IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Primer Parcial. 06-05-2019. Tiempo estimado: 45 min

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) *Asíntotas verticales: Hay que comprobar qué ocurre cuando se anulan los denominadores de las funciones del ejercicio.*

- *Como* $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ *podría tener una asíntota de ecuación* $x = -1$*, comprobamos qué ocurre con el límite* $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$*:*

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2 \in \mathbb{R}$$

  Por tanto, la recta de ecuación $x = -1$ *no es asíntota vertical.*

- *La función* $y = \operatorname{tg} x$ *no está definida en los valores de* $x = \frac{\pi}{2} + \pi\, k,\ k \in \mathbb{Z}$*, y si comprobamos el límite* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$*:*

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{La recta } x = \frac{\pi}{2} \ \textit{ es asíntota vertical}$$

b) *Asíntotas horizontales: Hay que comprobar si el límite* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$*, o el límite* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *es un número real.*

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-1}{x+1} = -\infty \notin \mathbb{R}$*. En consecuencia, a la izquierda de la representación gráfica no existen asíntotas horizontales.*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$.

  Así que, la recta de ecuación $y = \dfrac{\pi}{2}$ *es una asíntota horizontal, que se encuentra a la derecha en la representación gráfica.*

c) *Asíntotas oblicuas: Hay que comprobar si el límite* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$*, o el límite* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *es un número real distinto de cero.*

En este caso, como a la derecha de la representación gráfica hemos encontrado ya una asíntota horizontal, sabemos que no habrá asíntota oblícua cuando $x \to +\infty$*, así que solo comprobaremos el primer límite.*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x(x+1)} = 1 \Longrightarrow m = 1$$

Por tanto, si existe una asíntota oblicua de ecuación $y = mx + n$, tenemos que $m = 1$.

Si existe la asíntota, el límite $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) \overset{m=1}{=} \lim_{x\to-\infty}(f(x) - x)$ sea un número real.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2 - 1 - x(x+1)}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x-1}{x+1}\right) = -1 \Longrightarrow n = -1$$

Es decir, la recta de ecuación $y = x - 1$ es una asíntota oblicua, que se encuentra a la izquierda de la representación gráfica.

Solución del ejercicio 2

a) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(1 - \text{sen } x)\,\text{tg } x = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(1 - \text{sen } x)\cdot\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\text{sen } x - \text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{0}{0} = \textit{IND.}$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\text{sen } x - \text{sen}^2 x}{\cos x} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x - 2\,\text{sen } x\cos x}{-\text{sen } x} = \frac{0 + 2\cdot 0}{1} = 0$$

b) $\lim_{x\to0^+}(1 + \text{tg } x)^{\frac{1}{x}} = 1^{+\infty} = \textit{IND.}$

Es una indeterminación que se puede resolver utilizando el número e:

$$\lim_{x\to0^+}(1 + \text{tg } x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\left(1 + \frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}\right)^{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}\right]^{\frac{\text{sen } x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\text{sen } x}{x\cos x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\textit{IND.}}$$

Calculando el límite del exponente de e,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\text{sen } x}{x\cos x} \overset{\textit{L'Hôp.}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{\cos x + x\,\text{sen } x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to0^+}(1 + \text{tg } x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

Solución del ejercicio 3

a) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen }\alpha\,\text{sen }\beta + \cos\alpha\cos\beta + \text{sen }\alpha\,\text{sen }\beta}{\text{sen }\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen }\beta + \text{sen }\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen }\beta} =$

$= \dfrac{2\cos\alpha\cos\beta}{2\,\text{sen }\alpha\cos\beta} = \dfrac{1}{\text{tg }\alpha}$

b) $\dfrac{2\,\text{sen }\alpha - \text{sen}(2\alpha)}{2\,\text{sen }\alpha + \text{sen}(2\alpha)} = \dfrac{2\,\text{sen }\alpha - 2\cos\alpha\,\text{sen }\alpha}{2\,\text{sen }\alpha + 2\cos\alpha\,\text{sen }\alpha} = \dfrac{2\,\text{sen }\alpha(1 - \cos\alpha)}{2\,\text{sen }\alpha(1 + \cos\alpha)} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

Viendo que tenemos que relacionar esta última expresión con el ángulo mitad, utilizamos que:

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cos\alpha & = & \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \cos\alpha = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{array}$$

Así,

$$\frac{1-\cos\,\alpha}{1+\,\cos\,\alpha}=\frac{2\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\,\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Solución del ejercicio 4
Transformamos la ecuación para dejarla en función de las razones trigonométricas de x:

$$\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2\iff\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\,x-\cos\,x=2\iff\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\,x=2+\cos\,x$$

Elevamos al cuadrado, y utilizamos que $\operatorname{sen}^2\,x=1-\cos^2\,x$*:*

$$3\,\operatorname{sen}^2\,x=4+4\,\cos\,x+\cos^2\,x\iff 3-3\,\cos^2\,x=4+4\,\cos\,x+\cos^2\,x\iff$$

$$4\,\cos^2\,x+4\,\cos\,x+1=0\iff(2\,\cos\,x+1)^2=0\iff 2\,\cos\,x+1=0\iff\cos\,x=-\frac{1}{2}$$

Los ángulos que cumplen la anterior condición están en el segundo y tercer cuadrante:

$$\begin{cases} x_k=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \\ x'_k=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Comprobamos la validez de los dos grupos de soluciones obtenidos:

- *Si* $x_k=\dfrac{2\pi}{3}$*:*

$$\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\implies x_k=\frac{2\pi}{3}\ \textit{es válida}$$

- *Si* $x_k=\dfrac{4\pi}{3}$*:*

$$\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1\neq 2\implies x_k=\frac{4\pi}{3}\ \textit{no es válida}$$

Por tanto, las soluciones son los valores $x_k=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

Solución del ejercicio 5
Utilizamos que $\cos^2\,x-\cos(2x)=\cos^2\,x-(\cos^2\,x-\operatorname{sen}^2\,x)=\operatorname{sen}^2\,x$*, de manera que* $f(x)=\operatorname{sen}^2\,x$

a) $f'(x)=2\,\cos\,x\,\operatorname{sen}\,x$*:*

$$f'(x)=0\iff\cos\,x\,\operatorname{sen}\,x=0\iff x=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi.$$

Como solo tenemos que estudiar el comportamiento de $f(x)$ *en* $[0,\pi]$*, el único punto crítico que nos interesa como posible extremo relativo es* $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Analizando el signo de f' *en* $(0,\,\pi)$*, vemos que:*

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x)>0 \;\; en \;\; \left(0,\,\frac{\pi}{2}\right) \\ \\ f'(x)<0 \;\; en \;\; \left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \;\; crece \;\; en \;\; \left(0,\,\frac{\pi}{2}\right) \\ \\ f \;\; decrece \;\; en \;\; \left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right) \\ \\ Hay\ un\ máximo\ relativo\ en\ x=\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

b) $f''(x) = -2\,\text{sen}^2\,x + 2\,\cos^2\,x = 2(\cos^2\,x - \,\text{sen}^2\,x)$*:*

$$f''(x)=0 \Longleftrightarrow \cos^2\,x - \text{sen}^2\,x = 0 \Longleftrightarrow \cos^2\,x = \,\text{sen}^2\,x \Longleftrightarrow \text{tg}^2\,x = 1 \Longleftrightarrow \text{tg}\,x = \pm 1$$

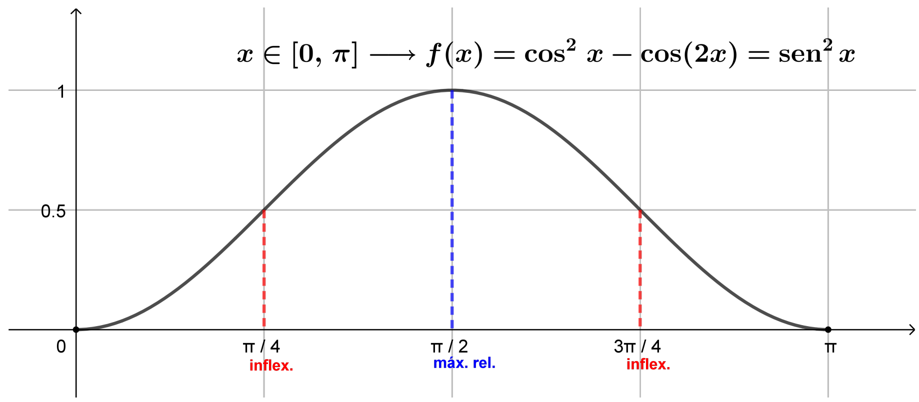
Resolvemos la anterior ecuación en $[0,\,\pi]$*:*

- $\text{tg}\,x = 1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$
- $\text{tg}\,x = -1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$

Analizamos los cambios de signo de $f''(x) = 2(\cos^2\,x - \,\text{sen}^2\,x)$ *en* $[0,\,\pi]$*:*

$$\left\{\begin{array}{l} f''(x)>0 \;\; en \;\; \left(0,\,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\,\pi\right) \\ \\ f''(x)<0 \;\; en \;\; \left(\frac{\pi}{4},\,\frac{3\pi}{4}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \;\; convexa \;\; en \;\; \left(0,\,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\,\pi\right) \\ \\ f \;\; cóncava \;\; en \;\; \left(\frac{\pi}{4},\,\frac{3\pi}{4}\right) \\ \\ Puntos\ de\ inflexión\ en\ x=\frac{\pi}{4},\ \ y\ en\ x=\frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

La representación gráfica de la función, que no se pedía, es la siguiente:



Solución del ejercicio 6

1º) Podemos calcular el lado a mediante el Teorema del Coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\,\hat{A} \Longrightarrow a^2 = 10^2 + 15^2 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot\frac{1}{2} \Longrightarrow a^2 = 175 \Longrightarrow a \approx 13.23\ cm$$

2º) Aplicando el Teorema del Seno, podemos deducir el valor de uno de los ángulos desconocidos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \Longrightarrow \text{sen}\,\hat{B} = \frac{b\,\text{sen}\,\hat{A}}{a} = \frac{10\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{175}} \approx 0.65 \Longrightarrow \hat{B} = \text{arc sen}\,0.65$$

Existen dos ángulos cuyo seno es 0.65*, y son* $40.89°$*, y* $180° - 49.89° = 139.11°$*, pero como el lado a resultó ser el mayor de todos, el ángulo que se le opone,* $\hat{A}$*, también será el mayor, luego todos los ángulos del triángulo son agudos. Por tanto,* $\hat{B} = 49.89°$
3º) El último ángulo se obtiene de que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$*:*

$$\hat{C} = 180° - 60° - 49.11° = 79.11°$$