Repaso para el examen global de la 2ª Evaluación

Ejercicio 1 *Calcula los siguientes límites, justificando el resultado obtenido.*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,\ln(1+x)}{1-\cos x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{2x^2-7}{x-1}\right)^{\frac{1}{2-x}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\cos\left(x^2\right)\right)^{\frac{2}{x^2}}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(2x)}{x^2+\operatorname{sen}^2(x)}$

Ejercicio 2 *Dadas las funciones* $f(x)=e^{2x+3}$, *y* $g(x)=\ln(x-1)$, *obtener:*

a) *La expresión de* $f^{-1}(x)$

b) *La expresión de* $(f\circ g)(x)$

c) *La expresión del valor exacto de* $(f\circ g)(4)$, *sin utilizar la calculadora. (Se obtendrá una expresión del tipo* Ae^k*)*

Ejercicio 3 *Para las siguientes funciones, estudia el dominio y la existencia de asíntotas.*

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$

b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)$

c) $f(x)=\dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

d) $f(x)=e^{-x+2}$

e) $f(x)=\dfrac{x|x|}{1-x}$

f) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$

Ejercicio 4 *Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, obtén el valor de* $f'(2)$ *para la función* $f(x)=x^2+4x-6$

Ejercicio 5 *Utilizando las reglas de derivación, obtén la función derivada de las siguientes:*

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+3}{5x-2}\right)$

b) $f(x)=e^{x^2-5x}\cdot\operatorname{tg}(3x-1)$

c) $f(x)=\operatorname{sen}(e^{x^2-x}+x)$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3-2x}}$

e) $f(x) = \cos(x^2)\,\mathrm{tg}(1-x)$

f) $f(x) = (2x^4 - x^3)^{12}$

g) $f(x) = \dfrac{x + \mathrm{sen}(x)}{\sqrt{x^2 + e^{2x}}}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 - cos^3(x^2 - x)}{6}$

Ejercicio 6 *Estudia la continuidad de las siguientes funciones. Si encuentras discontinuidades, clasifícalas.*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si \quad x < 1 \\ -2x + 3 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

Ejercicio 7 *Estudia la derivabilidad en $x = 1$ y en $x = 2$ de la función del ejercicio 6b*

Ejercicio 8 *Para la función* $f(x) = \dfrac{2x^3 - 16}{x^2 - 4}$

a) *Estudia la continuidad (clasifica las discontinuidades que haya)*

b) *Obtén las ecuaciones de sus asíntotas.*

Ejercicio 9 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + 3 & si \quad x < -1 \\ ax - \dfrac{1}{x+2} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) *Encuentra el valor de los parámetros a y b para que sea derivable en $x = -1$.*

b) *Para los valores de a y b encontrados, estudiar la derivabilidad de f, y obtener la expresión de la función derivada.*

c) *Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -2$.*

Ejercicio 10 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad x < 3 \\ \ln(x-2) & si \quad x \geq 3 \end{cases}$

a) *Calcula los valores de a y b para que sea derivable en $\mathbb{R}$*

b) *Para los valores de a y b encontrados en el apartado anterior, calcula su función derivada, y encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 3$.*

Ejercicio 11 *Estudia la monotonía y la existencia de extremos de las siguientes funciones*

a) $f(x) = \dfrac{x^7}{14} - \dfrac{x^5}{5} + 1$

b) $f(x) = e^{-x^2+4x}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

d) $f(x) = |-x^2+6x|$

Ejercicio 12 *Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de las siguientes funciones.*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x^2+x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

Ejercicio 13 *Para la función $f(x) = \dfrac{6x^3}{x^2+3x}$, estudia:*

a) *La continuidad (si encuentras discontinuidades, clasifícalas).*

b) *Existencia y ecuaciones de asíntotas.*

c) *La derivabilidad en $x = -3$ y en $x = 0$.*

Ejercicio 14 *Para la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$*

a) *Determinar: dominio, puntos de corte con los ejes, ecuación de sus asínttotas, monotonía la existencia de extremos.*

b) *Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -1$.*

Ejercicio 15 *Estudia la curvatura y la existencia de puntos de inflexión para las siguientes funciones:*

a) $f(x) = (x^2+x-10)e^x$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

c) $f(x) = \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{x^3-x^4}{6}$

Ejercicio 16 *Para la función $f(x) = (x^2-6x+9)\,e^x$, obtén:*

a) *Dominio, continuidad y derivabilidad.*

b) *Puntos de corte con los ejes de coordenadas.*

c) *Existencia y ecuación de asíntotas.*

d) *Monotonía y extremos (absolutos y relativos).*

e) *Curvatura y puntos de inflexión.*

f) *Representación gráfica.*

g) *Ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -4$.*

Ejercicio 17 *Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 €/cm^2, y para la base se emplea un material un 50 % más caro. Hallar las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.*

Ejercicio 18 *En una esfera de radio 18 cm, hallar las dimensiones del cilindro inscrito de área lateral máxima, y calcularla.*

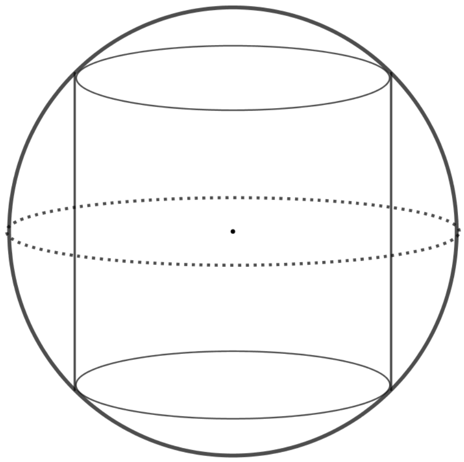

Figura 1: Área Lateral Cilindro = $2\pi Rh$

Ejercicio 19 *Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 20×10 cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado L en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja. Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo si el lado L debe medir entre 2 y 3 cm.*

Ejercicio 20 *Se inscribe un rectángulo en una circunferencia de radio 6 cm. Calcular las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.*

Ejercicio 21 *Encontrar dos números tales que la suma de uno de ellos con el cubo del otro sea 108 y que su producto sea lo más grande posible.*

Ejercicio 22 *De entre todos los rectángulos con igual perímetro, ¿cuál es el de mayor área?*

Ejercicio 23 *Calcula la altura y el radio que debe tener un bote cilíndrico cuya área total (incluyendo las dos tapas) es de 150 cm^2, para que su volumen sea máximo.*