IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Global 3ª Evaluación. 13-06-2019. Tiempo estimado: 45 min

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

- *Asíntotas horizontales:*
  - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\dfrac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$
  - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x}{x-1} = +\infty \not\in \mathbb{R}$

  Hay una asíntota horizontal de ecuación $y = -\dfrac{\pi}{2}$ *(cuando* $x \to -\infty$*)*

- *Asíntotas verticales:*
  - *En* $(-\infty, 0)$ *no se encontrarán asíntotas verticales, porque* $y = \operatorname{arc\,tg} x$ *no tiene asíntotas verticales.*
  - *En* $x = 0$ *la función* f *cambia su expresión analítica, por eso hay que hacer un estudio puntual por si hubiese una discontinuidad de salto infinito (con lo cual, habría una asíntota de ecuación* $x = 0$*)*

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \operatorname{arc\,tg} x = 0 \in \mathbb{R} \\ \\ \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \dfrac{3x^2+x}{x-1} = 0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ La recta } x=0 \text{ no es asíntota}$$

  - *En* $(0, +\infty)$ *la función* f *está definida como una función racional que presenta un cero en el denominador para* $x = 1$. *Hay que estudiar* $\lim_{x\to1} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to1^-} \dfrac{3x^2+x}{x-1} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \\ \lim_{x\to1^+} \dfrac{3x^2+x}{x-1} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ La recta } x=1 \text{ es asíntota vertical}$$

- *Asíntotas oblícuas: Como en* $x \to -\infty$ *hay una asíntota horizontal, solo hay que buscar asíntotas oblícuas cuando* $x \to +\infty$.

  Si $y = mx + b$ *es la ecuación de la asíntota, deben ser números reales los límites* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, *y* $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = b$.

  - $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x}{x(x-1)} = 3 \in \mathbb{R}$

- $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{x-1} - 3x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-3x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x-1} = 4 \in \mathbb{R}$

Hay una asíntota oblícua de ecuación $y = 3x + 4$ (cuando $x \to +\infty$)

Solución del ejercicio 2

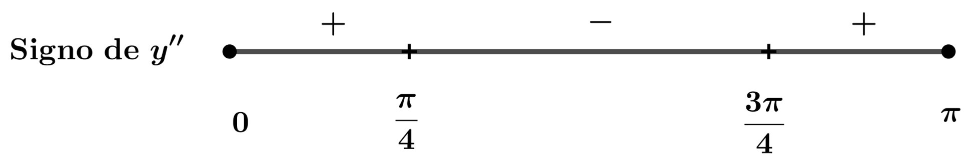
Obtenemos la derivada segunda:

$$y = \operatorname{sen}^2 x \implies y' = 2\,\operatorname{sen}\,x\,\cos\,x = \operatorname{sen}(2x) \implies y'' = 2\,\cos(2x)$$

Buscamos los ceros de y'':

$$y'' = 0 \iff 2\,\cos(2x) = 0 \iff \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\,k \\[2ex] 2x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi\,k \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi\,k \\[2ex] x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi\,k \end{cases}$$

Como $x \in [0,\,\pi]$, los puntos críticos son $x = \dfrac{\pi}{4}$, y $x = \dfrac{3\pi}{4}$



- $y'' > 0$ *en* $\left(0,\,\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(0,\,\dfrac{3\pi}{4}\right) \implies f$ *convexa en* $\left(0,\,\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(0,\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$
- $y'' < 0$ *en* $\left(\dfrac{\pi}{4},\,\dfrac{3\pi}{4}\right) \implies f$ *cóncava en* $\left(\dfrac{\pi}{4},\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$
- *Los puntos de inflexión son* $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ *y* $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$

Solución del ejercicio 3

Conviene expresar $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ en función de razones trigonométricas de α:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \\[2ex] \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\,\alpha \end{aligned}\right\} \implies 2\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \cos\,\alpha$$

Por tanto:

$$2\,\operatorname{tg}\,\alpha\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\,\alpha(1 + \cos\,\alpha) - \operatorname{sen}\,\alpha = \operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{tg}\,\alpha\,\cos\,\alpha - \operatorname{sen}\,\alpha =$$

$$\operatorname{tg}\,\alpha + \frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}\cdot\cos\,\alpha - \operatorname{sen}\,\alpha = \operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{sen}\,\alpha - \operatorname{sen}\,\alpha = \operatorname{tg}\,\alpha$$

Solución del ejercicio 4

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen} x\,\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos x\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x \\[2ex] \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos x\,\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-\operatorname{sen} x\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen} x$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longleftrightarrow \operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_k=\dfrac{\pi}{3}+2\,\pi\,k, \quad k\in\mathbb{Z} \\[2ex] x'_k=\dfrac{2\pi}{3}+2\,\pi\,k, \quad k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Solución del ejercicio 5

a) *Comenzamos calculando las longitudes de los lados, que coinciden con* $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ *y* $|\overrightarrow{AC}|$*:*

- $\overrightarrow{AB}=(0,5)\implies|\overrightarrow{AB}|=5\,u$
- $\overrightarrow{BC}=(6,-2)\implies|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}\,u$
- $\overrightarrow{AC}=(6,3)\implies|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6^2+9^2}=3\sqrt{5}\,u$

Para calcular el valor de los ángulos, podemos utilizar los productos escalares de los anteriores vectores, o el Teorema del Coseno. Si optamos por el Teorema del Coseno:

- $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AC}|\cos\hat{C}\implies 25=40+45-2\cdot2\sqrt{10}\cdot3\sqrt{5}\implies$ $25=85-60\sqrt{2}\cos\hat{C}\implies\cos\hat{C}=\dfrac{60}{60\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\implies\hat{C}=45°$
- $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\hat{A}\implies 40=25+45-2\cdot5\cdot3\sqrt{5}\implies$ $40=70-30\sqrt{5}\cos\hat{A}\implies\cos\hat{A}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\implies\hat{A}=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)=63.44°$
- $\hat{B}=180°-\hat{A}-\hat{C}=71.56°$

b) *Lo más fácil es elegir como altura el lado* AB*, dado que la ecuación de la recta que lo contiene es* $l\ :\ x=1$*, y es trivial que la altura relativa a ese lado es* $d(l,C)=|7-1|=6$*. Por tanto:*

$$\text{Área } ABC=\frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot6}{2}=15\,u^2$$

c) *El vector director de la recta tiene la dirección del vector* $\overrightarrow{AC}=(6,3)$*. Tomaremos el vector proporcional* $\overrightarrow{u_r}=(2,1)$*, y como punto de referencia* A*.*

- *Ecuaciones paramétricas:* $r\ :\ \left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=-1+t\end{array}\right.$

- *Ecuación continua:* $r\ :\ \dfrac{x-1}{2} = y+1$
- *Ecuación general:* $r\ :\ x-2y-3=0$

Para determinar el ángulo α *que forma* r *con el eje* OX*, tenemos en cuenta que la pendiente de* r *es* $m_r = \dfrac{1}{2}$*, por tanto* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2} \implies \alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2} = 26.57^\circ$

d) *En primer lugar, determinamos la ecuación de la recta* s *perpendicular a* r *y que pasa por* B*:*

- *El vector* $\overrightarrow{u_r} = (2,1)$ *será perpendicular a* s*, con lo cual* $s\ :\ 2x+y+c=0$*.*
- *Como* $B \in s$*, entonces* $2\cdot 1 + 4 + c = 0 \implies c = -6$

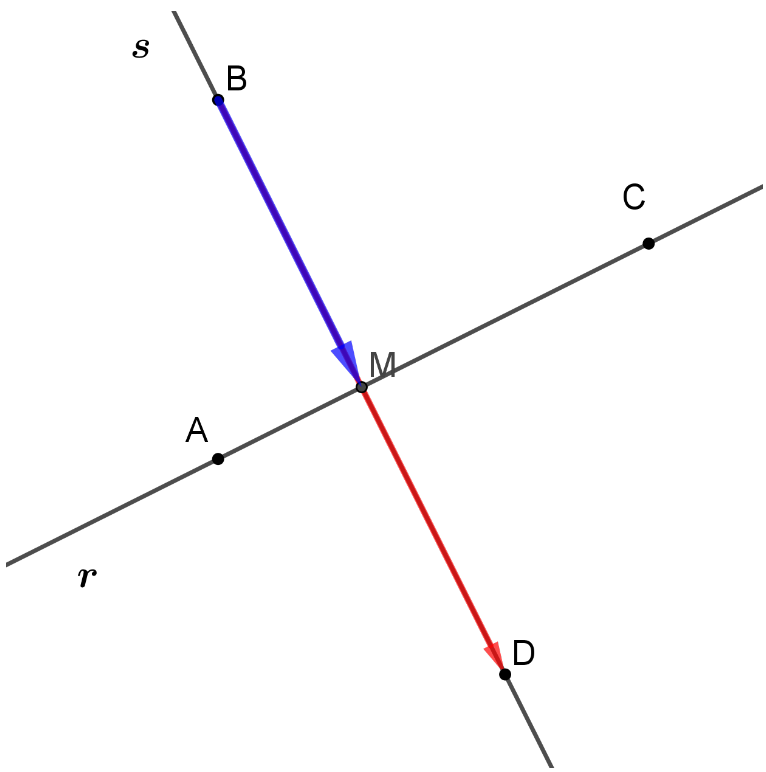
La ecuación de s *resulta* $s\ :\ 2x+y-6=0$*.*
En segundo lugar, calculamos las coordenadas del punto $M = r \cap s$*:*

$$\left.\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ 2x+y-6=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{2\,F_2 \to F_2} \left.\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ 4x+2y-12=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{F_1+F_2 \to F_2} \left.\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ 5x-15=0 \end{array}\right\} \implies$$

$$x=3, y=0 \implies M=(3,0)$$

Finalmente, deducimos las coordenadas de $D=(x_D,y_D)$ *de alguna relación vectorial, como por ejemplo* $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BM}$*:*

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BM} \implies (x_D-1, y_D-4) = 2(2,-4) = (4,-8) \implies D=(x_D,y_D)=(5,-4)$$



Solución del ejercicio 6

a) *El vector normal a r es $\overrightarrow{n_r} = (2, -5)$, con lo que podemos tomar como vector director a r el perpendicular a $\overrightarrow{n_r}$, $\overrightarrow{u_r} = (5, 2)$.*

El vector director de s es $\overrightarrow{u_s} = (2, 5)$.

Como $\overrightarrow{u_r} \neq \lambda \overrightarrow{u_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ no son paralelos. Es decir, r y s son rectas secantes, que se cortan formando un ángulo que deduciremos del ángulo α formado por sus vectores directores:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (5,2) \cdot (2,5) = 20 \\ \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = |\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}| \cos\,\alpha = \sqrt{29} \cdot \sqrt{29}\,\cos\,\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \cos\,\alpha = \frac{20}{29} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{20}{29}$$

$$\alpha = 46.40^\circ$$

b) *El vector director de r es $\overrightarrow{u_r} = (-1, 3)$, y es perpendicular al vector normal de s, $\overrightarrow{n_s} = (6, 2)$ (porque $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{n_s} = -1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 0$). Esto significa que el vector $\overrightarrow{u_r}$ y el vector director de s, $\overrightarrow{u_s}$, tienen la misma dirección. Por tanto, r y s son paralelas, o son coincidentes.*

El punto de r, $P_r = (2, -1)$ no verifica la ecuación de s ($6 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 1 = 9 \neq 0$). Por tanto, r y s son paralelas, y la distancia entre ellas es:

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|6 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{40}} = \frac{9}{2\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{20}$$