Límites de Funciones

Matemáticas I

IES O Couto

curso 2019-2020

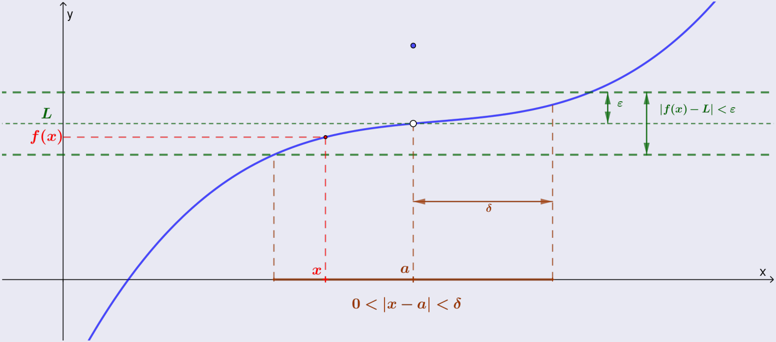
Límite finito cuando x tiende a un número real

Definición intuitiva de límite finito cuando $x \rightarrow a$, con $a \in \mathbb{R}$

- Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ cuando a medida que los valores de x se van acercando cada vez más hacia a, sin alcanzar nunca a, los valores de la función $f(x)$ se acercan cada vez más a L.
- La definición tiene las siguientes implicaciones:
    - A efectos de límite, no importa el valor $f(a)$.
    - Una vez prefijada la distancia a la que queremos que $f(x)$ se aproxime a L (suele denotarse por ϵ), podemos determinar a qué distancia de a debemos evaluar $f(x)$ (suele denotarse por δ)

Límite finito cuando x tiende a un número real

Definición formal de límite finito cuando $x \to a$, con $a \in \mathbb{R}$



$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R} :\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Teorema de unicidad

Unicidad del límite

- De la definición de límite, se deduce que si el límite existe, este tiene que ser único.
- En ocasiones puede ser necesario comprobar cuál es la tendencia de la función cuando nos acercamos hacia a por valores mayores que a $(x \to a^+)$, y cuando nos acercamos por valores menores que a $(x \to a^-)$. Obviamente, para que $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ es necesario y suficiente que $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Límites laterales

Cuando se considera que x puede aproximarse hacia a tanto por valores $x > a$ $(x \to a^+)$, como por valores $x < a$ $(x \to a^-)$, surge el concepto de límite lateral:

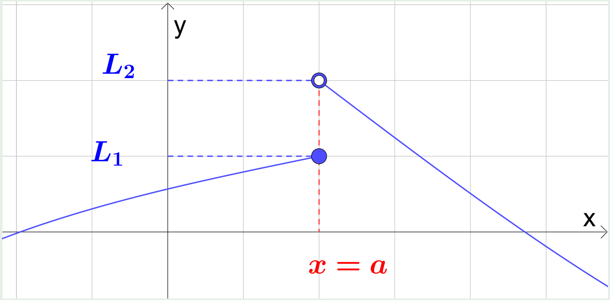
Límite lateral por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \in \mathbb{R} :\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Límite lateral por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \in \mathbb{R} :\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < a - x < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

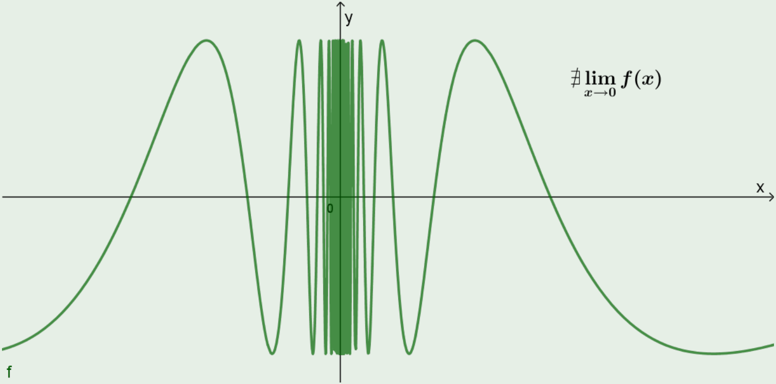
Ejemplo 1



Para esta función, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$, y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$. Por tanto, existen los límites laterales, pero por ser distintos, se dice que no existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)$

Ejemplo 2

Para la función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, de la gráfica adjunta, no existe el límite cuando x tiende hacia cero



Límite finito cuando x tiende a infinito

Definición de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

- Intuitivamente, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ cuando a medida que x toma valores cada vez mayores, la distancia de los valores de $f(x)$ a L, puede hacerse tan pequeña como se quiera. Es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} :\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists K > 0 / x > K \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

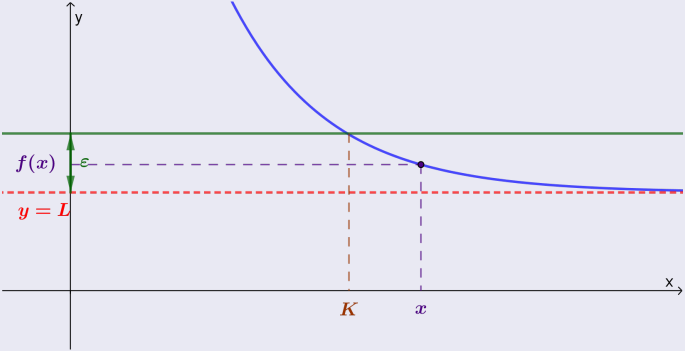
Definición de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

- Intuitivamente, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ cuando a medida que x toma valores cada vez más negativos, la distancia de los valores de $f(x)$ a L, puede hacerse tan pequeña como se quiera. Es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} :\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists K < 0 / x < K \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Límite finito cuando x tiende a infinito

Definición formal

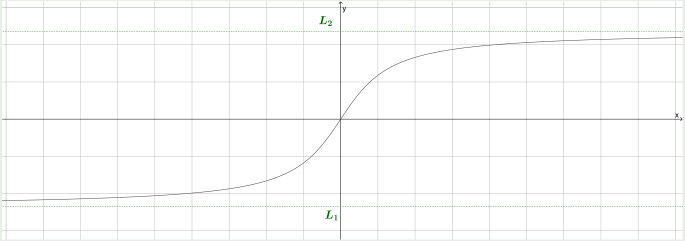


$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L :\Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists K > 0 \;/\; x > K \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

De forma análoga, se definiría:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L :\Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists K < 0 \;/\; x < K \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Ejemplo 3



En este ejemplo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L_2$, y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L_1$
Las rectas $y = L_2$, $y = L_1$ son asíntotas horizontales de la función.

Límite infinito cuando $x \to a$

Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ cuando a medida que x se aproxima cada vez más hacia a, la función toma valores cada vez más grandes, sin estar acotada superiormente.
Análogamente, se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ cuando a medida que x se aproxima cada vez más hacia a, la función toma valores cada vez más grandes, sin estar acotados inferiormente.

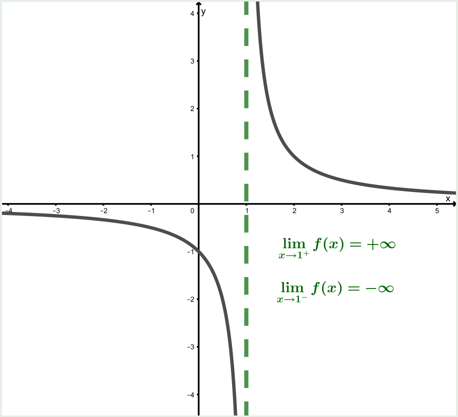
Definición formal

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty :\Longleftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, K > 0, \exists \delta > 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty :\Longleftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, K < 0, \exists \delta > 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < K$$

De manera análoga, se definen los límites laterales infinitos en $x \to a$.

Ejemplo 4



La función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 1$

Límites infinitos en el infinito

Una función tiene límite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ cuando a medida que x toma valores cada vez más grandes, los valores de la función son cada vez más grandes sin estar acotados superiormente.
De manera análoga se definen $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Definición formal

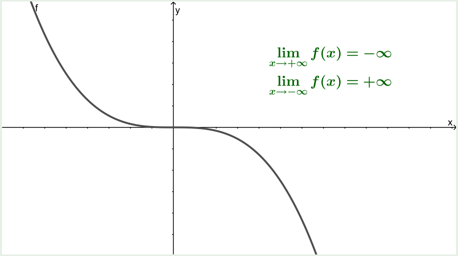
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty :\Longleftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, K > 0, \exists A \in \mathbb{R}, A > 0 / x > A \implies f(x) > K$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty :\Longleftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, K < 0, \exists A \in \mathbb{R}, A > 0 / x > A \implies f(x) < K$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty :\Longleftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, K > 0, \exists A \in \mathbb{R}, A < 0 / x < A \implies f(x) > K$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty :\Longleftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, K < 0, \exists A \in \mathbb{R}, A < 0 / x < A \implies f(x) < K$$

Ejemplo 5



Propiedades para el cálculo de límites (I)

- Dadas las funciones f, g, y h, definidas en un entorno de $x = a$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), y verificando $f \leq g \leq h$ en un entorno de $x = a$, entonces:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L \,(\text{real o infinito}) \implies \exists \lim_{x \to a} h(x) = L$$

- Si f es una función acotada en un entorno de $x = a$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, entonces:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y $L > 0$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), entonces $f(x) > 0$ en un entorno de a.
  Análogamente, si $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, y $L < 0$ (con $a \in \mathbb{R}$ o infinito), entonces $f(x) < 0$ en un entorno de a.

Propiedades para el cálculo de límites (II)

Operaciones con límites

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ (con a, L_1 y L_2 reales o infinitos), entonces, salvo en los casos de indeterminación, se cumple:

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$
- $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$
- $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{L_1}{L_2}$
- $\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$

Indeterminaciones

Excepciones

Las propiedades anteriores no pueden aplicarse para obtener directamente el valor de un límite en los casos siguientes, conocidos como indenterminaciones:

I) $+\infty - \infty$

II) $0 \cdot \infty$

III) $\dfrac{0}{0}$ $\qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

IV) 0^0 $\qquad \infty^0$ $\qquad 1^\infty$

Asíntotas

Intuitivamente, puede definirse una asíntota como una recta a la cual la función va aproximándose cada vez más.

Asíntotas verticales

Una función $y = f(x)$ tiene una asíntota vertical de ecuación $x = a$ cuando, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, o cuando $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

Asíntotas horizontales

- Se dice que la recta $y = A$ es una asíntota horizontal de la función cuando $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$. (Dicha asíntota está situada a la derecha en la representación gráfica)
- Análogamente, la recta $y = B$ es una asíntota horizontal de la función cuando $\lim_{x \to -\infty} f(x) = B$. (Dicha asíntota está situada a la izquierda en la representación gráfica)

Asíntotas oblícuas

- La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblícua situada a la derecha de la representación gráfica si existen y son números reales los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

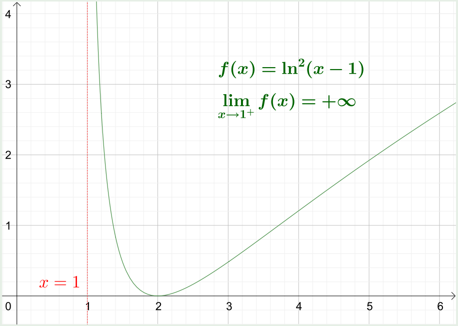
- La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblícua situada a la izquierda de la representación gráfica si existen y son números reales los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

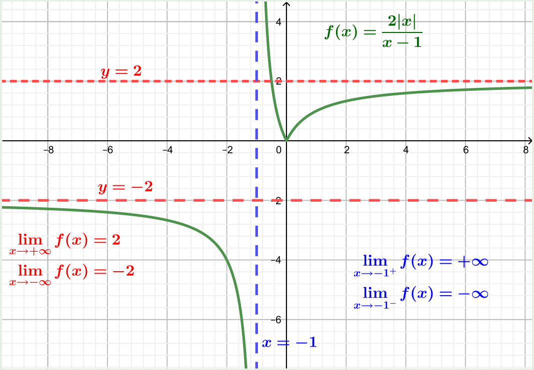
Ejemplo 6

La función $f(x) = \ln^2(x-1)$ tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 1$.



Ejemplo 7

La función $f(x) = \dfrac{2|x|}{x-1}$ tiene una asíntota vertical de ecuación $x = -1$, y dos asíntotas horizontales de ecuaciones $y = 2$, e $y = -2$.



Ejemplo 8

La función $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|-1}$ tiene dos asíntotas verticales de ecuaciones $x = -1$ y $x = 1$, y dos asíntotas oblícuas de ecuaciones $y = -x + 1$, e $y = x + 1$.