IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Global 2ª Evaluación. 14-03-2019. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = +\infty\cdot 0 = INDETERMINADO$$

- *1ª FORMA: Si utilizamos propiedades de logaritmos, podemos resolverlo utilizando el número e.*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = \ln\left(1^{+\infty}\right) = INDETERMINADO$$

Calculamos entonces el límite del interior del logaritmo, L:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = 1^{+\infty} \implies L = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)}{x+1}\right)^{2x}$$

$$\implies L = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-1}}\right)^{\frac{x+1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{x+1}\cdot 2x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2} \implies L = e^{-2}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = \ln\, L = \ln e^{-2} = -2$$

- *2ª FORMA: Podemos intentar reducir el límite a una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ o de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, para aplicar L'Hôpital.*

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{2x}} = \frac{0}{0} = INDETERMINADO$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{2x}} \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x^2}{x(x+1)} = -2$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -2$$

Solución del ejercicio 2

a) Puesto que se trata de operaciones elementales con funciones elementales, f es continua en todo su dominio. Habría que estudiar la continuidad de manera puntual en los puntos que no sean del dominio.

Se tiene que $Dom\, f = \{x\in\mathbb{R} \;/\; x^2-2x\neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. Entonces:

- *En* $x = 0$
  - *No existe* $f(0)$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-3 + \dfrac{2x}{x(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-3 + \dfrac{2}{x-2}\right) = -4 \in \mathbb{R}$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-3 + \dfrac{2x}{x(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-3 + \dfrac{2}{x-2}\right) = -4 \in \mathbb{R}$

  Por tanto, hay una discontinuidad evitable en $x = 0$.
- *En* $x = 2$
  - *No existe* $f(2)$
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(-3 + \dfrac{2x}{x(x-2)}\right) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(-3 + \dfrac{2x}{x(x-2)}\right) = +\infty$

  Por tanto, hay una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.

Es decir, f *es continua en* $\mathbb{R} \setminus \{0,\, 2\}$

b) *En el apartado anterior, demostramos que* $x = 2$ *es la asíntota vertical.*

Para la búsqueda de asíntotas horizontales, hay que comprobar si alguno de los límites cuando $x \to +\infty$, *o cuando* $x \to -\infty$, *es un número real:*

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-3 + \dfrac{2x}{x(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(-3 + \dfrac{2x}{x(x-2)}\right) = -3$, *entonces* $y = -3$ *es la asíntota horizontal.*

c) *La recta pasa por el punto* $(1, f(1)) = (1, -5)$, *y tiene pendiente* $f'(1)$.

Calculamos la función derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x^2-2x) - (2x-2)2x}{(x^2-2x)^2} = \frac{-2x^2}{(x^2-2x)^2} \implies f'(1) = -2$$

Por tanto, la recta tangente tiene por ecuación:

$$\frac{y-(-5)}{x-1} = -2 \implies y + 5 = -2(x-1) \implies y = -2x - 3$$

Solución del ejercicio 3

a) *Para que la función sea continua en* $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 1 - b + 8 = 9 - b \\[2ex] \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2 + bx + 8) = 1 - b + 8 = 9 - b \\[2ex] \lim\limits_{x\to -1^+} (ax^3 + b) = -a + b \end{array}\right\} \implies -a + b = 9 - b \implies a = 2b - 9$$

Para que la función sea derivable en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\overset{L'Hôp.}{=}\lim\limits_{x\to -1^-}(2x+b)=-2+b \\[2ex] f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\overset{L'Hôp.}{=}\lim\limits_{x\to -1^+}3ax^2=3a \end{array}\right\} \Longrightarrow -2+b=3a$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} a=2b-9 \\ -2+b=3a \end{array}\right\} \Longrightarrow -2+b=3(2b-9) \Longrightarrow b=5 \Longrightarrow a=1$$

Es decir:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5x+8 & si \quad x\le -1 \\ x^3+5 & si \quad -1<x<2 \\ 12x & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

b) *Como f es una función definida a trozos, formada por funciones elementales, y ya hemos calculado a y b para asegurar la derivabilidad en $x=-1$, solo faltaría estudiar de manera puntual la derivabilidad en $x=2$.*

Como la continuidad en $x=2$ es condición necesaria para la derivabilidad, comprobamos si f es continua en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=24 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 2^-}(x^3+5)=13\in\mathbb{R} \\[2ex] \lim\limits_{x\to 2^+}(12x)=24\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Discontinuidad de salto finito en } x=2$$

Al no ser continua en $x=2$, no es derivable en $x=2$. Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, con función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+5 & si \quad x\le -1 \\ 3x^2 & si \quad -1<x<2 \\ 12 & si \quad x>2 \end{cases}$$

Solución del ejercicio 4

a) $f'(x)=2\cos(2x)\cos^2(3x)-6\,\mathrm{sen}(2x)\cos(3x)\,\mathrm{sen}(3x)$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(1-\ln x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{1-\ln x}}$

Solución del ejercicio 5

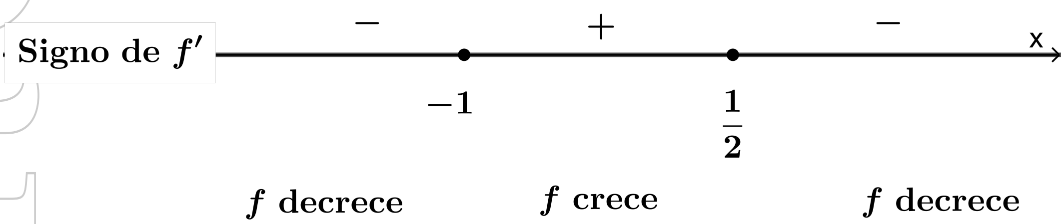
a) *La función es derivable en todo su dominio ($Dom\, f=\mathbb{R}$).*

$f'(x)=e^{-x^2-x}+x(-2x-1)e^{-x^2-x}=(-2x^2-x+1)e^{-x^2-x}$

Buscamos los puntos críticos de la función f, resolviendo la ecuación $f'(x)=0$:

$$(-2x^2-x+1)e^{-x^2-x}=0 \Longleftrightarrow -2x^2-x+1=0 \Longleftrightarrow x=-1,\ x=\frac{1}{2}$$

$$e^{-x^2-x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \implies \textbf{El signo de } f' \textbf{ es el de } -2x^2 - x + 1$$



Estudiando los cambios de signo de f' (ver gráfico), tenemos que f crece en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, y f decrece en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

b) *Aprovechando los resultados anteriores, por los cambios de signo observados en f', sabemos que:*

- *En $x = -1$ hay un mínimo relativo, que vale $f(-1) = e^{-2}$.*
- *En $x = \frac{1}{2}$ hay un máximo relativo, que vale $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$*

c) *Necesitamos conocer las tendencias de la función cuando $x \to +\infty$, y cuando $x \to -\infty$:*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2-x} = +\infty \cdot 0 = INDETERMINADO \implies$
  $$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2+x}} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{L'Hôp.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(2x+1)e^{x^2+x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2-x} = -\infty \cdot 0 = INDETERMINADO \implies$
  $$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2+x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{L'Hôp.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(2x+1)e^{x^2+x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Por tanto, podemos garantizar que los extremos relativos encontrados son también absolutos.

Solución del ejercicio 6

Si denotamos por x al radio de una de ellas, el radio de la otra será $10 - x$, y el área sombreada será entonces:

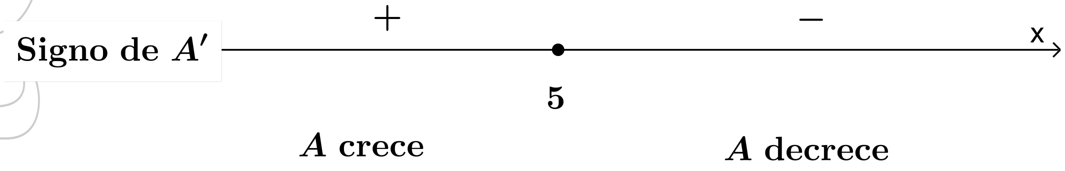
$$A(x) = 100\,\pi - \pi\,x^2 - \pi\,(10 - x)^2$$

Buscamos sus puntos críticos, resolviendo $A'(x) = 0$:

$$A'(x) = -2\pi\,x + 2\pi(10 - x)$$

$$A'(x) = 0 \iff -2\pi\,x + 2\pi(10 - x) = 0 \iff -x + 10 - x = 0 \iff x = 5$$

Estudiamos el cambio de signo de A':



Es decir, en $x = 5$ la función A tiene un máximo relativo, que en este caso, es también el máximo absoluto en el dominio del problema $(Dom\, A = [0,\, 10])$.

Por tanto, ambas circunferencias deben tener 5 cm de radio.