $\overrightarrow{n_r} = (-1,2)$, (ya que $\overrightarrow{n_r}\cdot\overrightarrow{AB}$=0).*
     - $d(D,AB) = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_r}|}{|\overrightarrow{n_r}|} = \dfrac{|(-4,4)\cdot(-1,2)|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \dfrac{|4+8|}{\sqrt{5}} = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

     Otra forma de obtener la altura es utilizar la fórmula general para calcular la distancia de un punto a una recta. Para ello habría que dar la ecuación general de r:

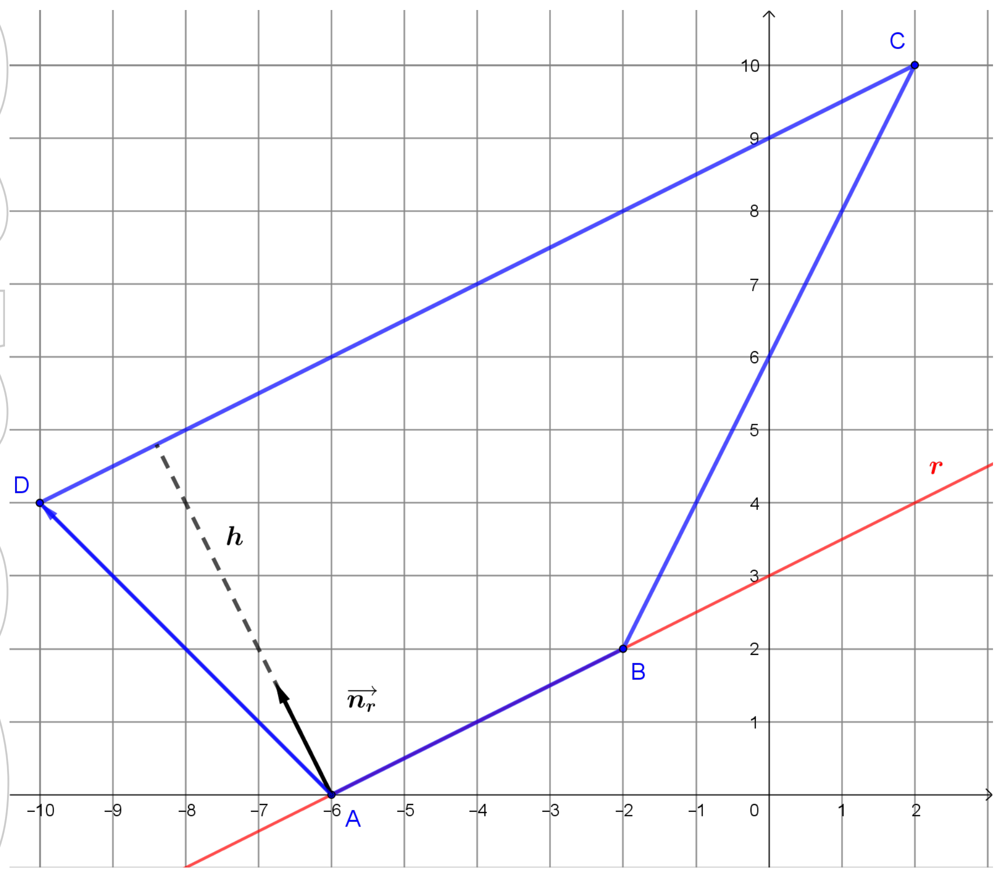
     - *La ecuación general de r será de la forma $-x+2y+c=0$.*
     - *Como $A \in r$, entonces $-(-6)+2\cdot 0 + c = 0 \Longrightarrow c = -6$.*
       Por tanto:

       $$r : -x + 2y - 6 = 0$$

     $$d(D,AB) = \frac{|-(-10)+2\cdot 4 - 6|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

   - *El área del trapecio resulta*

   $$\text{Área} = \frac{(2\sqrt{5}+6\sqrt{5})\cdot\frac{12\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{8\sqrt{5}\cdot\frac{12\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{8\cdot 12}{2} = 48\,u^2$$



Solución del ejercicio 6

a) *El vector director de la recta r es* $\overrightarrow{u_r} = (6,2) = (3,1)$, *con lo cual la pendiente de r es* $m_r = \dfrac{1}{3}$.

Si α es el ángulo que forma r con el eje OX, se verifica que $\operatorname{tg}\alpha = m_r$. *Por tanto:*

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\right) = 18.43°$$

b) *1. Empezamos calculando la ecuación de la recta t perpendicular a r pasando por A.*

Como el vector $\overrightarrow{u_r}$ es perpendicular a t, la ecuación general de t es de la forma $3x + y + c = 0$.

Dado que $A \in t$, entonces $3 \cdot 4 + (-4) + c = 0 \implies 8 + c = 0 \implies c = -8$.

Por tanto la ecuación general de t es:

$$3x + y - 8 = 0$$

2. Calculamos el punto $M = r \cap t$, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de r y t:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-9}{6} = \dfrac{y-1}{2} \\[2ex] 3x + y - 8 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x - 3y - 6 = 0 \\ 3x + y - 8 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y-6=0 \\ 3x+y-8=0 \end{array}\right. \xrightarrow{3F_2\to F_2} \left\{\begin{array}{l} x-3y-6=0 \\ 9x+3y-24=0 \end{array}\right. \xrightarrow{F_1+F_2\to F_2} \left\{\begin{array}{l} x-3y-6=0 \\ 10x-30=0 \end{array}\right.$$

Por tanto, de F_2 se deduce que $x=3$, y sustituyendo en F_1 se obtiene $y=-1$. Es decir:

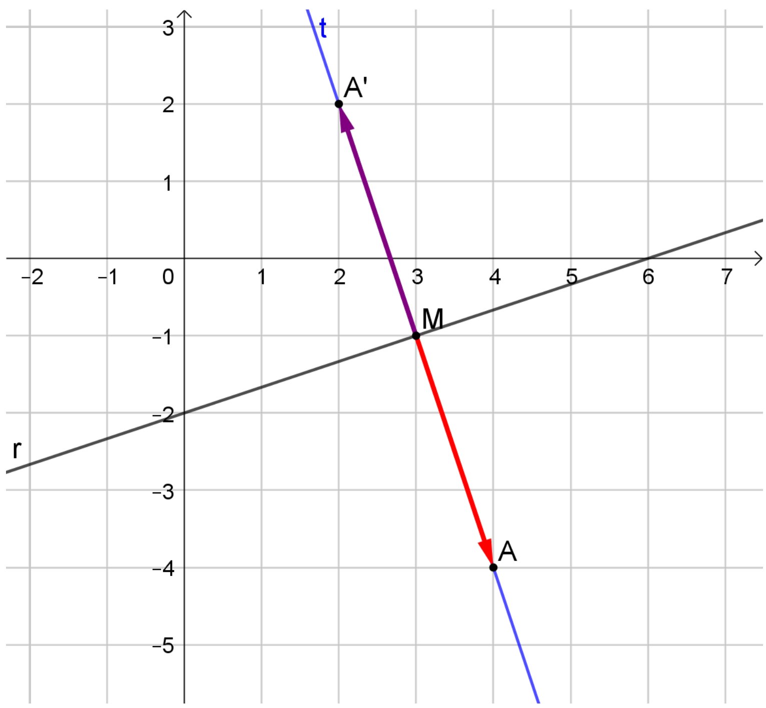
$$M=(3,-1)$$

3. Si $A'=(x',y')$ es el simétrico de A respecto de M, se cumplirá que $\overrightarrow{MA'}=-\overrightarrow{MA}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x'-3=-(4-3) \\ y'-(-1)=-(-4-(-1)) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'-3=-1 \\ y'+1=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'=2 \\ y'=2 \end{array}\right.$$

Por tanto:

$$A'=(2,2)$$



c) *Los puntos de la recta s satisfacen $y=3x-10$, por tanto, las coordenadas de los puntos $P_s\in s$ son $P_s=(s,3s-10)$.*

La ecuación general de r es $r: x-3y-6=0$, por tanto:

$$d(P_s,r)=4\sqrt{10} \iff \frac{|s-3(3s-10)-6|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=4\sqrt{10} \iff |s-9s+30-6|=40$$

$$\iff |-8s+24|=40 \iff \left\{\begin{array}{l} -8s+24=40 \\ -8s+24=-40 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -8s=16 \\ -8s=-64 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} s=-2 \\ s=8 \end{array}\right.$$

Se obtienen los dos puntos siguientes:

- $s=-2 \implies P_s=(-2,3\cdot(-2)-10) \implies P_s=(-2,-16)$
- $s=8 \implies P_s=(8,3\cdot 8-10) \implies P_s=(8,14)$

Solución del ejercicio 7

a) *De la ecuación general de r sabemos que su vector normal es* $\overrightarrow{n_r} = (2, -3)$

De la ecuación continua de s se deduce que su vector director es $\overrightarrow{u_s} = (2, -3) = \overrightarrow{n_r}$.

Dado que $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{n_r}$, *r y s son perpendiculares.*

b) *De la ecuación general de r sabemos que su vector normal es* $\overrightarrow{n_r} = (2, -10) = (1, -5)$, *por tanto, su vector director es* $\overrightarrow{u_r} = (5, 1)$

De la ecuación punto pendiente de s deducimos que su pendiente es $m_s = \dfrac{1}{5}$, *por tanto, su vector director es* $\overrightarrow{u_s} = (5, 1)$

Como $\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{u_s}$, *las rectas son paralelas o coincidentes.*

Se tiene que el punto $P_s = (3, -1) \in s$ *verifica la ecuación de r:*

$$2 \cdot 3 - 10 \cdot (-1) - 16 = 0$$

Por tanto, $P_s \in r$, *y en consecuencia las rectas son coincidentes.*

La distancia no se calcula (sería cero)