Trigonometría Plana (I)

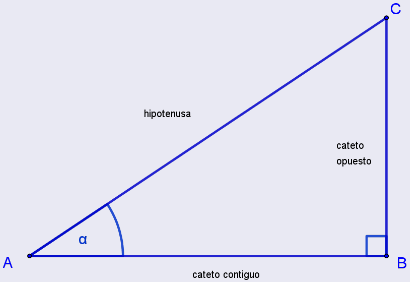
Matemáticas I

IES O Couto

curso 2019-2020

Definición de las razones trigonométricas de un ángulo agulo

Para definir las razones trigonométricas *seno*, *coseno* y *tangente*, de un ángulo agudo α, se considera un triángulo rectángulo de vértices $\Delta\, ABC$, como el de la figura:

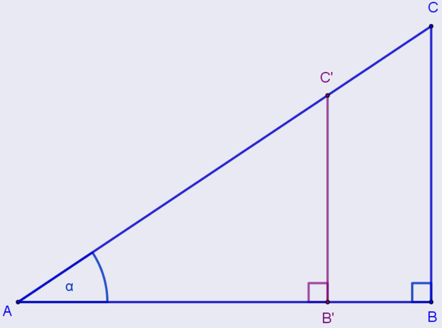


$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cat. contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. contiguo}} = \frac{BC}{AB}$$

Por cuestiones de semejanza de triángulos, las razones trigonométricas de un ángulo agudo son independientes del triángulo rectángulo construido. Solo dependen del valor de α



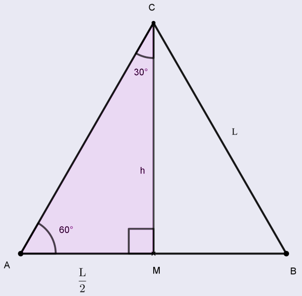
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos\alpha = \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Delta\, ABC \cong \Delta\, AB'C' \implies \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Razones trigonométricas de 60° y 30°



Partimos de un triángulo equilátero de lado L:

1º. Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo $\Delta\, AMC : h = \frac{\sqrt{3}L}{2}$

2º. Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas al ángulo $\hat{A}$:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{\frac{L}{2}} = \sqrt{3}$$

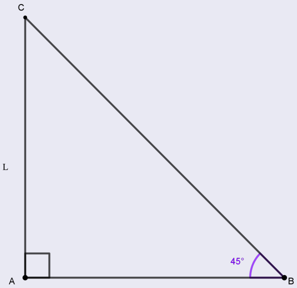
3º. Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas al ángulo $\hat{C}$:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Razones trigonométricas de 45°



Partimos de un triángulo rectángulo isósceles de catetos L:

1º. Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo $\Delta\, ABC : BC = \sqrt{2}$

2º. Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas al ángulo $\hat{B}$:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}\,L} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}\,L} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{L}{L} = 1$$

Secante, cosecante, y cotangente de un ángulo

Otras razones trigonométricas

Para un ángulo α, a partir de su seno, coseno y tangente, se definen las siguientes razones trigonométricas:

- *Secante* de α

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

- *Cosecante* de α

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

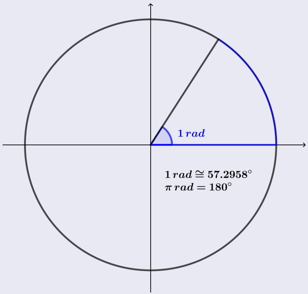
- *Cotangente* de α

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

El radián

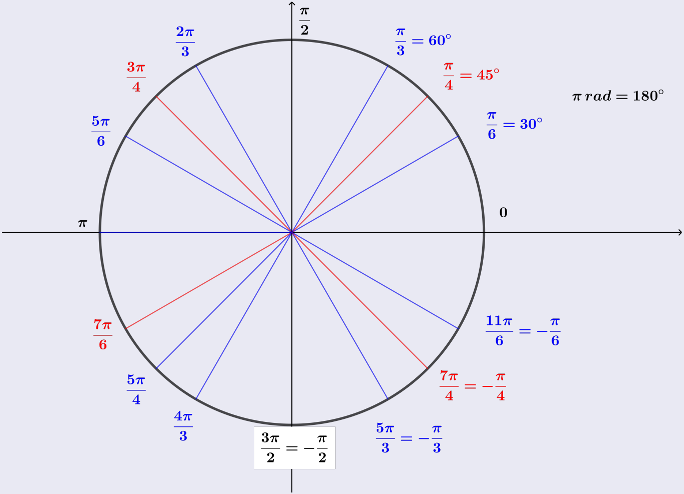
El radián es una unidad de medida de ángulos planos.

- Un radián es el valor de un ángulo que teniendo su vértice en el centro de la circunferencia, abarca sobre esta un arco con la misma longitud que el radio de la circunferencia.



El radián

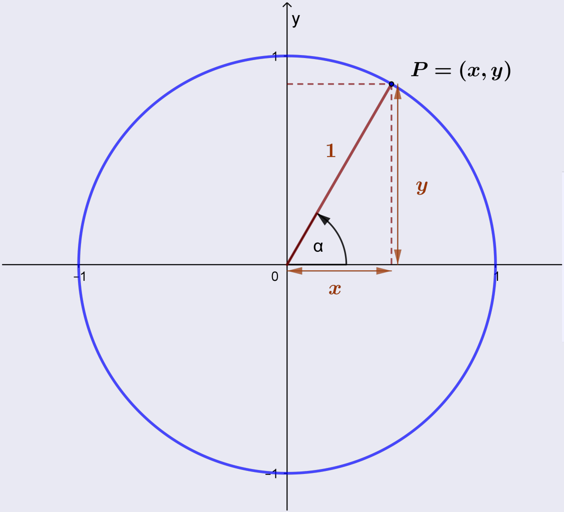
Algunas equivalencias entre grados sexagesimales y radianes



La circunferencia goniométrica

Para definir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, dado que estas no dependen del tamaño del triángulo elegido, se trabaja sobre un triángulo rectángulo de hipotenusa 1:

- Se construye un ángulo α, con vértice el centro de la circunferencia centrada en el origen de coordenadas, y de radio unidad (la circunferencia goniométrica), y delimitado por el sentido positivo del eje OX y el segmento OP.
- Pueden identificarse las razones trigonométricas seno y coseno de α con las coordenadas del punto P
- Esto determina el signo de las razones trigonométricas de un ángulo en función de su amplitud, es decir, del cuadrante al que pertenezca P.

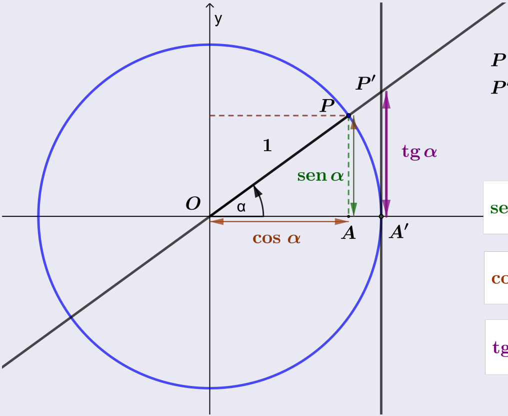


$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Representación visual del seno, coseno y tangente de un ángulo



$$P = (x, y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$
$$P' = (1, y') = (1, \operatorname{tg}\alpha)$$

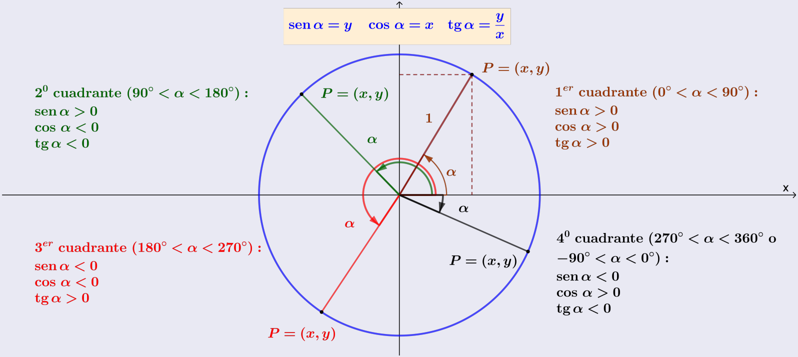
$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{y}{1} = y}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{0A}{OP} = \frac{x}{1} = x}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{A'P'}{OA'} = \frac{y'}{1} = y'}$$

Razones trigonométricas de ángulos de cualquier amplitud

$\operatorname{sen}\alpha = y \quad \cos\alpha = x \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$



1^{er} cuadrante $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$:
$\operatorname{sen}\alpha > 0$
$\cos\alpha > 0$
$\operatorname{tg}\alpha > 0$

2^0 cuadrante $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$:
$\operatorname{sen}\alpha > 0$
$\cos\alpha < 0$
$\operatorname{tg}\alpha < 0$

3^{er} cuadrante $(180^\circ < \alpha < 270^\circ)$:
$\operatorname{sen}\alpha < 0$
$\cos\alpha < 0$
$\operatorname{tg}\alpha > 0$

4^0 cuadrante $(270^\circ < \alpha < 360^\circ$ o $-90^\circ < \alpha < 0^\circ)$:
$\operatorname{sen}\alpha < 0$
$\cos\alpha > 0$
$\operatorname{tg}\alpha < 0$

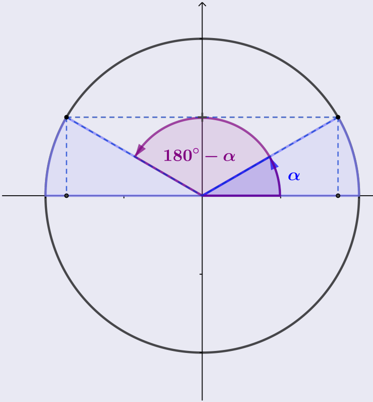
Tabla de las razones trigonométricas más importantes

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$--$	0	$--$	0

Reducción de razones trigonométricas al primer cuadrante

Ángulos suplementarios

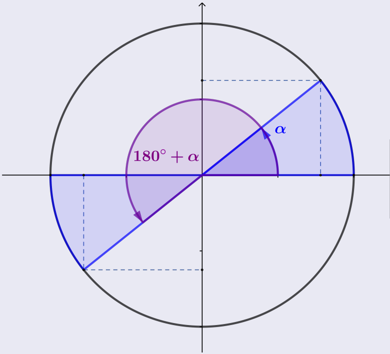
Cualquier ángulo del segundo cuadrante puede relacionarse con uno del primer cuadrante por simetría con respecto al eje OY



$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Ángulos que difieren en 180°

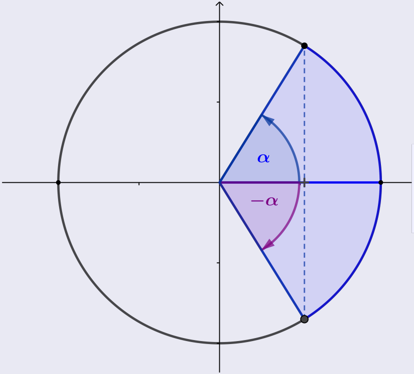
Cualquier ángulo del tercer cuadrante puede relacionarse con uno del primer cuadrante por simetría central con respecto al origen de coordenadas.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ+\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(180^\circ+\alpha) &= -\cos\alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ+\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}$$

Ángulos de signo opuesto

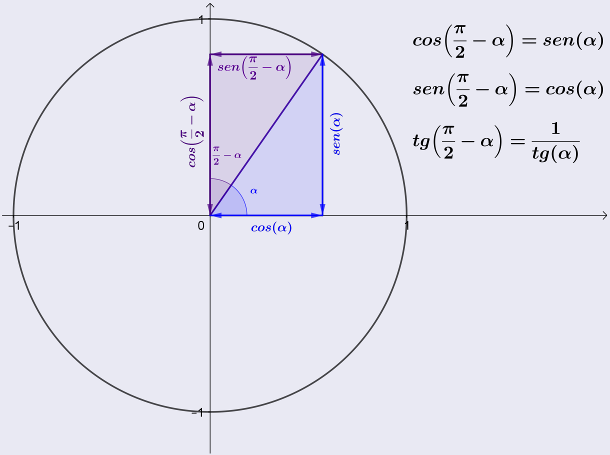
Cualquier ángulo del cuarto cuadrante puede relacionarse con uno del primer cuadrante por simetría con respecto al eje OX.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}$$

Otras relaciones entre ángulos

Ángulos Complementarios

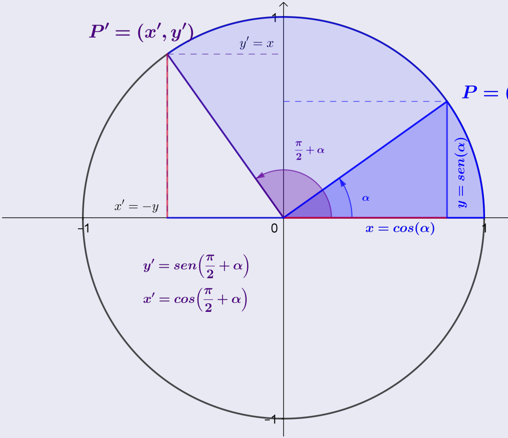


$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sen(\alpha)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cos(\alpha)$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{tg(\alpha)}$$

Ángulos que se diferencian en 90°



$$cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sen(\alpha)$$

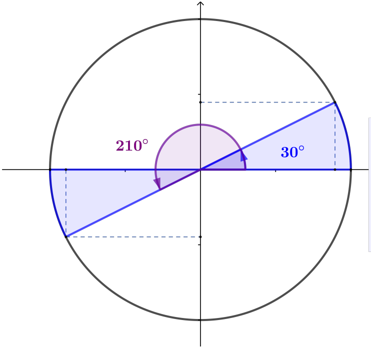
$$sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = cos(\alpha)$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{tg(\alpha)}$$

Ejercicios de aplicación

Ejemplo 1

Calcula las razones trigonométricas de 210°



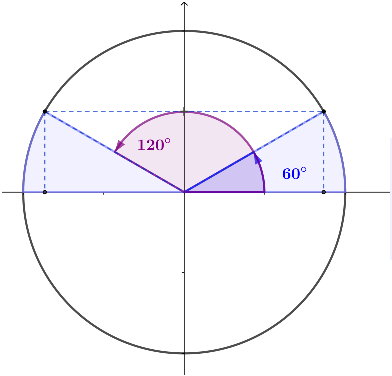
$$\operatorname{sen}(210°) = \operatorname{sen}(180° + 30°) = -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(210°) = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(210°) = \operatorname{tg}(180° + 30°) = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 2

Calcula las razones trigonométricas de 120°



$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 60^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

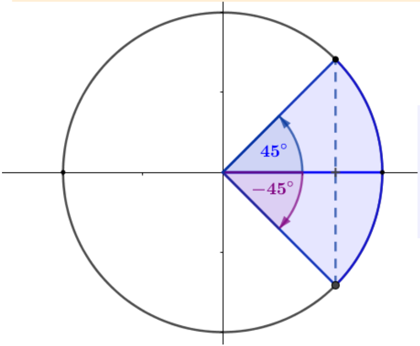
$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Ejemplo 3

Calcula las razones trigonométricas de 675°

1°) $675^\circ = 315^\circ + 360^\circ \cdot 2 \Longrightarrow$ **Las razones trigonométricas de** 675° **coinciden con las razones de** 315°**.**

2°) Los ángulos del cuarto cuadrante pueden medirse en sentido positivo o negativo $\Longrightarrow 315^\circ = 360^\circ - 45^\circ = -45^\circ$



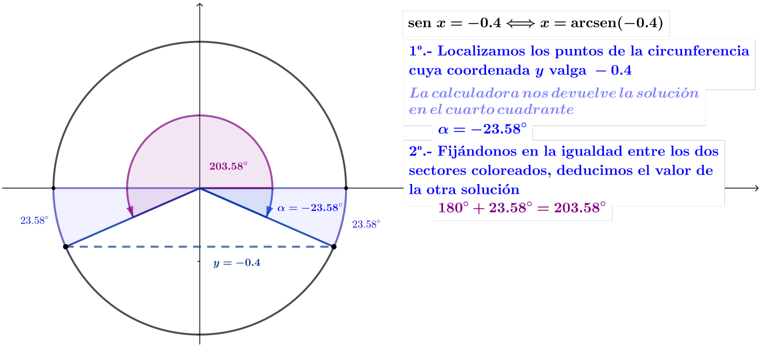
$$\operatorname{sen}(-45^\circ) = -\operatorname{sen}(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg}(45^\circ) = -1$$

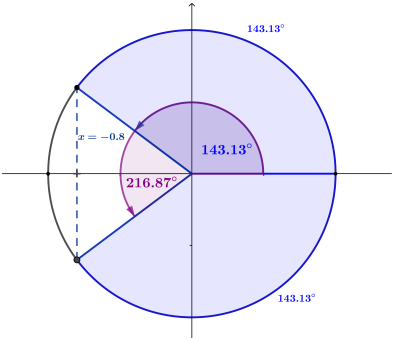
Ejemplo 4

Calcula todos los ángulos que verifican sen $x = -0'4$



Ejemplo 5

Calcula todos los ángulos que verifican $\cos x = -0'8$



$\cos x = -0.8 \iff x = \arccos(-0.8)$

1º.- Localizamos los puntos de la circunferencia cuya coordenada x valga -0.8

La calculadora nos devuelve la solución en el segundo cuadrante :

$\alpha = 143.13°$

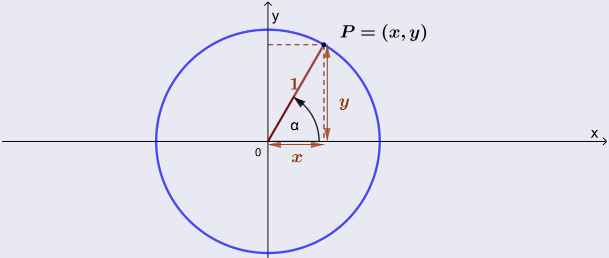
2º.- Fijándonos en la igualdad entre los dos sectores coloreados, deducimos el valor de la otra solución: $\longrightarrow$

$360° - \alpha = 360° - 143.13° = 216.87°$

Fórmula Fundamental de la Trigonometría

Dado que la distancia de cualquier punto de la circunferencia al origen de coordenadas es 1, de las relaciones entre las coordenadas de P y las razones trigonométricas de α se deduce que

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$



$$d(O,P) = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \implies x^2+y^2 = 1 \underset{\substack{x=\cos\alpha \\ y=\operatorname{sen}\alpha}}{\implies} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

Otras fórmulas y propiedades útiles

Las siguientes fórmulas son de uso frecuente en problemas de trigonometría:

- $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$
- $1 + \text{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$, o también $1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$
  (de dividir los dos miembros de la Fórmula Fundamental entre $\cos^2 \alpha$)
- $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$, o también $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cosec}^2 \alpha$
  (de dividir los dos miembros de la Fórmula Fundamental entre $\text{sen}^2 \alpha$)

Como las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia goniométrica están comprendidas entre -1 y 1, para cualquier ángulo α se cumple que:

$$\begin{cases} -1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 6

Calcula el coseno y la tangente de un ángulo del segundo cuadrante cuyo seno vale $\frac{1}{5}$

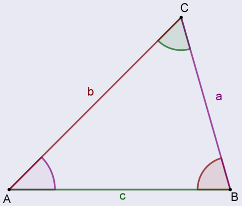
- $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \overset{\text{sen }\alpha=\frac{1}{5}}{\Longrightarrow} \cos^2\alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Longrightarrow cos^2\alpha = \frac{24}{25} \Longrightarrow$ $\cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (Como α está en el segundo cuadrante, cos $\alpha < 0$)
- $\text{tg }\alpha = \dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

Teorema del Coseno

Este teorema relaciona el valor del coseno de un ángulo y el valor de los tres lados de un triángulo.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Es una generalización del Teorema de Pitágoras:
Si el triángulo es rectángulo en A, como $\cos \hat{A} = 0$, se tendrá $a^2 = b^2 + c^2$

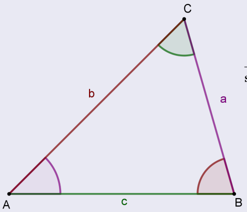


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Teorema del Seno

En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo. Este teorema cuantifica dicha relación

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$



$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Fórmula de Herón

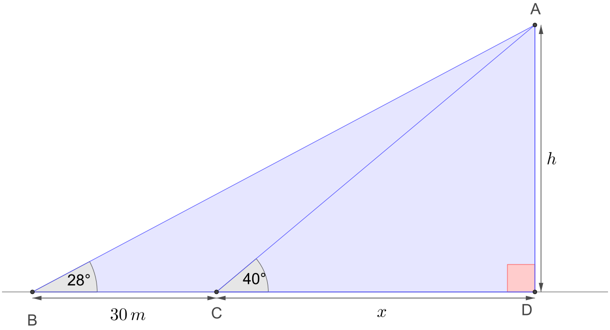
Se utiliza para calcular el área de cualquier triángulo a partir del valor de sus lados.

Si denominamos s al semiperímetro del triángulo, es decir, si $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, se cumple que

$$\text{Área}\ \Delta\, ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Ejemplo 7

Desde un punto del suelo medimos el ángulo bajo el que se ve un edificio, y obtenemos 40°. Nos alejamos 30 metros, y el ángulo ahora es de 28°. Calcula la altura del edificio, y la distancia desde la que se hizo la primera observación



En el triángulo rectángulo $\Delta\, ADB$:

$$tg(28^\circ) = \frac{h}{x+30}$$

En el triángulo rectángulo $\Delta\, ADC$:

$$tg(40^\circ) = \frac{h}{x}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} h = tg\, 28^\circ \cdot (30+x) \\ h = tg\, 40^\circ \cdot x \end{array}\right\} \Longrightarrow tg\, 28^\circ cdot(30+x) = tg\, 40^\circ \cdot x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0'53(30+x) = 0'84x \Longrightarrow x = \frac{15'9}{0'31} = 51'89\, m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h = 0'84 \cdot 51'89 = 43'54\, m$$

Ejemplo 8

En un triángulo $\Delta\, ABC$, conocemos $a = 4\, cm$ y $\widehat{B} = 30^\circ$. Hallar $\widehat{A}$ en los siguientes casos:

a) $b = 1'5\, cm$

b) $b = 2\, cm$

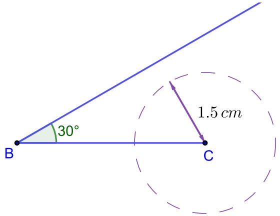
c) $b = 3\, cm$

d) $b = 4\, cm$

Tenemos que aplicar el Teorema del Seno:

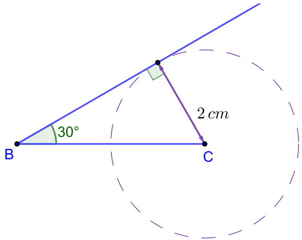
a) $$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \implies \frac{4}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{1'5}{\text{sen } 30^\circ} \implies \text{sen } \widehat{A} = \frac{4 \cdot 0'5}{1'5} = 1,\widehat{3} > 1$$

Por tanto, no existe solución al problema (el lado b proporcionado es demasiado corto).

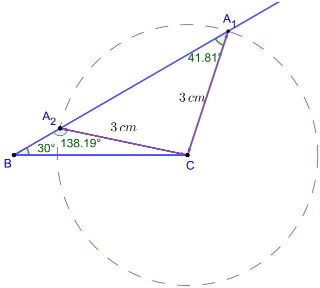


b) $\dfrac{a}{\text{sen }\widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen }\widehat{B}} \Longrightarrow \dfrac{4}{\text{sen }\widehat{A}} = \dfrac{2}{\text{sen }30^\circ} \Longrightarrow \text{sen }\widehat{A} = \dfrac{4 \cdot 0'5}{2} = 1 \Longrightarrow$
$\widehat{A} = 90^\circ$

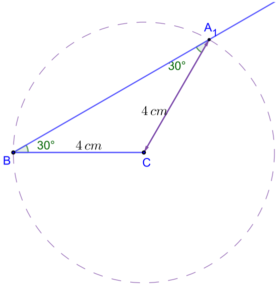
Por tanto, existe una única solución al problema.



c) $\dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \Longrightarrow \dfrac{4}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{3}{\text{sen } 30^\circ} \Longrightarrow \text{sen } \widehat{A} = \dfrac{4 \cdot 0'5}{3} = 0.\widehat{6} \Longrightarrow$
$\widehat{A_1} = 41'81^\circ$, $\widehat{A_2} = 138'19^\circ$
Por tanto, existen dos soluciones al problema (hay que tener en cuenta que $\text{sen } \widehat{A} = \text{sen}(180^\circ - \widehat{A})$).



d) $\dfrac{a}{\text{sen }\widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen }\widehat{B}} \Longrightarrow \dfrac{4}{\text{sen }\widehat{A}} = \dfrac{4}{\text{sen } 30^\circ} \Longrightarrow \text{sen }\widehat{A} = \dfrac{4 \cdot 0'5}{4} = 0.\widehat{6} \Longrightarrow$
$\widehat{A_1} = 30^\circ$, $\widehat{A_2} = 150^\circ$
Por tanto, solo es válida la solución $\widehat{A_1} = 30^\circ$ (ya que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°)



Ejemplo 9

Resuelve el triángulo $\Delta\, ABC$ con $b = 22\, cm$, $a = 7\, cm$, y $\widehat{C} = 40^\circ$

Aplicando el Teorema del Coseno deducimos el valor del lado c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \implies c^2 = 22^2 + 7^2 - 2\cdot 22\cdot 7\cdot\cos 40^\circ$$

$$c^2 = 484 + 49 - 235'94 = 297'06 \implies c = 17'24\, cm$$

Aplicando el Teorema del Coseno a los lados a y b obtendríamos los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$. También podemos encontrarlos utilizando el Teorema del Seno:

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{c} \implies \operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a\operatorname{sen}\widehat{C}}{c} = 0'26 \implies \left\{\begin{array}{l}\widehat{A_1} = 15'07^\circ\\ \widehat{A_2} = 164'93^\circ\end{array}\right.$$

Solo es válida la posibilidad $\widehat{A} = 15'07^\circ$, dado que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°. Además, a mayor ángulo debe oponerse mayor lado, y como el lado a es menor que c, entonces $\widehat{A} < \widehat{C}$.
Finalmente $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 124'93^\circ$

Ejercicios recomendados del libro

Ejercicios de cálculo de razones trigonométricas

- Página 107: 4
- Página 108: 1, 2
- Página 124: 4, 6, 8
- Página 127: 56, 57

Ejercicios de resolución de triángulos y de geometría

- Página 115: 4
- Página 117: 5
- Página 119: 8, 9
- Página 123: 2, 4, 5
- Página 124: 19
- Página 125: 20, 22, 23, 24, 27,28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38
- Página 126: 45, 47, 48