IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I. Recuperación de la 2ª Evaluación

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\infty-\infty}=\frac{1}{INDETERMINADO}\implies$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}{x^2-x-(x^2+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}{-x-1}\approx\lim_{x\to+\infty}\frac{x+x}{-x-1}=-2$$

b) $$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=1^{+\infty}=INDETERMINADO\implies$$

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{2x-1-2x+1+1}{2x-1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{2-2x}{2x-1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=$$

$$\lim_{x\to1^+}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2-2x}}\right)^{\frac{2x-1}{2-2x}}\right]^{\frac{2-2x}{2x-1}\cdot\frac{x}{x-1}}=e^{\lim_{x\to1^+}\frac{2-2x}{2x-1}\cdot\frac{x}{x-1}}=e^{\frac{0}{0}}=e^{INDETERMINADO}$$

Resolvemos el límite del exponente de e:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{2-2x}{2x-1}\cdot\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2x^2}{2x^2-3x+1}\overset{L'Hôp.}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{2-4x}{4x-3}=-1$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=e^{-1}$$

Solución del ejercicio 2

a) $$Dom\,f=\left\{x\in\mathbb{R}\;/\quad\frac{x-2}{x+1}>0\right\}=(-\infty,\,-1)\cup(2,\,+\infty)$$

b) *Las posibles asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=2$:*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=\ln\left(\dfrac{-3}{0^-}\right)=\ln(+\infty)=+\infty\\[3ex]\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)\ \textit{No existe (no hay función)}\end{array}\right\}\implies x=-1\ \textit{es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=\ln 0^+=-\infty\\[3ex]\lim\limits_{x\to2^-}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)\ \textit{No existe (no hay función)}\end{array}\right\}\implies x=2\ \textit{es asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal}$$

c) $f'(x) = \dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$

El signo de $f'(x)$ depende solo del signo de $(x-2)(x+1)$:

- $(x-2)(x+1) > 0$ *en* $(-\infty,\ -1)\cup(2,\ +\infty) \Longrightarrow f$ *crece en* $(-\infty,\ -1)\cup(2,\ +\infty)$
- $(x-2)(x+1) < 0$ *en* $(-1,\ 2)$*, pero dicho intervalo no pertenece al dominio de* f

Por tanto, f es una función creciente en todo su dominio.

Solución del ejercicio 3

La función es un cociente de polinomios, por tanto, puede asegurarse la continuidad en todos los puntos del dominio, que en este caso es el conjunto $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Debemos estudiar la continuidad de manera puntual en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{No existe } f(3) \\ \\ \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^+} x+3 = 6 \in \mathbb{R} \\ \\ \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^-} x+3 = 6 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Disc. evitable en } x = 3$$

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, con una discontinuidad evitable en $x = 3$.

Solución del ejercicio 4

a) *Para la continuidad en $x = 1$:*

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 + a \\ \\ \lim\limits_{x\to1^+} (x+b) = 1 + b \\ \\ \lim\limits_{x\to1^-} (x^2 + ax + 1) = 2 + a \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 + a = 1 + b$$

Para la derivabilidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim\limits_{x\to1^-} (2x+a) = 2 + a \\ \\ f'(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim\limits_{x\to1^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 + a = 1$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 2 + a = 1 + b \\ 2 + a = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = -1,\ b = 0$$

b) *Para los valores de a y b obtenidos, la expresión de f es*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad 1 < x < 3 \\ x^2 - 5x & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Como la continuidad es condición necesaria para la derivabilidad, estudiamos la continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = -6 \\ \\ \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 5x) = -6 \in \mathbb{R} \\ \\ \lim\limits_{x \to 3^-} x = 3 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Disc. de salto finito en } x = 3$$

Por tanto, al no ser continua en $x = 3$, ya no es derivable en $x = 3$.

c) *La función es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, y si $x > 3$, $f'(x) = 2x - 5$, así que la pendiente de la recta tangente a la función en $x = 4$ es $f'(4) = 3$.*

Cuando $x = 4$, $f(4) = -4$, con lo que la ecuación de la recta tangente es:

$$\frac{y - f(4)}{x - 4} = f'(4) \Longrightarrow \frac{y + 4}{x - 4} = 3 \Longrightarrow y = 3x - 16$$

Solución del ejercicio 5

a) $f'(x) = \dfrac{-2 \operatorname{sen}(2x) \cdot (x + 1) - 1 \cdot \cos(2x)}{(x + 1)^2} = -\dfrac{2(x + 1) \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)}{(x + 1)^2}$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^{x^3 - 2x} + x(3x^2 - 2)e^{x^3 - 2x} = (3x^3 - 2x + 1)e^{x^3 - 2x}$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2 - 3x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x - 3) = -\dfrac{2x - 3}{2\sqrt{(x^2 - 3x)^3}} = \dfrac{3 - 2x}{2\sqrt{(x^2 - 3x)^3}}$

d) $f'(x) = 2x \operatorname{sen}(2x - 1) + 2(x^2 + 1) \cos(2x - 1)$

Solución del ejercicio 6

Denotando por "x" y "2x" a los lados de la base, e "y" a la altura del paralelepípedo:

- *De la condición de que el volumen sea 27 dm^3 obtenemos $2x^2 y = 27 \Longrightarrow y = \dfrac{27}{2x^2}$.*
- *El área de todas las caras es $2 \cdot 2x \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 2x \cdot y = 4x^2 + 6xy$. Por tanto, la función objetivo es*

$$A(x) = 4x^2 + \frac{81}{x}$$

Derivamos la función objetivo y buscamos sus puntos críticos:

$$A'(x) = 8x - \frac{81}{x^2} = \frac{8x^3 - 81}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \Longleftrightarrow 8x^3 - 81 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}$$

Como $A'(x) < 0$ *en* $\left(-\infty, \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}\right)$, *y* $A'(x) > 0$ *en* $\left(\frac{3\sqrt[3]{3}}{2}, +\infty\right)$, *el valor* $x = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}$ *corresponde efectivamente a un mínimo relativo (que es absoluto en el contexto del problema,* $(0, +\infty)$, *porque* $\lim_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$*)*

Las dimensiones del paralelepípedo son entonces $x = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}$ *dm,* $2x = 3\sqrt[3]{3}$ *dm, e* $y = 2\sqrt[3]{3}$ *dm.*