RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

Como los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes (sus coordenadas non son proporcionales), existirán únicos escalares α y β verificando $\overrightarrow{w} = \alpha\,\overrightarrow{u} + \beta\,\overrightarrow{v}$.

Es decir:

$$(9,-14) = \alpha\,(1,-2) + \beta\,(-3,4) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} 9 & = & \alpha - 3\,\beta \\ -14 & = & -2\,\alpha + 4\,\beta \end{array} \right.$$

Resolviendo el último sistema (por ejemplo, por reducción):

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 9 & = & \alpha - 3\,\beta \\ -14 & = & -2\,\alpha + 4\,\beta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} 9 & = & \alpha - 3\,\beta \\ -7 & = & -\alpha + 2\,\beta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \beta & = & -2 \\ \alpha & = & 3 \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{w} = 3\,\overrightarrow{u} - 2\,\overrightarrow{v}$$

Solución del ejercicio 2

a) *El vector director de r, $\overrightarrow{v_r}$, tendrá la dirección del vector fijo $\overrightarrow{AC} = (6,2)$.*

Elegimos sin pérdida de generalidad el vector proporcional al anterior, $\overrightarrow{v_r} = (3,1)$, y A como punto de referencia.

Cualquier punto $X = (x,y)$ de la recta, verificará la relación vectorial

$$r : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{v_r}$$

Deducimos de ella las ecuaciones pedidas:

- *Ecuaciones paramétricas*

  De la anterior relación vectorial se obtiene

  $$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2 + 3\,t \\ y & = & 1 + t \end{array} \right.$$

- *Ecuación continua*

  Despejando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas, e igualando se tiene

  $$r : \frac{x+2}{3} = y - 1$$

- *Ecuación general*

  Transformando la ecuación anterior para que todos los términos queden al mismo lado de la igualdad resulta

  $$r : x - 3y + 5 = 0$$

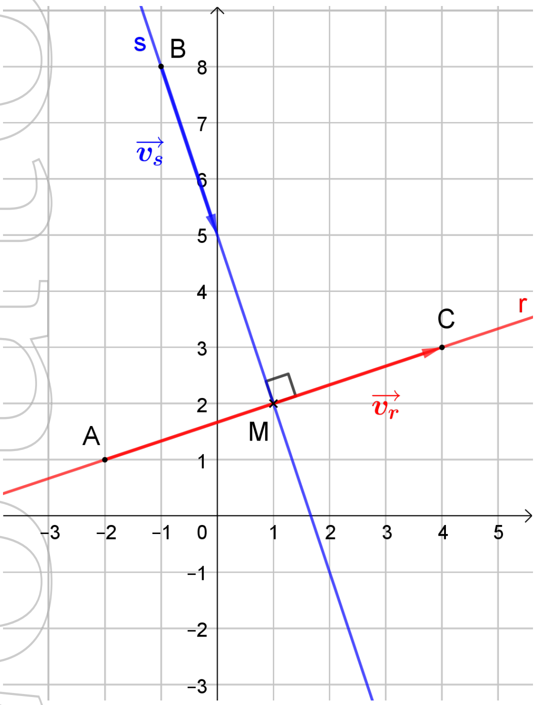

Figura 1: Ejercicio 2b

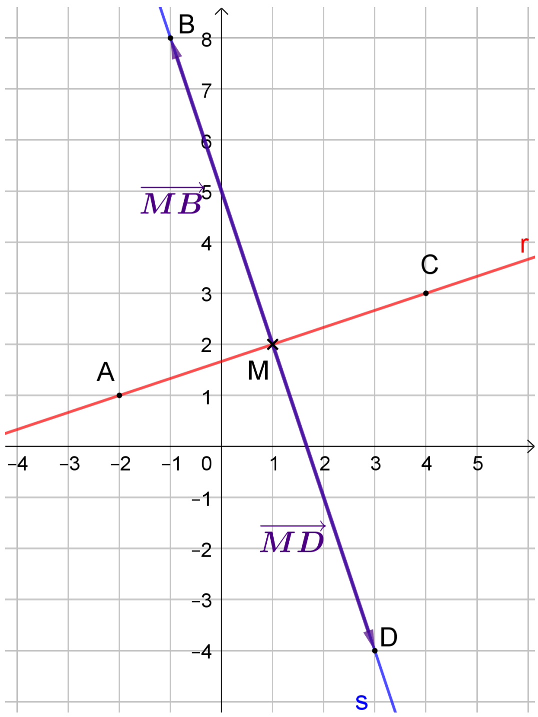

Figura 2: Ejercicio 2b

b) *El punto D estará en la recta s perpendicular a la recta r, y que pasa por B. Además, si M es el punto de intersección de r y s, se cumplirá la relación vectorial $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MB}$ (figuras 1 y 2)*

1º) Damos cualquier ecuación de esta recta s. En este caso, lo más fácil es dar las ecuaciones paramétricas o la ecuación general:

- *Si elegimos dar las ecuaciones paramétricas de s, dado que $r \perp s$, el vector director de s, $\overrightarrow{v_s}$ tendrá que verificar $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0$.*
  Podremos elegir entonces $\overrightarrow{v_s} = (1, -3)$ (cuyas coordenadas también pueden deducirse inmediatamente de la ecuación general de r). Por tanto, la recta s que pasa por B con dirección $\overrightarrow{v_s}$ tiene ecuaciones paramétricas

$$s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 8 - 3t \end{cases}$$

- *Si elegimos dar la ecuación general de s, basta tener en cuenta que el vector $\overrightarrow{v_r}$ es el vector normal a s, con lo cual, la ecuación general es $s : 3x + y + c = 0$.*
  Para determinar c, como B debe verificar dicha ecuación:

$$3 \cdot (-1) + 8 + c = 0 \implies c = -5 \implies s : 3x + y - 5 = 0$$

2º) Calculamos las coordenadas del punto $M = r \cap s$:

- *Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones generales de r y s*

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 9y - 15 = 0 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

  Es decir, $M = (1, 2)$

- *Otra forma de obtener las coordenadas de* M *sería utilizar las ecuaciones paramétricas de* s*. Así:*
  - *Como* $M \in s$, $M = (-1+t, 8-3t)$
  - *Como* $M \in r$, M *verifica la ecuación general de* $r : x - 3y + 5 = 0$, *con lo cual* $-1 + t - 3(8-3t) + 5 = 0 \implies t = 2 \implies M = (1, 2)$

3º) Si $D = (x, y)$, *de la relación* $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MB}$ *se deduce:*

$$(x-1, y-2) = -(-1-1, 8-2) \iff (x-1, y-2) = (2, -6) \iff (x, y) = (3, -4)$$

Por tanto, $D = (3, -4)$

c) *Por construcción, los segmentos* AC *y* BD *son las dos diagonales del cuadrilátero, así que el lado* AD *es opuesto al lado* BC, *y el lado* AB *es opuesto al lado* CD *(figura 3).*

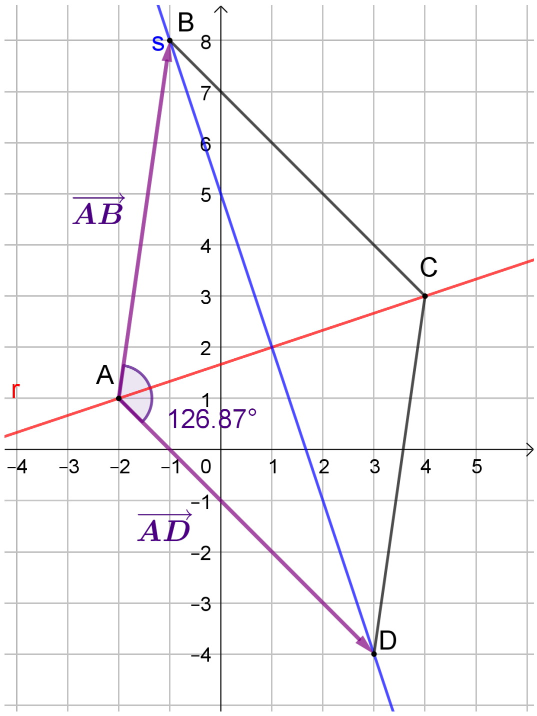

Figura 3: Ejercicio 2c

Empezamos comprobando si hay paralelismo entre lados opuestos, lo que equivale a comprobar si $\overrightarrow{AD}$ *y* $\overrightarrow{BC}$ *son proporcionales, y si* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{CD}$ *son proporcionales:*

$$\overrightarrow{AD} = (5, -5),\ \overrightarrow{BC} = (5, -5) \implies \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \implies AD \parallel BC \text{ y } |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 7),\ \overrightarrow{CD} = (-1, -7) \implies \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} \implies AB \parallel CD \text{ y } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$$

Por tanto, el cuadrilátero es un paralelogramo, con $\hat{A} = \hat{C}$ *y* $\hat{B} = \hat{D}$.

También tenemos que $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{50}$, *de manera que se tratará de un rombo o de un cuadrado. Bastará calcular un ángulo para poder decidir.*

Calculamos por ejemplo el ángulo $\hat{A}$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=(5,-5)\cdot(1,7)=5\cdot 1-5\cdot 7=-30\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{AB}|\ \cos\,\hat{A}=\sqrt{50}\sqrt{50}\cos\,\hat{A}\end{array}\right\}\Longrightarrow\ -30=50\ \cos\,\hat{A}\ \Longrightarrow$$

$$\cos\,\hat{A}=-0.6\ \Longrightarrow\ \hat{A}=\arccos(-0.6)=126.87^\circ$$

Es decir, se trata de un rombo, y en consecuencia $\hat{A}=\hat{C}$ y $\hat{B}=\hat{D}$.

Como los ángulos de un cuadrilátero suman 360°, entonces:

$$\hat{A}=\hat{C}=126.87^\circ$$

$$\hat{B}=\hat{D}=53.13^\circ$$

d) Si P_1 y P_2 son los puntos buscados, se cumplen las relaciones vectoriales siguientes (figuras 4 y 5):

$$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{OP_1}=(-2,1)+\frac{1}{3}\cdot(6,2)=\left(0,\frac{5}{3}\right)\ \Longrightarrow\ P_1=\left(0,\frac{5}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OP_2}=(-2,1)+\frac{2}{3}\cdot(6,2)=\left(2,\frac{7}{3}\right)\ \Longrightarrow\ P_2=\left(2,\frac{7}{3}\right)$$

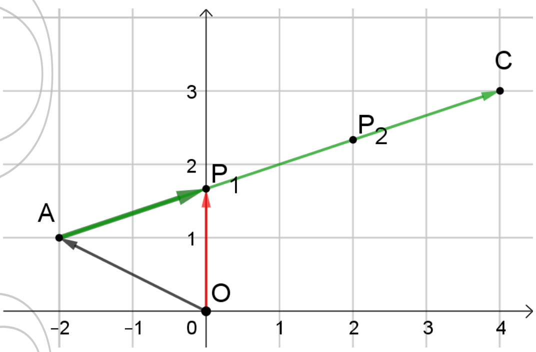

Figura 4: Ejercicio 2d

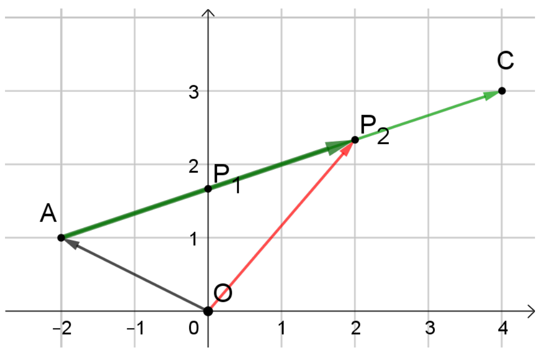

Figura 5: Ejercicio 2d

Solución del ejercicio 3

1º) Si $\overrightarrow{n_s}$ es un vector normal a la recta s, y $A\in s$, la distancia de cualquier punto P a s puede calcularse como

$$d(P,s)=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_s}|}{|\overrightarrow{n_s}|}$$

De la ecuación general de s deducimos que podemos tomar $\overrightarrow{n_s}=(-3,1)$, con módulo $|\overrightarrow{n_s}|=\sqrt{10}$, y $A=(0,1)$

2º) Si $P=(x,y)\in r$, entonces $y=3-x$, con lo que podemos caracterizar a los puntos de r como $P=(t,3-t)$. Por tanto $\overrightarrow{AP}=(t,2-t)$.

Buscamos entonces los puntos $P\in r$ tales que $d(P,s)=\sqrt{10}$:

$$\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_s}|}{|\overrightarrow{n_s}|}=\sqrt{10}\iff\frac{|(t,2-t)\cdot(-3,1)|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\iff|-3t+2-t|=10\iff|-4t+2|=10$$

$$|-4t+2|=10\iff\left\{\begin{array}{l}-4t+2=-10\\-4t+2=10\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}t=3\\t=-2\end{array}\right.$$

Encontramos así dos puntos P_1 y P_2:

- $t=3\implies P_1=(3,0)$
- $t=-2\implies P_2=(-2,5)$

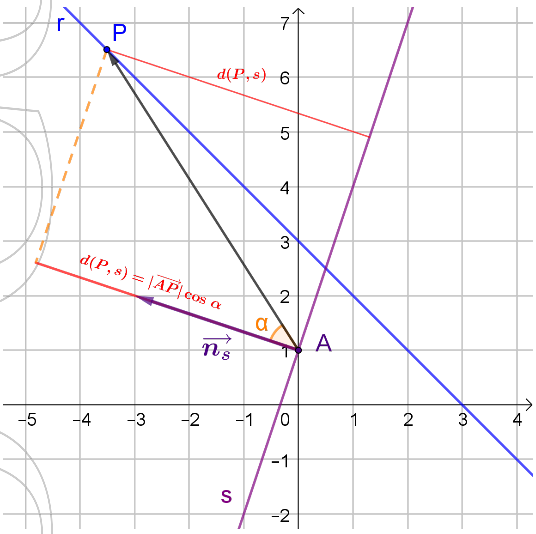

Figura 6: Ejercicio 3

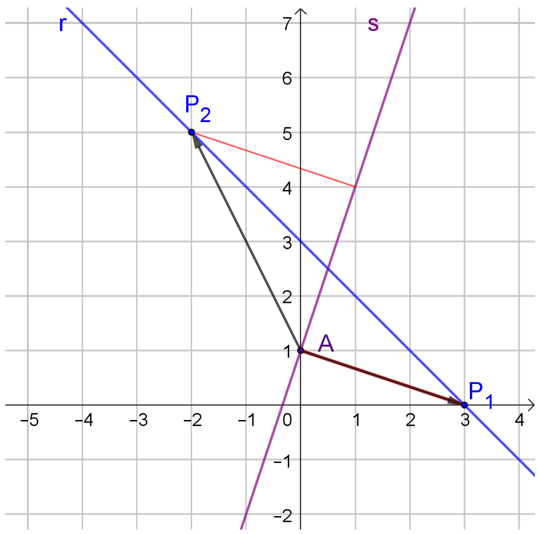

Figura 7: Ejercicio 3

Solución del ejercicio 4

a) Los puntos $P=(x,y)$ de la circunferencia verifican que $d(P,C)=R$, lo que equivale a $|\overrightarrow{CP}|=r$:

$$|\overrightarrow{CP}|=r\iff|(x-4,y-2)|=2\sqrt{5}\iff\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=2\sqrt{5}$$

Es decir:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=20$$

b) El punto $Q=(7,5)$ pertenece a la circunferencia, dado que verifica la ecuación:

$$(8-4)^2+(4-2)^2=20$$

Por tanto, tenemos que encontrar la recta t que pasa por Q y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CQ}$ (una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el centro con el punto de tangencia)

Como $\overrightarrow{CQ} = (4, 2)$, *y queremos que* t *y* $\overrightarrow{CQ}$ *sean perpendiculares, entonces el vector normal a la recta* t *es* $\overrightarrow{CQ}$, *con lo que la ecuación general de* t *va a ser de la forma:*

$$t : 4x + 2y + c = 0$$

El valor de c *se determina teniendo en cuenta que* $Q \in t$, *y por tanto:*

$$3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + c = 0 \implies c = -40$$

Es decir,

$$t : 4x + 2y - 40 = 0$$

O equivalentemente:

$$t : 2x + y - 20 = 0$$

c) *La ecuación explícita de la recta es* $t : y = -2x + 20$, *de donde se deduce que la pendiente de* t *es* $m = -2$.

Si α *es el ángulo que forma* t *con* OX, *se verifica que* $\operatorname{tg} \alpha = m$, *por tanto:*

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(-2) = 116.57°$$

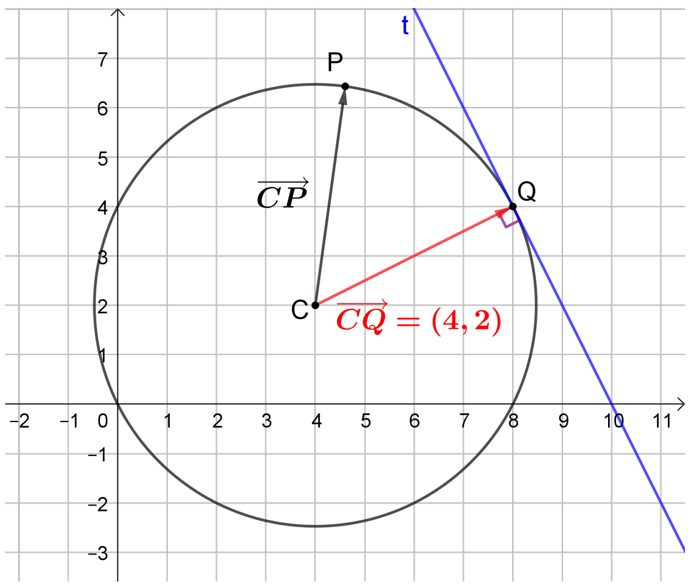

Figura 8: Ejercicio 4

Solución del ejercicio 5

a) *Los vectores directores de* r *y* s *son respectivamente* $\overrightarrow{v_r} = (-1, 2)$ *y* $\overrightarrow{v_s} = (2, -4)$.

Como $\overrightarrow{v_s} = -2\,\overrightarrow{v_r}$, *las rectas tienen la misma dirección, con lo cual son paralelas o coincidentes.*

Elegimos un punto cualquiera de r. *Por ejemplo* $P_r = (2, -3)$.

Resulta que P_r *verifica la ecuación de* s, *ya que* $\dfrac{2+1}{2} = \dfrac{-3-3}{-4}$, *con lo que* $P_r \in s$.

Por tanto, r *y* s *tienen la misma dirección y pasan por el mismo punto. Es decir, son coincidentes.*

b) *El vector director de* r *es* $\overrightarrow{v_r} = (-1, 2)$, *y de la ecuación general de* s *puede deducirse que su vector normal es* $\overrightarrow{n_s} = (1, -2) = -\overrightarrow{v_r}$. *Por tanto, el vector director de* s *tiene que ser perpendicular al vector director de* r.

Es decir, r *y* s *son secantes, y más concretamente, perpendiculares.*

c) *De las ecuaciones generales de ambas rectas puede deducirse que los vectores normales a cada una de ellas son* $\overrightarrow{n_r} = (2, -4)$ *y* $\overrightarrow{n_s} = (1, -2) = \frac{1}{2}\overrightarrow{n_r}$. *Es decir, ambos vectores tienen la misma dirección.*

Si los vectores normales de r *y* s *tienen la misma dirección, entonces sus vectores directores también, por lo que las rectas serán paralelas o coincidentes.*

Elegimos un punto cualquiera de una de ellas, como por ejemplo $P_s = (5, 0) \in s$.

Resulta que P_s *no pertenece a* r, *dado que no verifica su ecuación:* $2 \cdot 0 - 4 \cdot 5 + 1 \neq 0$. *Por tanto,* r *y* s *son paralelas.*

Se cumple que:

$$d(r, s) = d(r, P_s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \overrightarrow{n_r}|}{|\overrightarrow{n_r}|} \qquad \textit{con } P_r \in r$$

Si elegimos $P_r = (1, 0)$, *entonces* $\overrightarrow{P_r P_s} = (4, 0)$ *y* $\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \overrightarrow{n_r} = 8$, *resultando:*

$$d(r, s) = \frac{8}{\sqrt{20}} = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$