IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Primer Parcial. 08-02-2019. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-4}} \implies Dom\, f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \dfrac{x-1}{x^2-4}\geq 0\right\}$

Resolvemos la inecuación $\dfrac{x-1}{x^2-4}\geq 0$*:*

- *Estudio del numerador:* $x-1=0 \iff x=1$
- *Estudio del denominador:* $x^4-4=0 \iff x=\pm 2$

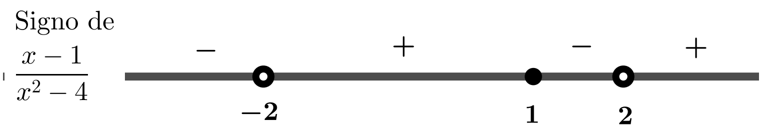

Figura 1: Ejercicio 1a

Por tanto, $Dom\, f=(-2,1]\cup(2,+\infty)$

b) $f(x)=\ln(x^2-x) \implies Dom\, f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2-x>0\}$

Resolvemos la inecuación $x^2-x>0$*:*

$$x^2-x=0 \iff x(x-1)=0 \iff x=0, x=1$$

Figura 2: Ejercicio 1b

Por tanto, $Dom\, f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

Solución del ejercicio 2

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2+2}\right)^{\frac{5x^2+1}{2x-1}} = 1^{+\infty} = \textit{INDETERMINACIÓN (del número e)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2+2}\right)^{\frac{5x^2+1}{2x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2-2+3x}{x^2+2}\right)^{\frac{5x^2+1}{2x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x-2}{x^2+2}\right)^{\frac{5x^2+1}{2x-1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{3x-2}}\right)^{\frac{5x^2+1}{2x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{3x-2}}\right)^{\frac{x^2+2}{3x-2}}\right]^{\frac{3x-2}{x^2+2}\cdot\frac{5x^2+1}{2x-1}} = e^{15/2}$$

b) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{0}{0} = \textit{INDETERMINACIÓN}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}$$

Solución del ejercicio 3

a) $(g\circ f)(x) = g[\ln(x^2+1)] = e^{\ln(x^2+1)+2} = e^{\ln(x^2+1)}\cdot e^2 = (x^2+1)e^2$

b) $y = e^{x+2} \implies \ln y = x+2 \implies x = \ln y - 2 \implies g^{-1}(x) = \ln x - 2$

c) $(g\circ f)(1) = 2e^2$

d) $\lim_{x\to-\infty} e^{x+2} = 0$

Solución del ejercicio 4

a) *Hay que estudiar la continuidad puntualmente en $x=0$ y en $x=3$.*

- *En $x=0$:*
  - $f(0) = 0^2 + 4\cdot 0 = 0$
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+4x = 0$
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+2 = 2$

  Por tanto, hay una discontinuidad de salto finito en $x=0$
- *En $x=3$:*
  - $f(x) = 5$
  - $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x+2 = 5$
  - $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

- *En el resto de los puntos la función es continua.*

b) *Como se trata del cociente de funciones elemententales, será continua en todos los puntos del dominio.*

Al ser $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, hay que hacer un estudio puntual en $x = -5$.

- *En $x = -5$:*
    - *No existe $f(-5)$, $(-5 \notin \text{Dom} f)$*
    - $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5} = \dfrac{0}{0} = \textit{INDETERMINACIÓN}$

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} = \lim_{x \to -5} \frac{(x-5)(x+5)}{x+5} = \lim_{x \to -5} x - 5 = -10 \in \mathbb{R}$$

Por tanto, en $x = -5$ hay una discontinuidad evitable.

Solución del ejercicio 5

- *Asíntotas horizontales:*
    - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x(x-4)} = 2 \in \mathbb{R}$
    - $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x(x-4)} = 2 \in \mathbb{R}$

  Hay una asíntota horizontal de ecuación $y = 2$

- *Asíntotas verticales:*

  Se localizan en valores de $x = a$ tales que

$$\lim_{x \to a} \frac{2x^2 + 1}{x(x-4)} = \infty$$

  Comprobamos los límites de f en $x = 0$ y $x = 4$

    - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{0} \implies \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x^2 + 1}{x(x-4)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x^2 + 1}{x(x-4)} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$
    - $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \dfrac{33}{0} \implies \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2x^2 + 1}{x(x-4)} = \dfrac{33}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{2x^2 + 1}{x(x-4)} = \dfrac{33}{0^-} = -\infty \end{cases}$

  Hay dos asíntotas horizontales, de ecuaciones $x = 0$ y $x = 4$

Solución del ejercicio 6

a) *Seguimos las pautas para la representación gráfica de una parábola:*

- *Cálculo del vértice:*

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ y_v = f(0) = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow V = (0, -1)$$

- *Cálculo del punto de corte con el eje OY:*

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = x^2 - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (0, -1)$$

- *Cálculo de los puntos de corte con el eje OX:*

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x^2 - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow (1, 0) \ y \ (0, -1)$$

- *Completamos un poco más la tabla de valores, y hacemos la representación gráfica (ver figura 3)*

b) *Aprovechando la representación gráfica del apartado anterior:*

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 1 & si \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

c) *Aprovechamos la representación gráfica del apartado a) (ver figura 4)*

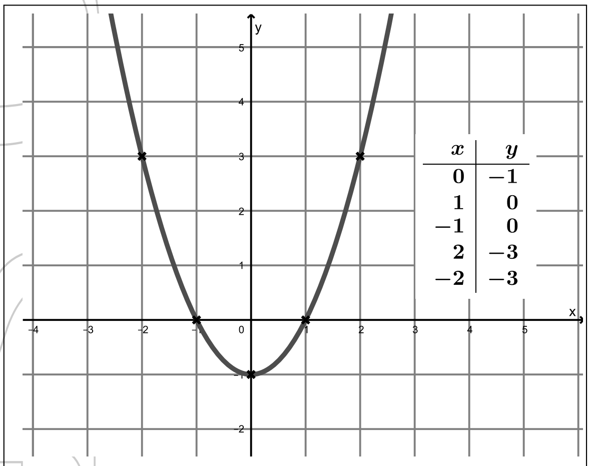

Figura 3: $y = x^2 - 1$

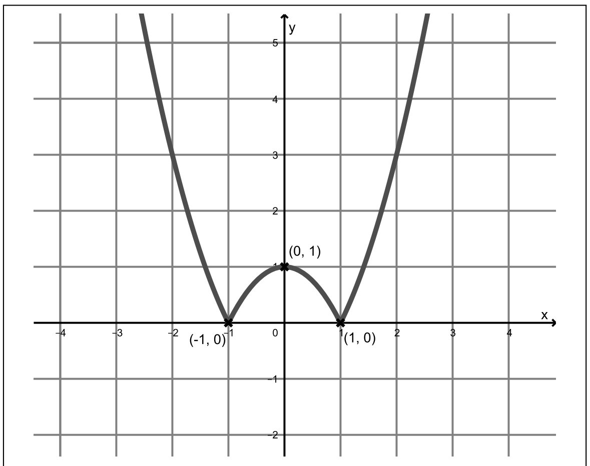

Figura 4: $y = |x^2 - 1|$