

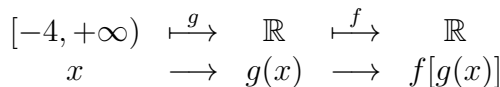
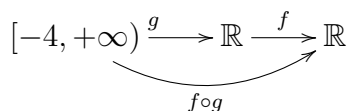
**Solución al ejercicio 1**

- a)  $Dom f = (-\sqrt{2}, 0] \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- b)  $Dom f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- c)  $Dom f = \mathbb{R}$
- d)  $Dom f = (-\infty, -1) \cup (1, 4)$
- e)  $Dom f = [-2, 0) \cup [2, +\infty)$
- f)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- g)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- h)  $Dom f = [1, +\infty)$
- i)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

**Solución al ejercicio 2**

a)  $(f \circ g)(x) = x + 3$

*Observación: En principio, la función  $y = x + 3$  tiene por dominio al conjunto  $\mathbb{R}$ , pero en este caso, debemos tener en cuenta que esta función fue obtenida al componer dos funciones, dándose la circunstancia de que el dominio de  $g$  está restringido al conjunto  $[-4, +\infty)$ . Es decir, la función fue obtenida de la siguiente forma:*



*Por tanto, lo realmente correcto por el contexto del ejercicio, es decir que el dominio del resultado de la composición es  $Dom f \circ g = [-4, +\infty)$*

- b)  $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ,  $Dom (g \circ f) = \mathbb{R}$
- c)  $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2$ ,  $Dom (f \circ f) = \mathbb{R}$
- d)  $(h \circ j)(x) = \ln(e^{x+2} - 1)$ ,  $Dom (h \circ j) = (-2, +\infty)$
- e)  $(j \circ h)(x) = e^{\ln(x-1)+2}$ ,  $Dom (j \circ h) = (1, +\infty)$

*Nota: Puede obtenerse una expresión un poco más simplificada de  $j \circ h$ :*

$$(j \circ h)(x) = e^{\ln(x-1)+2} = e^{\ln(x-1)} \cdot e^2 = (x - 1)e^2$$

*pero dicha simplificación solo sería válida en el dominio  $Dom (j \circ h) = (1, +\infty)$*

f)  $(h \circ f)(x) = \ln(x^2 - 2)$ ,  $Dom (j \circ h) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

**Solución al ejercicio 3**

- a) 5
- b) 4
- c) 5
- d)  $\frac{1}{5}$
- e) 25
- f)  $\frac{\pi}{3}$
- g)  $-\frac{\pi}{4}$
- h)  $\frac{\pi}{4}$
- i)  $\frac{2\pi}{3}$
- j)  $\sqrt{1 - \alpha^2}$
- k)  $\sqrt{1 - \alpha^2}$

**Solución al ejercicio 4**

$$a) f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$d) f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x+1}$$

$$b) f^{-1}(x) = \frac{\ln x - 3}{2}$$

$$e) f^{-1}(x) = \sqrt{10^x + 1}$$

$$c) f^{-1}(x) = \frac{1-3x^2}{x^2}$$

$$f) f^{-1}(x) = \sqrt{-\log_3 x}$$

**Solución al ejercicio 5** (Las representaciones gráficas están en la página 11)

$$a) \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Puntos de corte con el eje OX:  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje OY: No hay ( $0 \notin \text{Dom } f$ )

Asíntotas verticales:  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Asíntotas horizontales:  $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

Discontinuidad de salto infinito en  $x = 0$

$$b) \text{Dom } f = (1, +\infty)$$

Puntos de corte con el eje OX:  $(2, 0)$

Punto de corte con el eje OY: No hay ( $0 \notin \text{Dom } f$ )

Asíntotas verticales:  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

No existe  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

No existe  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

La función es continua en su dominio.

$$c) \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Puntos de corte con el eje OX:  $(3, 0)$

Punto de corte con el eje OY:  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Asíntotas verticales:  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

Asíntotas horizontales:  $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Hay una discontinuidad de salto infinito en  $x = 2$

d) Dom  $f = (-2, +\infty)$

Puntos de corte con el eje OX:  $(-1.9, 0)$

Punto de corte con el eje OY:  $(0, \log 2 + 1)$

Asíntotas verticales:  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

No existe  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

No existe  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

La función es continua en su dominio.

e) Dom  $f = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje OX: No hay

Punto de corte con el eje OY:  $(0, \frac{1}{2})$

Asíntotas verticales: No hay

Asíntotas horizontales:  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

La función es continua.

f) Dom  $f = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje OX: No hay

Punto de corte con el eje OY:  $(0, e^2)$

Asíntotas verticales: No hay

Asíntotas horizontales:  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

La función es continua.

g)  $Dom f = [2, +\infty)$

Puntos de corte con el eje OX:  $(2, 0)$

Punto de corte con el eje OY: No hay  $0 \notin Dom f$

Asíntotas verticales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

No existe  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

No existe  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

La función es continua.

h)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Puntos de corte con el eje OX:  $(-1, 0)$

Punto de corte con el eje OY:  $(0, -1)$

Asíntotas verticales:  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Asíntotas horizontales:  $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Hay una discontinuidad de salto infinito en  $x = 1$

i)  $Dom f = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje OX: No hay

Punto de corte con el eje OY:  $(0, \frac{\pi}{2})$

Asíntotas verticales: No hay

Asíntotas horizontales:  $y = \pi, y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

La función es continua

### Solución al ejercicio 6

a) *Asíntotas verticales:*  $x = \sqrt{2}$ ,  $x = -\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x) &= \text{No existe} \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) &= \text{No existe}\end{aligned}$$

*Asíntotas horizontales:* No hay

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{No existe}$$

*Asíntotas oblicuas:* No hay

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \text{No existe}$$

b) *Asíntotas verticales:*  $x = -3$ ,  $x = 3$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= -\infty & \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \text{No existe} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= +\infty & \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \text{No existe}\end{aligned}$$

*Asíntotas horizontales:*  $y = 2$ ,  $y = -2$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -2\end{aligned}$$

*Asíntotas oblicuas:* No hay (hay horizontales a la izquierda y a la derecha de la gráfica)

c) *Asíntotas verticales:* No hay

*Asíntotas horizontales:* No hay

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

*Asíntotas oblicuas:* No hay

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty\end{aligned}$$

d) *Asíntotas verticales:*  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \text{No hay} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= +\infty & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \text{No hay} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= -\infty & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \text{No hay}\end{aligned}$$

*Asíntotas horizontales:* No hay.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{No hay}$$

*Asíntotas oblicuas:* No hay.

e) *Asíntotas verticales:  $x = 0$*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{2 - \frac{8}{x}} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \text{No hay}$$

*Asíntotas horizontales: No hay*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \text{No existe} \end{aligned}$$

*Asíntotas oblicuas: No hay*

$$\begin{aligned} m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 0x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \text{No existe} \end{aligned}$$

f) *Asíntotas verticales:  $x = 0$*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

*Asíntotas horizontales:  $y = 0$ ,  $y = -1$*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -1 \end{aligned}$$

*Asíntotas oblicuas: No hay.*

g) *Asíntotas verticales:  $x = 1$*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

*Asíntotas horizontales: No hay.*

*Asíntotas oblicuas: No hay.*

h) *Asíntotas verticales: No hay.*

*Asíntotas horizontales: No hay.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{No existe}$$

*Asíntotas oblicuas: No hay*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \text{No existe}$$

i) *Asíntotas verticales:  $x = 1$  y  $x = -1$*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\infty & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$



c)  $Dom f = \mathbb{R}$

En  $x = -1$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x = -1$$

d)  $Dom f = [0, 8]$

En  $x = 4$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x = 4$$

e)  $Dom f = \mathbb{R}$

En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de salto de longitud finita en } x = 0$$

En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 2$$

f)  $Dom f = (-2, +\infty)$

En  $x = 8$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(8) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x = 8$$

### Solución al ejercicio 11

a) Gráfica en página 14

b) En el sexto mes. Las ventas fueron de 32 mil euros.

c) En el noveno mes. Las ventas fueron de 29 millones.

### Solución al ejercicio 12



a)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Como es un cociente de polinomios, hay que estudiar la continuidad puntualmente en los puntos que excluimos del dominio: En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{No existe } f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de salto infinito en } x = 2$$

Asíntotas verticales:  $x = 2$

Asíntotas horizontales:  $y = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

b)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Para estudiar la continuidad en  $x = 0$ , y las posibles asíntotas verticales, hay que saber derivar.

Asíntotas horizontales:  $y = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

c)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Como es un cociente de polinomios, hay que estudiar la continuidad puntualmente en los puntos que excluimos del dominio:

En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{No existe } f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x = 1$$

En  $x = -1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{No existe } f(-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de salto infinito en } x = -1$$

Asíntotas verticales:  $x = -1$

Asíntotas horizontales: No hay

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

d)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

En  $x = -1$ :

No existe  $f(-1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow f$  tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = -1$

En  $x = 1$ :

No existe  $f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow f$  tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 1$

Asíntotas verticales:  $x = 1, x = -1$

Asíntotas horizontales:  $y = 2, y = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

Asíntotas oblicuas: No hay.

e)  $Dom f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

En  $x = 1$ :

No existe  $f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow f$  tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 1$

En  $x = -2$ :

No existe  $f(-2)$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow f$  tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = -2$

Asíntotas verticales:  $x = 1, x = -2$

Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Asíntotas oblicuas:  $y = \frac{1}{2}x - 1, y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \quad n = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = -1$$

f) (Las funciones exponenciales solo están definidas cuando la base es positiva, por tanto, se necesita que  $\frac{x+1}{x-5} > 0$ )

$Dom f = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

La función es continua en su dominio.

Asíntotas verticales:  $x = -1, x = 5$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0^{-\infty} = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \text{No existe}$

$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty^{2/5} = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \text{No existe}$

Asíntotas horizontales:  $y = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$      $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

**Solución al ejercicio 13**

a) -12

b) 16

**Solución al ejercicio 14**

- Es una función continua en  $[0, 2]$
- $p(0)$  y  $p(2)$  tienen signo contrario

Por el Teorema de Bolzano, la función  $y = p(x)$  corta al menos en un punto al eje OX en  $[0, 2]$

**Gráficas de los ejercicios**

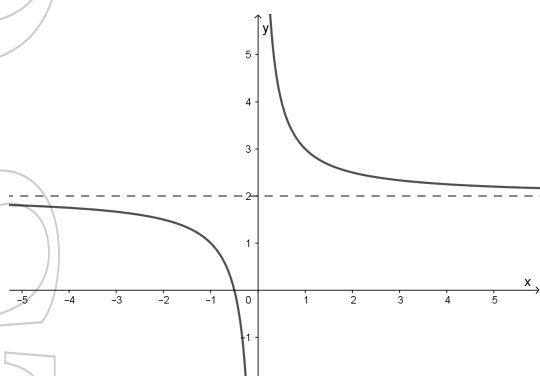


Figura 1: 5a)  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

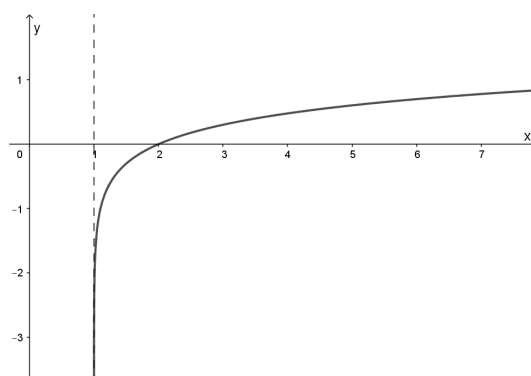


Figura 2: 5b)  $f(x) = \log(x - 1)$

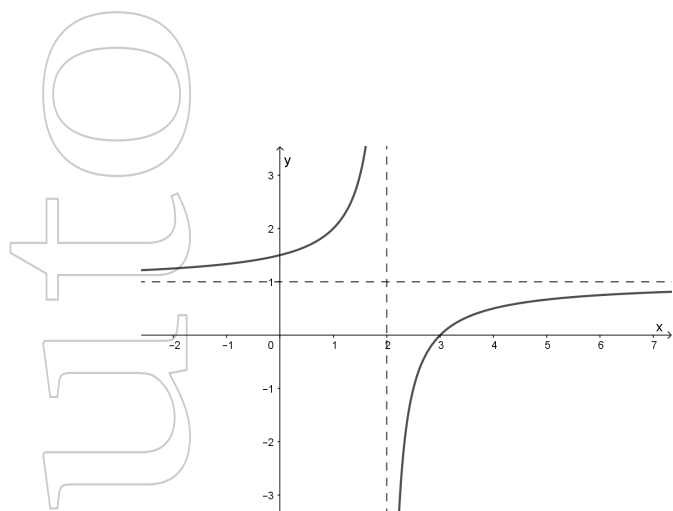


Figura 3: 5c)  $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$

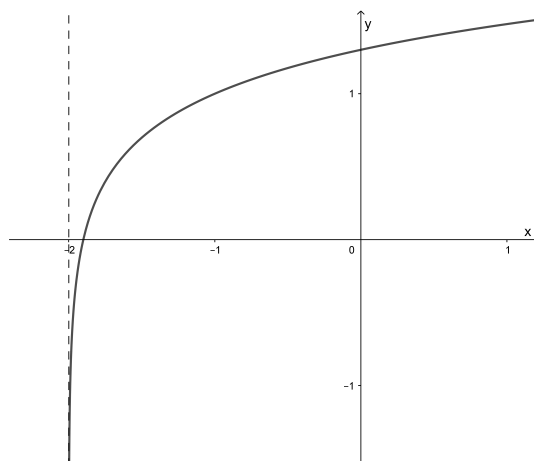


Figura 4: 5d)  $f(x) = \log(x+2) + 1$

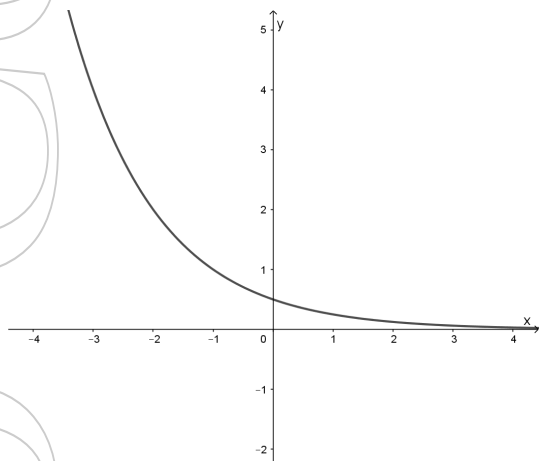


Figura 5: 5e)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

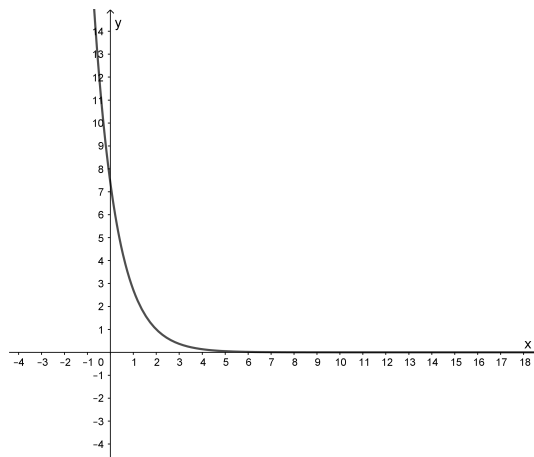


Figura 6: 5f)  $f(x) = e^{-x+2}$

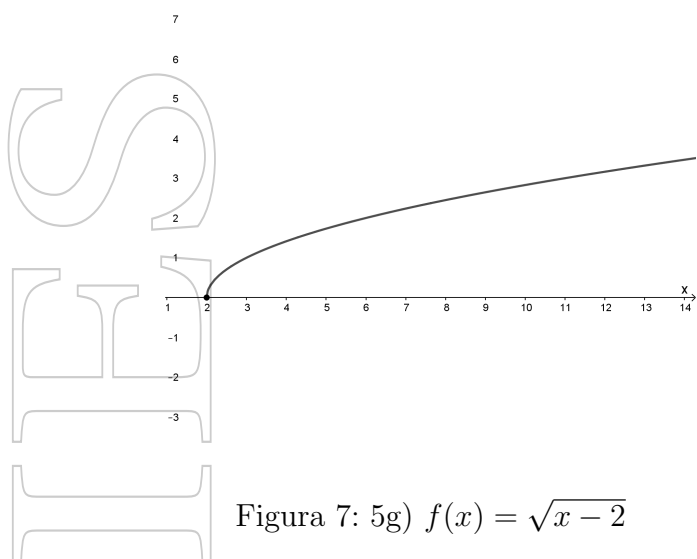


Figura 7: 5g)  $f(x) = \sqrt{x-2}$

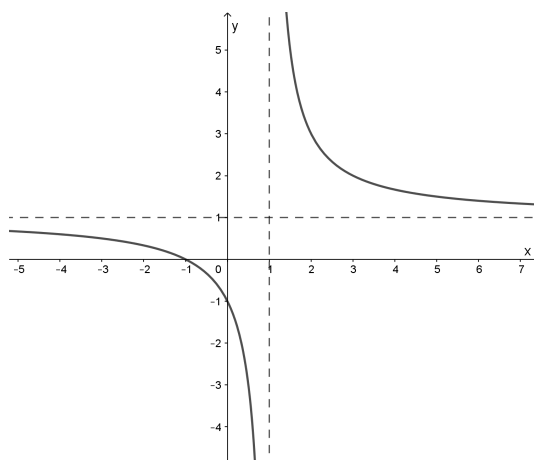


Figura 8: 5h)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

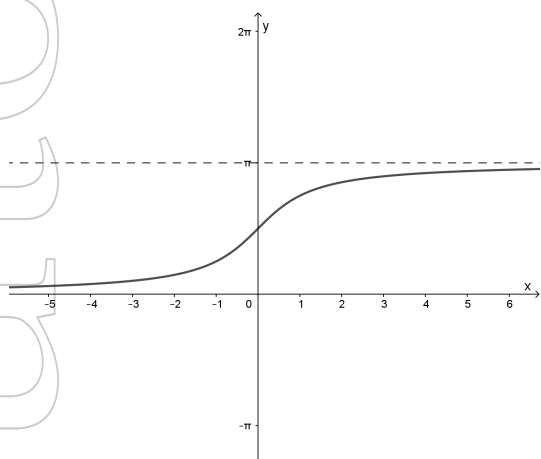


Figura 9: 5i)  $f(x) = \text{arc tg } x + \frac{\pi}{2}$

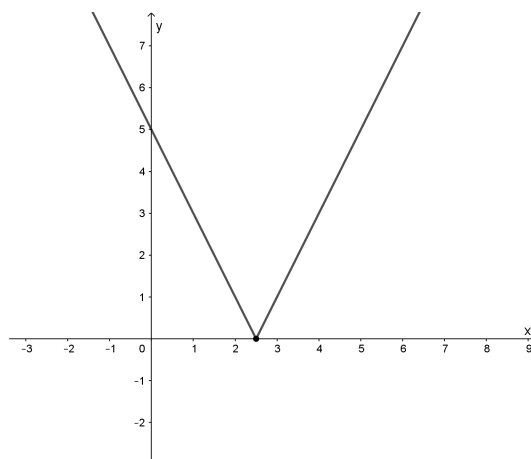


Figura 10: 9a)  $f(x) = |2x - 5|$

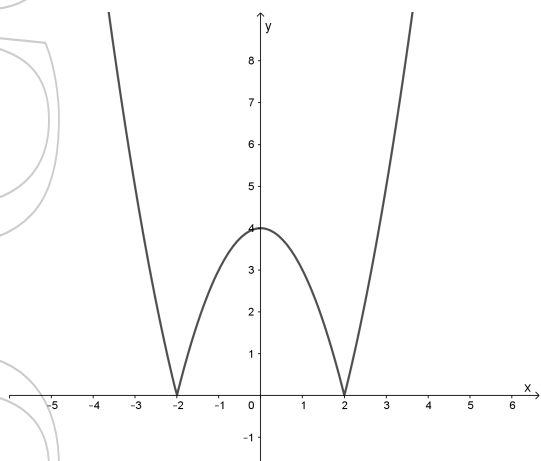


Figura 11: 9b)  $f(x) = |x^2 - 4|$

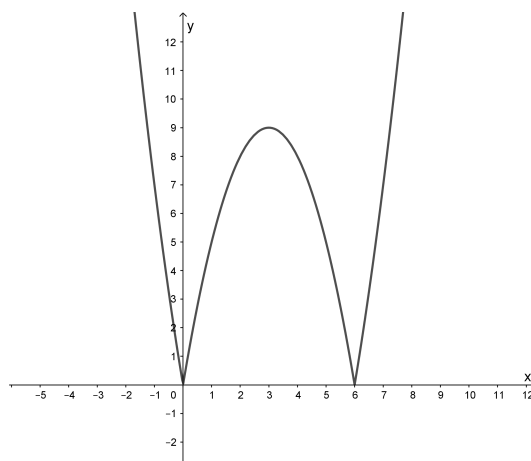


Figura 12: 9c)  $f(x) = |x^2 - 6x|$

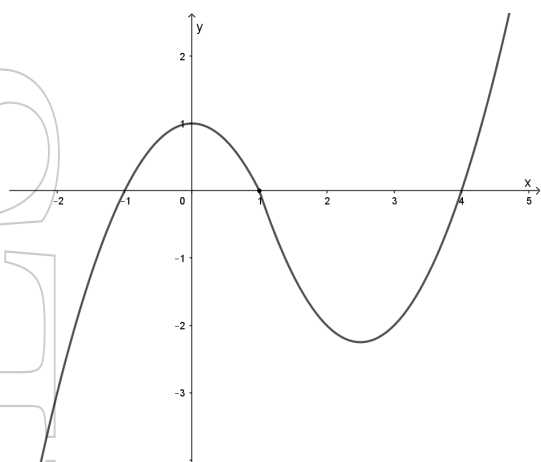


Figura 13: 10a)

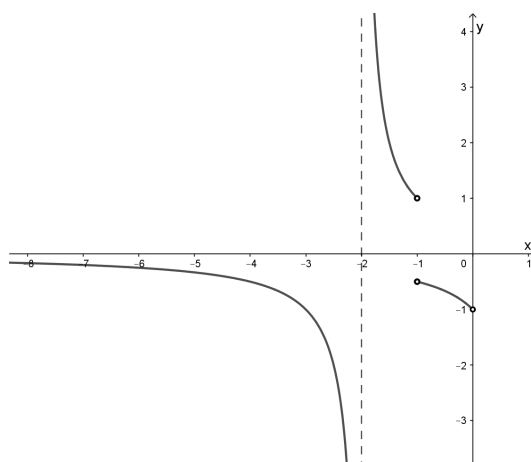


Figura 14: 10b)

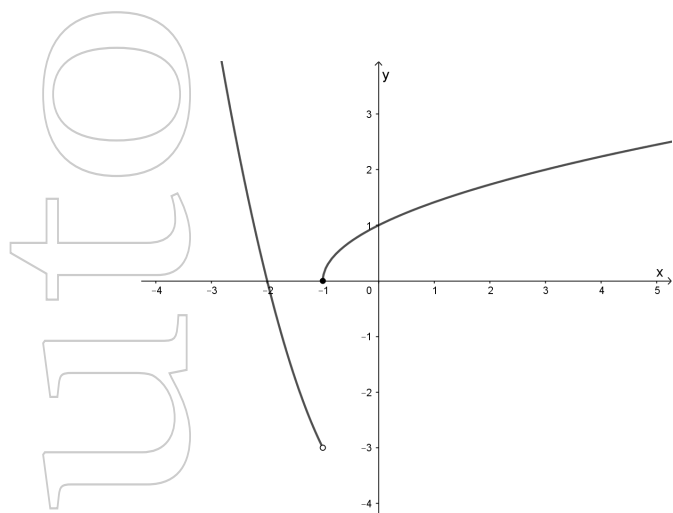


Figura 15: 10c)

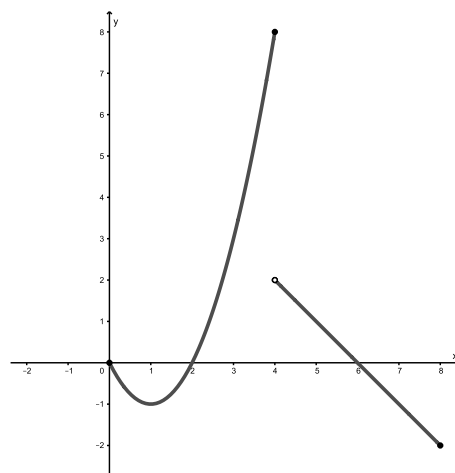


Figura 16: 10d)

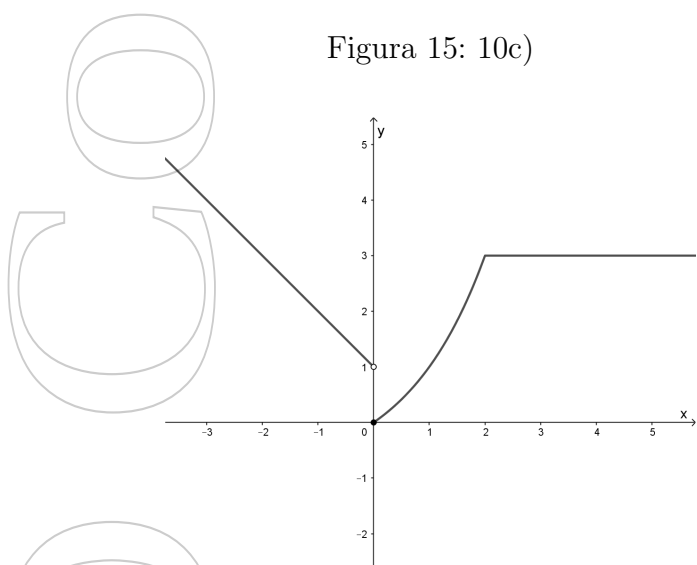


Figura 17: 10e)

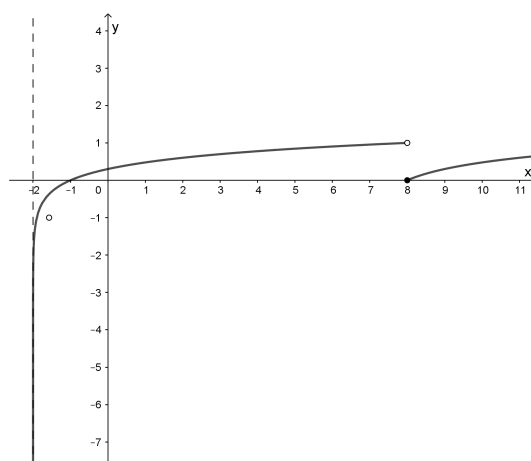


Figura 18: 10f)

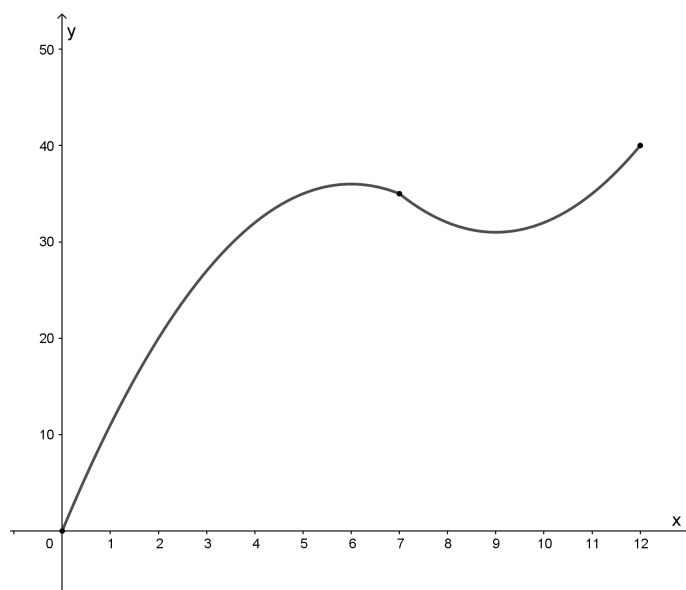


Figura 19: 11)