Soluciones

Solución al ejercicio 1

a) $\nexists$ *c)* 3 *e)* $\frac{1}{24}$ *g)* 1 *i)* 1 *k)* e^{-2} *m)* 0

b) 0 *d)* $e^{-\frac{1}{2}}$ *f)* $\frac{1}{2}$ *h)* 2 *j)* $1/2$ *l)* 1 *n)* 2

Solución al ejercicio 2

a) $f^{-1}(x) = \frac{\ln x-3}{2}$ *b)* $(f \circ g)(x) = (x-1)^2\, e^3$ *c)* $(f \circ g)(4) = 9\, e^3$

Observación: La expresión $(f \circ g)(x) = (x-1)^2\, e^3$ es el resultado de aplicar propiedades de logaritmos y exponenciales, pero sólo es válida en el intervalo $(1, +\infty)$ (el dominio de la función g)

Solución al ejercicio 3

a) *Dom* $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. *Asíntota horizontal* $y = 1$, *y asíntota vertical* $x = -1$

b) *Dom* $f = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$. *Asíntota horizontal* $y = 0$, *y asíntotas verticales* $x = 1$, $x = -4$

c) *Dom* $g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. *Asíntotas horizontales* $y = 4$ *e* $y = -4$, *y asíntotas verticales* $x = -2$, $x = 2$

d) *Dom* $h = \mathbb{R}$. *Asíntota horizontal* $y = 0$.

e) *Dom* $f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Asíntota vertical* $x = 0$, *y asíntotas oblícuas* $y = -x - 1$ *(cuando* $x \to +\infty$*), e* $y = x + 1$ *(cuando* $x \to -\infty$*)*

f) *Dom* $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. *Asíntotas verticales de ecuación* $x = 1$ *y* $x = -1$, *y asíntotas oblícuas* $y = 2x$.

Solución al ejercicio 4 $f'(2) = 8$

Solución al ejercicio 5

a) $f'(x) = \dfrac{-17}{(5x-2)(x+3)}$

b) $f'(x) = (2x-5)e^{x^2-5x}\,\mathrm{tg}(3x-1) + e^{x^2-5x}(1 + \mathrm{tg}^2(3x-1))$

c) $f'(x) = \cos(e^{x^2-x} + x)\left((2x-1)e^{x^2-x} + 1\right)$

d) $f'(x) = \dfrac{-x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{2(x^3-2x)\sqrt{x^3-2x}}$

e) $f'(x) = -2x\,\mathrm{sen}(x^2)\,\mathrm{tg}(1-x) - \dfrac{\cos(x^2)}{\cos^2(1-x)}$

f) $f'(x) = 12(2x^4 - x^3)^{11} \cdot (8x^3 - 3x^2)$

g) $f'(x) = \dfrac{(1+\cos x)\sqrt{x^2+e^{2x}} - \frac{1}{2}(x^2+e^{2x})^{-1/2}(2x+2e^{2x})(x+\text{sen } x)}{x^2+e^{2x}} = \ldots =$

$= \dfrac{(1+\cos x)(x^2+e^{2x}) - (x+\text{sen } x)(x+e^{2x})}{(x^2+e^{2x})\sqrt{x^2+e^{2x}}}$

h) $f'(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{\cos^2(x^2-x)\,\text{sen}(x^2-x)(2x-1)}{2}$

Solución al ejercicio 6

a) *Continua en* $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. *En* $x=-5$ *hay una discontinuidad evitable.*

b) *Continua en* $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$. *En* $x=1$ *hay una discontinuidad de salto finito, y en* $x=3$ *hay una discontinuidad de salto infinito.*

Solución al ejercicio 7 *La función no es derivable en* $x=1$ *porque no es continua, y no es derivable en* $x=2$ *porque las derivadas laterales no coinciden.*

Solución al ejercicio 8

a) *La función es continua en* $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. *En* $x=2$ *hay una discontinuidad evitable, y en* $x=-2$ *hay una discontinuidad de salto infinito.*

b) *Hay una asíntota vertical de ecuación* $x=-2$, *y una asíntota oblícua de ecuación* $y=2x$.

Solución al ejercicio 9

a) $a=5$ *y* $b=13$.

b) *La función* f *es derivable en* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. *(En* $x=0$ f *no es derivable por no ser continua)*

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+10x+13 & si \quad x\le -1 \\ 5+\dfrac{1}{(x+2)^2} & si \quad -1\le x<0 \\ 0 & si \quad x>0 \end{cases}$$

c) $y=5x-1$.

Solución al ejercicio 10

a) $a=\dfrac{1}{6}$, $b=-\dfrac{3}{2}$

b) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & si \quad x<3 \\ \frac{1}{x-2} & si \quad x\ge 3 \end{cases}$

Recta tangente en $x=3$: $y-0=1(x-3) \implies y=x-3$

Solución al ejercicio 11

a) *La función f es creciente en $(-\infty,0)\cup(\sqrt[5]{2},+\infty)$, y es decreciente en $(0,\sqrt[5]{2})$.*
Hay un máximo relativo en $x=0$, y un mínimo relativo en $x=\sqrt[5]{2}$.
No hay máximo ni mínimo absoluto.

b) *La función f es creciente en $(-\infty,2)$, y es decreciente en $(2,+\infty)$.*
Hay un máximo relativo en $x=2$, que también es un máximo absoluto.
No hay mínimos relativos ni absoluto.

c) *La función f es creciente en todo su dominio: $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$*
No hay máximos ni mínimos relativos o absolutos.

d) *La función f es creciente en $(0,3)\cup(6,+\infty)$, y es decreciente en $(-\infty,0)\cup(3,6)$.*
Hay un máximo relativo en $x=3$, y dos mínimos relativos en $x=0$ y en $x=6$.
No hay máximo absoluto, pero los mínimos relativos son también absolutos.

Solución al ejercicio 12

a) *f es derivable en $x=0$.*

b) *f no es derivable en $x=0$*

Solución al ejercicio 13

a) *f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$. En $x=0$ tiene una discontinuidad evitable, y en $x=-3$ hay una discontinuidad de salto infinito.*

b) *Hay una asíntota vertical de ecuación $x=-3$, y una asíntota oblícua de ecuación $y=6x-18$*

c) *La función no es derivable en $x=0$ ni en $x=-3$ (y no hay que hacer ninguna comprobación, dado que no es continua en dichos puntos).*

Solución al ejercicio 14

a) *$\operatorname{Dom} f=(-4,2)$. Puntos de corte con el eje OX: $(-1,0)$. Punto de corte con el eje OY: $\left(0,\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. La asíntota verticales son las rectas de ecuación $x=2$ y $x=-4$. La función es decreciente en $(-4,2)$, y no tiene extremos.*

b) $y-0=-\frac{6}{5}(x+1) \implies y=-\frac{6}{5}x-\frac{6}{5}$

Solución al ejercicio 15

a) *f es convexa en $(-\infty,-6)\cup(1,+\infty)$, y cóncava en $(-6,1)$. En $x=-6$ y en $x=1$ hay puntos de inflexión.*

b) *f es convexa en $(-\infty,0)$, y cóncava en $(0,+\infty)$. En $x=0$ hay un punto de inflexión.*

c) *f es cóncava en $(-\infty,0)$, y convexa en $(0,+\infty)$. En $x=0$ hay un punto de inflexión.*

Solución al ejercicio 16

a) *Dom* $f = \mathbb{R}$. *f es continua y derivable en* $\mathbb{R}$.

b) *Puntos de corte con OX:* $(3,0)$. *Punto de corte con OY:* $(0,9)$.

c) *Hay una asíntota horizontal de ecuación* $y = 0$ *(a la izquierda de la gráfica).*

d) *f crece en* $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$, *y decrece en* $(1,3)$.
En $x = 1$ hay un máximo relativo (que no es absoluto porque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*).*

En $x = 3$ hay un mínimo relativo, que es absoluto también porque $f(3) = 0$ y $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

e) *f es convexa en* $\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right) \cup (1+\sqrt{2},+\infty)$, *y cóncava en* $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.
En $x = 1-\sqrt{2}$ y en $x = 1+\sqrt{2}$ hay puntos de inflexión.

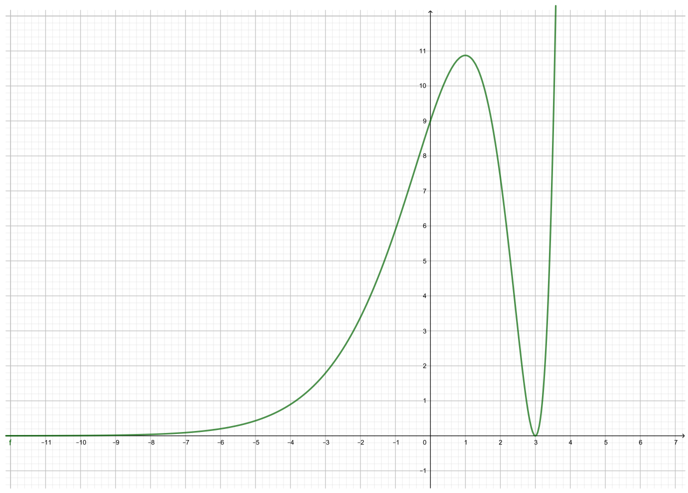

Figura 1: f)

g) $y - 49e^{-4} = 35e^{-4}(x+4)$

Solución al ejercicio 17 *La caja es un cubo de 4 cm de arista.*

Solución al ejercicio 18 $R = 9\sqrt{2}$ *cm*

Solución al ejercicio 19 *La altura de la caja será* $L = 5 - \frac{5\sqrt{3}}{3}$ *cm, y la base de la caja medirá* $20 - 2L = 10 + \frac{10\sqrt{3}}{3}$ *cm por* $10 - 2L = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ *cm.*

Solución al ejercicio 20 *Es un cuadrado de lado* $6\sqrt{2}$ *cm.*

Solución al ejercicio 21 *Los números son 3 y 81*

Solución al ejercicio 22 *Si p es el perímetro del rectángulo, la solución es un cuadrado de lado* $\frac{p}{4}$

Solución al ejercicio 23 *El radio será* $R = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$ *cm, y la altura* $h = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$ *cm*