Trigonometría Plana (II)

Matemáticas II

IES O Couto

curso 2019-2020

Razones del ángulo suma $\alpha + \beta$

Se deducen de la relación entre las expresión en forma polar y trigonométrica de números complejos:

1. $1_\alpha \cdot 1_\beta = 1_{\alpha+\beta} \implies (\cos\ \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)(\cos\ \beta + i\ \text{sen}\ \beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\ \text{sen}(\alpha+\beta)$
2. $(\cos\ \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)(\cos\ \beta + i\ \text{sen}\ \beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta + i\,(\text{sen}\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos\ \alpha\ \text{sen}\ \beta)$

Igualando las partes reales e imaginarias de los resultados obtenidos en (1) y (2), obtenemos:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

De $\text{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$, y dividiendo numerador y denominador por $\cos\ \alpha \cdot \cos\ \beta$, se tiene:

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\ \alpha\ + \text{tg}\ \beta}{1 - \text{tg}\ \alpha\ \text{tg}\ \beta}$$

Razones del ángulo diferencia α - β

Se deducen de las fórmulas para las razones del ángulo suma, teniendo en cuenta que $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, y que $\cos(-\beta) = \cos\ \beta$, $\text{sen}(-\beta) = -\,\text{sen}\ \beta$, y $\text{tg}(-\beta) = -\,\text{tg}\ \beta$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\ \alpha\ \cos\ \beta - \cos\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

De $\text{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$, y dividiendo numerador y denominador por $\cos\ \alpha \cdot \cos\ \beta$, se tiene:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\ \alpha\ - \text{tg}\ \beta}{1 + \text{tg}\ \alpha\ \text{tg}\ \beta}$$

Razones del ángulo doble $2\,\alpha$

Se deducen de las fórmulas para las razones del ángulo suma, teniendo en cuenta que $2\,\alpha = \alpha + \alpha$.

$$\operatorname{sen}(2\,\alpha) = 2\ \operatorname{sen}\ \alpha\ \cos\ \alpha$$

$$\cos(2\,\alpha) = \cos^2\ \alpha\ - \operatorname{sen}^2\ \alpha$$

De $\operatorname{tg}(2\,\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(2\,\alpha)}{\cos(2\,\alpha)}$, y dividiendo numerador y denominador por $\cos^2\ \alpha$, se tiene:

$$\operatorname{tg}(2\,\alpha) = \frac{2\ \operatorname{tg}\ \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\ \alpha}$$

Razones del ángulo mitad

Se deducen de sumar y restar miembro a miembro las dos siguientes identidades:

1. $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$
2. $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\,\alpha$

Restando miembro a miembro $(1) - (2)$:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\,\alpha}{2}$$

Sumando miembro a miembro $(1) + (2)$:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\,\alpha}{2}$$

Dividiendo $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ entre $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\,\alpha}{1+\cos\,\alpha}$$

Transformaciones de sumas en productos

De las razones trigonométricas del ángulo suma, y del ángulo diferencia, pueden encontrarse expresiones para transformar expresiones de tipo

- $\cos\,\hat{A} \pm \cos\,\hat{B}$
- $\text{sen}\,\hat{A} \pm \text{sen}\,\hat{B}$

Ejemplo 1

Transformar $\cos(2x) + \cos(3x)$ en el producto de dos razones trigonométricas

1. $$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha\,\cos\,\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\,\alpha\,\cos\,\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\end{array}\right\} \Longrightarrow$$
   Sumando miembro a miembro
   $$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\,\cos\,\alpha\,\cos\,\beta$$
2. Haciendo $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = 2x \\ \alpha-\beta = 3x\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{5x}{2} \\ \beta = -\frac{x}{2}\end{array}\right\}$
3. Por tanto: $\cos(2x) + \cos(3x) = 2\,\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\,\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\,\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Ejemplo 2

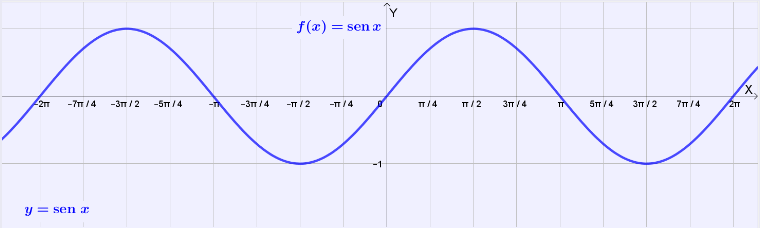
Resolver la ecuación trigonométrica $\operatorname{sen}(80x) - \operatorname{sen}(20x) = 0$

1. Partimos de las fórmulas de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$:
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\,\alpha\,\cos\,\beta + \cos\,\alpha\,\operatorname{sen}\,\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\,\alpha\,\cos\,\beta - \cos\,\alpha\,\operatorname{sen}\,\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
Restando miembro a miembro
$$\Longrightarrow \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\,\cos\,\alpha\,\operatorname{sen}\,\beta$$
2. Haciendo $\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = 80x \\ \alpha-\beta = 20x \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 50x \\ \beta = 30x \end{array}\right\}$
3. Por tanto $\operatorname{sen}(80x) - \operatorname{sen}(20x) = 2\,\cos(50x)\,\operatorname{sen}(20x)$
4. Resolvemos la ecuación equivalente $2\,\cos(50x)\,\operatorname{sen}(20x) = 0$:
$$2\,\cos(50x)\,\operatorname{sen}(20x) = 0 \Longleftrightarrow \cos(50x) = 0 \text{ o } \operatorname{sen}(30x) = 0$$

$$\cos(50x) = 0 \Longleftrightarrow 50x = \tfrac{\pi}{2} \text{ o } \tfrac{3\pi}{2} \Longleftrightarrow x = \tfrac{\pi}{100} + \tfrac{2\pi k}{50}, \text{ o } \tfrac{3\pi}{100} + \tfrac{2\pi k}{50}, \; k \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{sen}(30x) = 0 \Longleftrightarrow 30x = 0 \text{ o } \pi \Longleftrightarrow x = 0 + \tfrac{2\pi k}{30}, \text{ o } \tfrac{\pi}{30} + \tfrac{2\pi k}{30}, \; k \in \mathbb{Z}$$

Función seno

$y = \text{sen } x$



$y = \mathbf{sen}\, x$

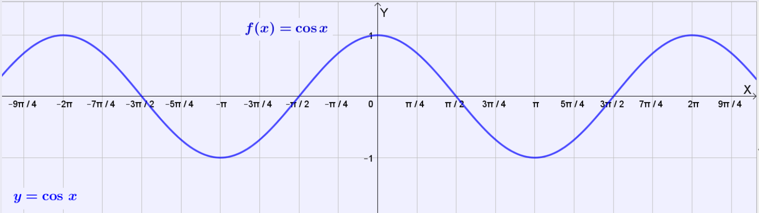
x	$-\pi$	$-5\cdot\frac{\pi}{6}$	$-3\cdot\frac{\pi}{4}$	$-2\cdot\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\cdot\frac{\pi}{3}$	$3\cdot\frac{\pi}{4}$	$5\cdot\frac{\pi}{6}$	π
y	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$Dom\, f = \mathbb{R}$
$Im\, f = [-1, 1]$
f es 2π periódica

-4

Función coseno

$y = \cos x$



$y = \cos x$

x	$-\pi$	$-5\cdot\frac{\pi}{6}$	$-3\cdot\frac{\pi}{4}$	$-2\cdot\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\cdot\frac{\pi}{3}$	$3\cdot\frac{\pi}{4}$	$5\cdot\frac{\pi}{6}$	π
y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$Dom\, f = \mathbb{R}$

$Im\, f = [-1, 1]$

f es 2π periódica

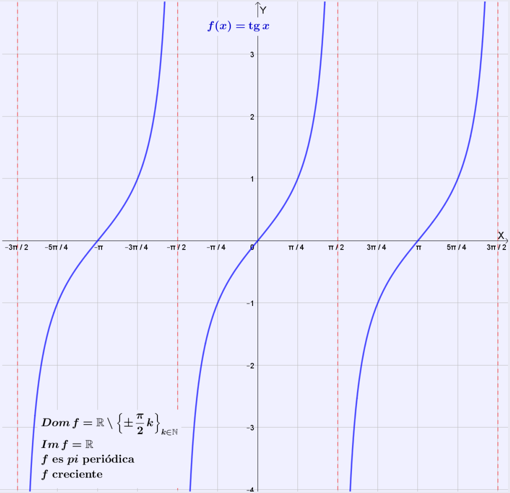
-4

Función tangente

$y = \operatorname{tg} x$

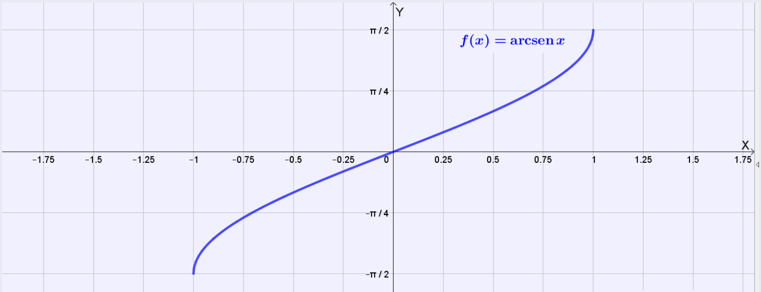
$y = \operatorname{tg} x$

x	y
$-\pi$	0
$-5 \cdot \frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$-3 \cdot \frac{\pi}{4}$	1
$-2 \cdot \frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{2}$	∞
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	∞
$2 \cdot \frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$3 \cdot \frac{\pi}{4}$	-1
$5 \cdot \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	0



Función arcoseno

$y = \operatorname{arc\,sen}\, x$



$y = \operatorname{arcsen}\, x$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

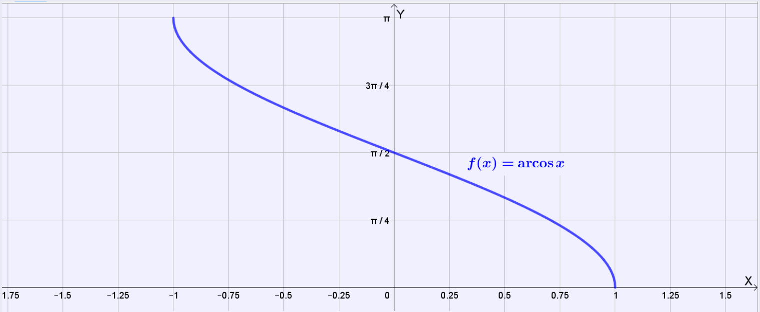
$Dom\, f = [-1, 1]$

$Im\, f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

f es creciente

Función arcocoseno

$y = \text{sen } x$



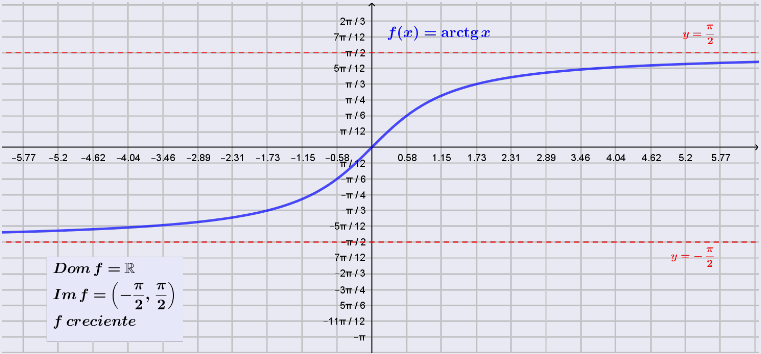
$y = \arcos x$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	π	$5 \cdot \frac{\pi}{6}$	$3 \cdot \frac{\pi}{4}$	$2 \cdot \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$Dom\, f = [-1, 1]$
$Im\, f = [0, \pi]$
f es decreciente

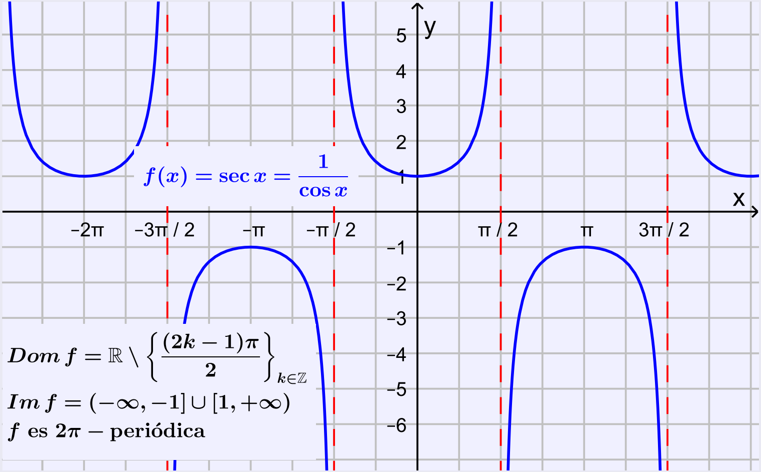
Función arcotangente

$y = \text{sen } x$



Función secante

$y = \sec x$



$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

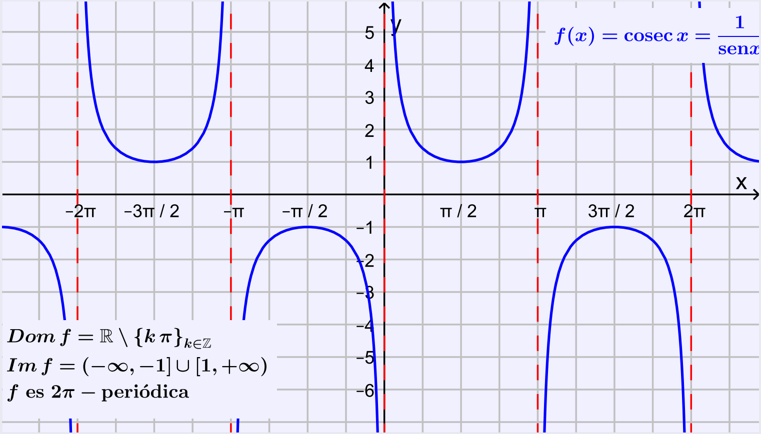
$$Dom\ f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$Im\ f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$f \text{ es } 2\pi - \text{periódica}$$

Función cosecante

$y = \operatorname{cosec} x$



$$f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$Im\, f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

f es 2π − periódica

Función cotangente

$y = \text{cotg } x$