IES O COUTO. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Matemáticas I
Segundo Parcial. 28-02-2019. Tiempo estimado: 45 minutos

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN

Solución del ejercicio 1

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1} = 0^0 = INDETERMINADO$$

Tomamos logaritmos para poder resolver el límite:

$$L = \lim_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1} \implies \ln L = \lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1) = 0\cdot(-\infty) = INDETERMINADO$$

Podemos intentar transformar el problema en otro que pueda resolverse utilizando la regla de L'Hôpital.

$$\ln L = \lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{-\infty}{+\infty} = INDETERMINADO$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} \overset{L'Hôp.}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+}(-(x-1)) = 0 \implies \ln L = 0 \implies L = 1$$

Es decir:

$$L = \lim_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1} = 1$$

Solución del ejercicio 2

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-1(x-2)}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

Solución del ejercicio 3

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2-4x}{2\sqrt{x^3-2x^2-1}}$

b) $f'(x) = 3e^{3x}\cos(2x+1) - 2e^{3x}\operatorname{sen}(2x+1)$

c) $f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)-2x(3x+1)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-3x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1+\cos x}{x+\operatorname{sen} x}$

e) $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2(2x)}$

f) *Hay que utilizar derivación logarítmica, para lo cual aplicamos logaritmo neperiano en la expresión de la función:*

$$f(x) = x^{\operatorname{sen} x} \implies \ln[f(x)] = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$$

Derivando la última igualdad:

$$\frac{1}{f(x)}\, f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \implies f'(x) = f(x)\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

Por tanto:

$$f'(x) = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

Solución del ejercicio 4

a) *Comenzamos buscando la relación entre a y b necesaria para garantizar la continuidad de f en $x = -1$:*

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = a(-1)^2 + 1 = a + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to -1^-} (ax^2 + 1) = a + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (3x + b) = -3 + b \end{array}\right\} \implies a + 1 = -3 + b \implies a - b = -4$$

Buscamos la relación entre a y b necesaria para garantizar la derivabilidad:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \overset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} 2ax = -2a \\ \\ f'(-1^+) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \overset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 3 = 3 \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies -2a = 3 \implies a = -\frac{3}{2}$$

Como para la continuidad teníamos $a - b = -4$, entonces $b = a + 4 \implies b = \dfrac{5}{2}$

b) *A priori, la derivabilidad de f estaba garantizada en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dado que f es una función definida a trozos que consiste en funciones elementales. Ahora, para $a = -\dfrac{3}{2}$ y $b = \dfrac{5}{2}$, la derivabilidad está garantizada en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.*

Solo debemos estudiar aisladamente la derivabilidad en $x = 1$.

Primero estudiamos la continuidad, ya que es condición necesaria para la derivabilidad:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 3 \cdot 1 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{11}{2} \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \left(3x + \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{11}{2} \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (2x^3 - 3x) = -1 \end{array}\right\} \implies f \text{ no es continua en } x\text{=}1 \text{ (disc. salto finito)}$$

Por tanto, f no es derivable en $x = 1$, y se tiene:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x & si \quad x \le -1 \\ 3 & si \quad -1 < x < 1 \\ 6x^2 - 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

c) *Aprovechamos la expresión obtenida para $f'(x)$.*

La recta tangente pasa por el punto $(2, f(2)) = (2, 10)$, y su pendiente es $f'(2) = 21$, por tanto, su ecuación es:

$$\frac{y-10}{x-2} = 21 \implies y - 10 = 21(x-2) \implies y = 21x - 32$$

Solución del ejercicio 5

a) *Se tiene que* $f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \le 0 \\ x & si \quad x \ge 0 \end{cases}$

La derivabilidad de f está garantizada en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Después de obtener la anterior expresión de f', es trivial que f no es derivable en $x = 0$, pero obtenemos los siguientes resultados:

- $f' < 0$ *en* $(-\infty, 0) \implies f$ *es decreciente en* $(-\infty, 0)$
- $f' > 0$ *en* $(0, +\infty) \implies f$ *es creciente en* $(0, +\infty)$
- *Aunque en $x = 0$ la función no sea derivable, es continua, y por tanto existe $f(0)$. Dado que a la izquierda de $x = 0$ la función es decreciente, y a la derecha de $x = 0$ la función es creciente, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = 0$ (que también es absoluto, porque $f(0) = 0$ y $f(x) \ge 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$)*

b) *La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$ (es una función polinómica). Lo único que tenemos que hacer es buscar los puntos críticos, y estudiar el signo de la derivada.*

$f'(x) = x^4 - 4x^2 \implies f'(x) = x^2\,(x-2)\,(x+2)$

Los puntos críticos son las soluciones reales de $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \iff x^2\,(x-2)\,(x+2) \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Un punto crítico es extremo relativo si hay un cambio de signo de f'. Por tanto, analizando los cambios de signo de f' (ver el esquema de la página siguiente):

- f *es creciente en* $(-\infty,\, -2) \cup (2,\, +\infty)$
- f *es decreciente en* $(-2,\, 2)$
- f *tiene un máximo relativo en $x = -2$ (no es absoluto porque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)*
- f *tiene un mínimo relativo en $x = 2$ (no es absoluto porque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$)*

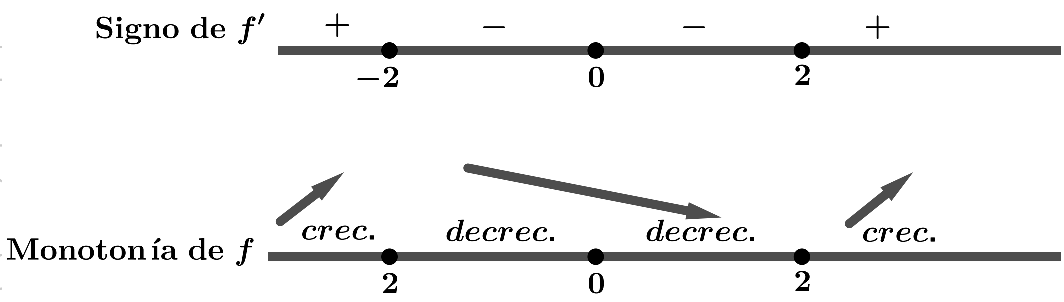

Figura 1: Ejercicio 5b)

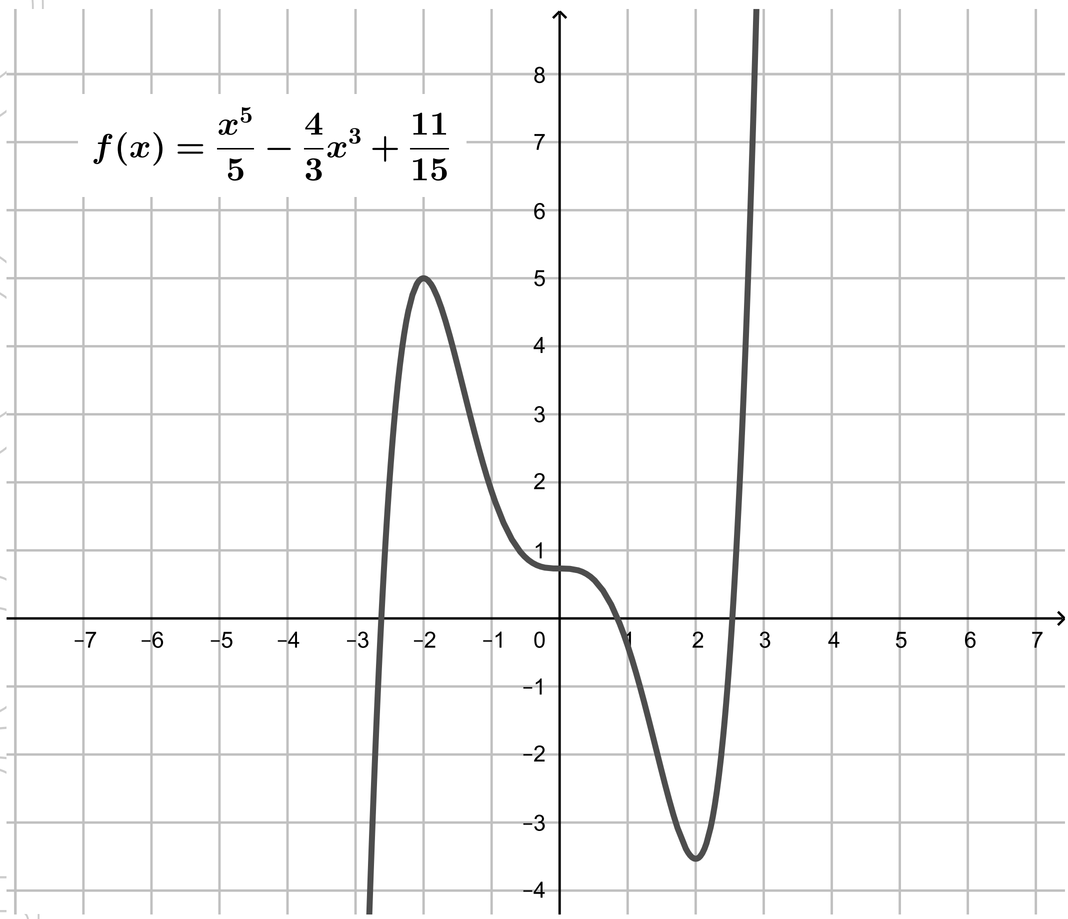

Figura 2: (Esta representación gráfica NO había que hacerla en el examen, se presenta aquí como curiosidad)

IES Colto