Funciones Elementales

IES O Couto

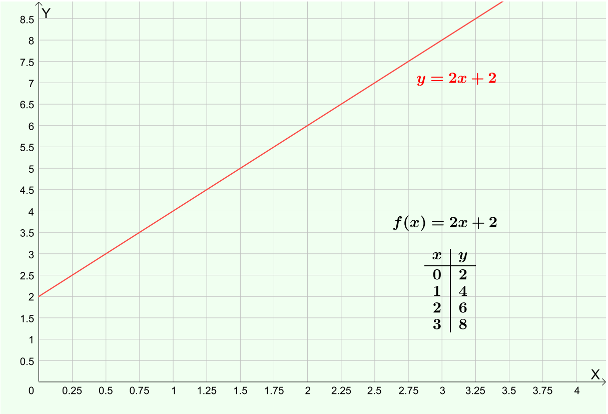
curso 2018-2019

Introducción

- En una primera aproximación, una función es una relación entre dos variables, que usualmente se denotan X e Y, tal que cada valor de X se corresponde con un único valor de Y
  - La variable X se llama Variable Independiente.
  - La variable Y se llama Variable Dependiente.
- Una función puede expresarse mediante:
  - Un enunciado.
  - Una tabla de valores.
  - Una fórmula (la expresión analítica de la función).
  - Una representación gráfica.

Ejemplo 1

Podemos considerar la función f, que relaciona el perímetro de un rectángulo de base 1 cm con su altura x.



$f(x) = 2x + 2$

x	y
0	2
1	4
2	6
3	8

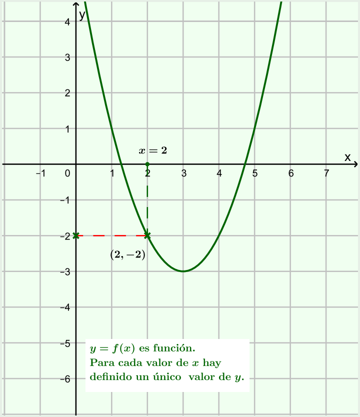
Función real de variable real

Definición

Formalmente, una *función real de variable real*, f, es una aplicación entre un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ y el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, que a cada $x \in X$ le hace corresponder un único valor $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} X \subset \mathbb{R} & \xmapsto{f} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

- El subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ para los cuales la función f está definida, se llama *Dominio* de la función (*Dom* f).
- Para un $x \in X$, el valor $f(x)$ se llama *imagen de* x.
- El conjunto de todas las imágenes de la función, $f(X)$, se llama *Conjunto Imagen*, *Rango*, o *Recorrido* de la función (*Im* f).


y
x
$x = 2$
$(2, -2)$
$y = f(x)$ es función.
Para cada valor de x hay
definido un único valor de y.
$(3, 3.816)$
$x = 3$
$(3, -3.816)$
$y = f(x)$ no es función.
Existen valores de x para los cuales
hay definidos varios valores de y.

Ejemplo 1

En la función del ejemplo 1, $f(x) = 2x + 2$, dado que la altura de un rectángulo debe ser mayor o igual que cero, tenemos:

- $Dom\, f = [0, +\infty)$
- $Im\, f = [2, +\infty)$
- Las imágenes de 0, 1, 2, y 3 son respectivamente 2, 4, 6, y 8. Matemáticamente, esto se expresa así:
  - $f(0) = 2$
  - $f(1) = 4$
  - $f(2) = 6$
  - $f(3) = 8$

Suma, resta, producto y división de funciones

Las operaciones con números reales suma, resta, producto y división tienen su analogía inmediata en las funciones.
Dadas dos funciones f y g, se definen las siguientes operaciones:

- Función suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Función resta: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Función producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Función cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

El dominio de las anteriores operaciones de funciones es la intersección de los dominios de f y g, salvo en el caso de la función cociente.
En el caso de la función cociente, de la intersección de los dominios hay que excluir las raíces de la ecuación $g(x) = 0$

Ejemplo 2

Sean $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = x+1$, con $Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y $Dom\, g = \mathbb{R}$

- Función suma: $(f+g)(x) = \dfrac{1}{x-1} + x + 1 = \dfrac{x^2}{x-1}$
- Función resta: $(f-g)(x) = \dfrac{1}{x-1} - (x+1) = \dfrac{2-x^2}{x-1}$
- Función producto: $(f \cdot g)(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
- Función cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

Se tienen los siguientes dominios:

- $Dom\,(f+g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $Dom\,(f-g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $Dom\,(f \cdot g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

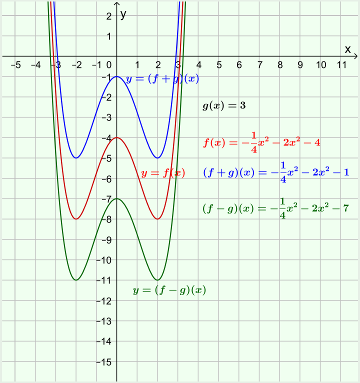
Frame Title

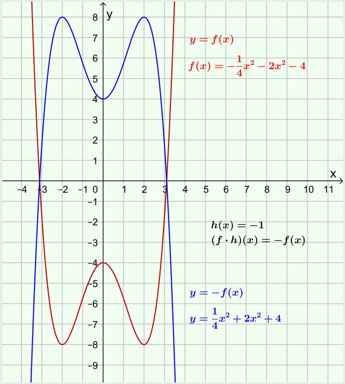
Ejemplo 3: Aplicaciones de las operaciones a la obtención de gráficas

Sea $y = f(x)$ la representación gráfica de cierta función f, si consideramos la función constante $g(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, entonces:

- La gráfica $y = (f + g)(x)$ será la gráfica $y = f(x) + k$, que se obtendrá trasladando verticalmente hacia arriba k unidades la gráfica $y = f(x)$.
- Análogamente, la gráfica $y = (f - g)(x)$ será la gráfica $y = f(x) - k$, que se obtendrá trasladando verticalmente hacia abajo k unidades la gráfica $y = f(x)$.
- Si consideramos la función constante $h(x) = -1$, entonces la gráfica de $(f \cdot h)(x) = -f(x)$ será la gráfica simétrica de $f(x)$ con respecto al eje OX.

Ejemplo 3


$y = (f+g)(x)$
$g(x) = 3$
$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x^2 - 4$
$y = f(x)$
$(f+g)(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x^2 - 1$
$(f-g)(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x^2 - 7$
$y = (f-g)(x)$


$y = f(x)$
$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x^2 - 4$
$h(x) = -1$
$(f \cdot h)(x) = -f(x)$
$y = -f(x)$
$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x^2 + 4$

Composición de funciones

La función $f \circ g$

La operación composición de funciones no tiene una operación análoga en el conjunto de los números reales, y surge al aplicar dos o más funciones de forma consecutiva.

- Dadas dos funciones f y g, se llama *función g compuesta con f*, y se denota $f \circ g$, a la función $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Es decir:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xmapsto{g} & \mathbb{R} & \xmapsto{f} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x) & \longrightarrow & f[g(x)] \end{array}$$

Ejemplo 4

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$, obtengamos g *compuesta con* f (es decir $f \circ g$), y f *compuesta con* g (es decir $g \circ f$):

- $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = 2x^2 + 1$
- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

Observaciones

1. En general, la composición de funciones no es una operación conmutativa. Es decir:
$$f \circ g \neq g \circ f$$
2. Para que un número x_o pertenezca al dominio de $f \circ g$, deben cumplirse las siguientes condiciones:
   I) $x_o \in Dom\, g$ (para que exista $g(x_o)$).
   II) $g(x_o) \in Dom\, f$ (para que pueda calcularse $f[g(x_o)]$).

Ejemplo 5: Aplicación de la composición de funciones a la traslación de gráficas

$g(x) = x - 3$
$h(x) = x + 2$

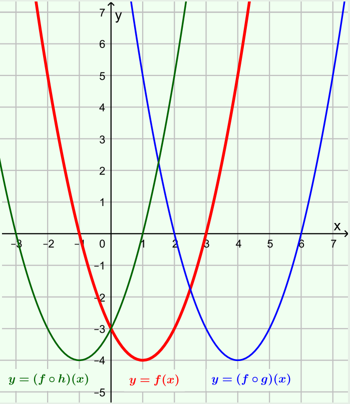
$f(x) = x^2 - 2x - 3$

$(f \circ g)(x) = f(x-3) = (x-3)^2 - 2(x-3) - 3 = x^2 - 8x + 12$

$(f \circ h)(x) = f(x+2) = (x+2)^2 - 2(x+2) - 3 = x^2 + 2x - 3$

Para obtener el valor de $(f \circ g)$ en x_o hay que evaluar f en $x_0 - 3$, es decir, hay que leer la gráfica $y = f(x)$ tres unidades a la izquierda de x_o.
Por tanto, para obtener la gráfica $y = (f \circ g)(x)$, hay que trasladar la gráfica $y = f(x)$ tres unidades a la derecha.

Razonando análogamente, se deduce que para obtener la gráfica $y = (f \circ h)(x)$, habrá que trasladar la gráfica $y = f(x)$ dos unidades a la izquierda.



Función recíproca, o inversa con respecto a la composición de funciones

La función f^{-1}

Dada una función real $y = f(x)$, podemos construir la función recíproca de f, que se denota f^{-1}.

- La función recíproca f^{-1} asigna a cada número real $y_o \in Im\, f$ un número $x_o \in Dom\, f$ tal que $f(x_o) = y_o$.

$$\begin{array}{ccc} Im\, f & \overset{f^{-1}}{\longmapsto} & Dom\, f \\ y_o & \longrightarrow & f^{-1}(y_o) = x_o \end{array}$$

- Es fácil comprobar que al componer una función f y su recíproca, se obtiene la función identidad:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

- Dada una función $y = f(x)$, para encontrar la expresión analítica de su función recíproca, es suficiente expresar x en función de y.

Ejemplo 6

Sea $y = f(x)$, con $f(x) = x^2 + 1$

Para encontrar la expresión analítica de f^{-1}, despejamos x en $y = x^2 + 1$:

$$y = x^2 + 1 \implies x^2 = y - 1$$

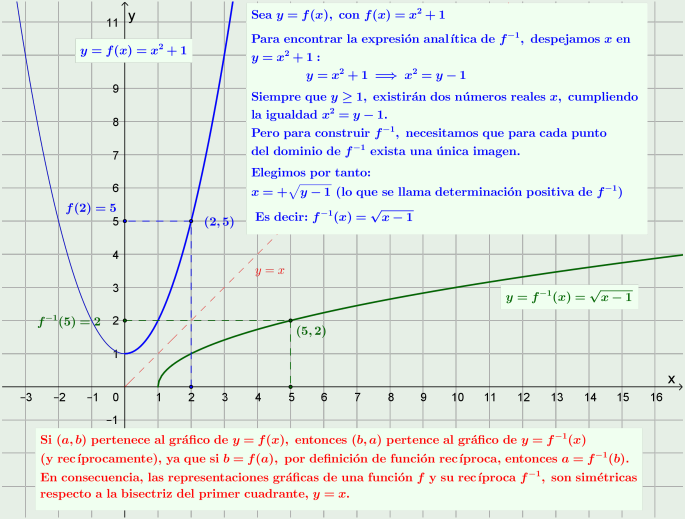
Siempre que $y \geq 1$, existirán dos números reales x, cumpliendo la igualdad $x^2 = y - 1$.

Pero para construir f^{-1}, necesitamos que para cada punto del dominio de f^{-1} exista una única imagen.

Elegimos por tanto:

$x = +\sqrt{y-1}$ (lo que se llama determinación positiva de f^{-1})

Es decir: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$



Si (a, b) pertenece al gráfico de $y = f(x)$, entonces (b, a) pertence al gráfico de $y = f^{-1}(x)$ (y recíprocamente), ya que si $b = f(a)$, por definición de función recíproca, entonces $a = f^{-1}(b)$.
En consecuencia, las representaciones gráficas de una función f y su recíproca f^{-1}, son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante, $y = x$.

Funciones Elementales

Modelos de funciones elementales

- Funciones polinómicas: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ (n \in \mathbb{N})$
- Funciones con radicales: $f(x) = \sqrt[m]{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0} \ (m, n \in \mathbb{N})$
- Funciones racionales: $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$

  $n, m \in \mathbb{N}$
- Funciones exponenciales: $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.
- Funciones logarítmicas: $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.
- Funciones trigonométricas.
- Otras funciones:
  - Valor absoluto: $f(x) = |x|$
  - Parte entera: $f(x) = E(x)$
  - Parte decimal: $f(x) = Dec(x)$

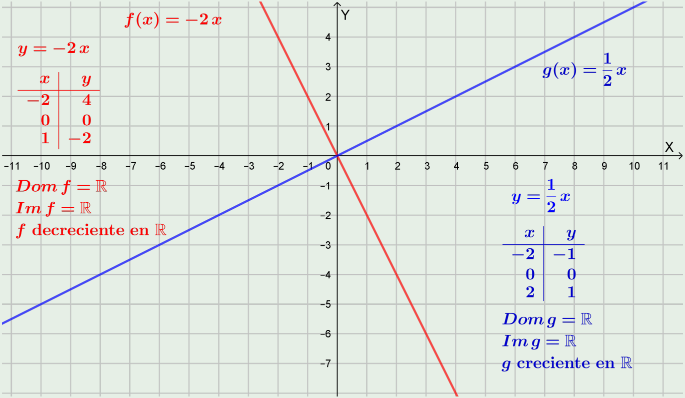
Funciones polinómicas

Función lineal

Su expresión analítica es $f(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}$.

- Dos variables relacionadas mediante una función lineal son directamente proporcionales, ya que el cociente es constante ($\frac{y}{x} = m$).
- La representación gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.
- El parámetro m se llama *pendiente* de la ecuación o de la recta, y determina la monotonía de la función.
  - $m > 0 \implies f$ es creciente.
  - $m < 0 \implies f$ es decreciente.
  - $m = 0 \implies f$ es constante (la representación gráfica es la recta $y = 0$, es decir, coincide con el eje OX).
- $Dom\, f = \mathbb{R}$
- $Im\, f = \mathbb{R}$

Ejemplo 7: Funciones lineales



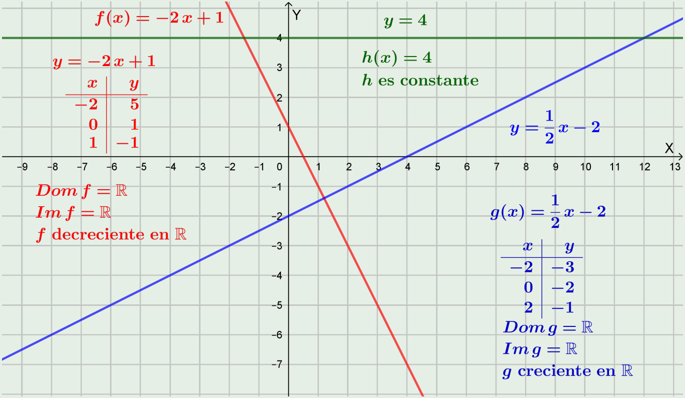
Funciones polinómicas

Función afín

Su expresión analítica es $f(x) = mx + n$, con $m, n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$.

- La representación gráfica es una recta que corta al eje OY en el punto $(0, n)$.
- El parámetro m se llama *pendiente* de la recta o de la ecuación. Determina la monotonía de la función como en el caso de la función lineal.
- Si $m = 0$, se obtiene la función constante $y = n$.
- El parámetro n se llama *ordenada en el origen*.
- $Dom\, f = \mathbb{R}$
- $Im\, f = \mathbb{R}$

Ejemplo 8: Funciones afines



Funciones polinómicas

Función cuadrática (I)

Su expresión analítica es $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$.

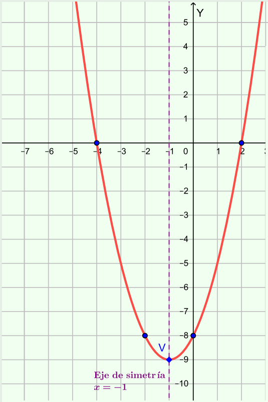
- La representación gráfica es una curva llamada *parábola*.
- Para representar correctamente una parábola, se siguen los siguientes pasos:
  1. Cálculo del vértice.
     El vértice es el punto $V = (x_v, y_v)$, que determina el valor mínimo de la función si $a > 0$, y el máximo si $a < 0$.
     $$\begin{cases} x_v = -\frac{b}{2a} \\ y_v = f(x_v) \end{cases}$$
     La parábola es simétrica con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice. Es decir, la recta $x = -\frac{b}{2a}$ es el eje de simetría.
  2. Cálculo del punto de corte con el eje de ordenadas OY.
     Se resuelve el sistema:
     $$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$
     Obviamente, se obtendrá el punto $(0, c)$

Funciones polinómicas

Función cuadrática (II)

3. Determinación de la existencia, y cálculo de puntos de corte con el eje de abscisas OX.
   Se resuelve el sistema:
   $$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$
   (Puede haber dos puntos de corte, uno, o ninguno, dependiendo del número de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$)
4. Por último, se completa una tabla de valores, en la que se obtienen al menos cinco puntos de la parábola. Pueden obtenerse aprovechando la simetría de la parábola con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice.

Ejemplo 9: Función cuadrática



$f(x) = x^2 + 2x - 8$

$y = x^2 + 2x - 8$

1. Cálculo del vértice:

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$$

$$y_v = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8 = -9$$

2. Cálculo del punto de corte con el eje OY:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) = -8 \end{cases}$$

Se obtiene el punto $(0, -8)$

3. Cálculo de los puntos de corte con el eje OX:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 + 2x - 8 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los puntos $(-4, 0)$ y $(2, 0)$

4. Completamos la tabla de valores:

x	y
-1	-9
0	-8
-4	0
2	0
-2	-8

$Dom\, f = \mathbb{R}$

$Im\, f = [-9, +\infty)$

f creciente en $(-1, +\infty)$

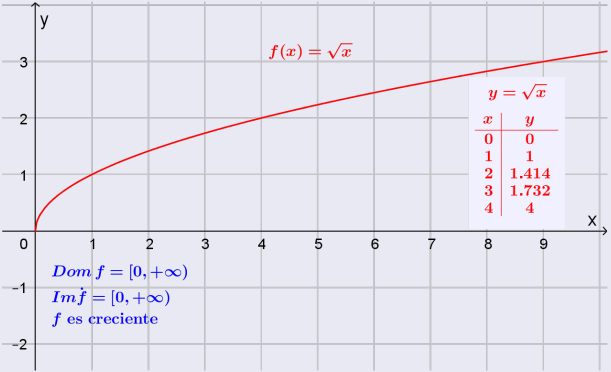
f decreciente en $(-\infty, -1)$

f alcanza el mínimo en $x = -1$, (y vale -9)

Funciones radicales

Función raíz cuadrada

Su expresión analítica es $f(x) = \sqrt{x}$. Es la función recíproca de $g(x) = x^2$.



Funciones racionales

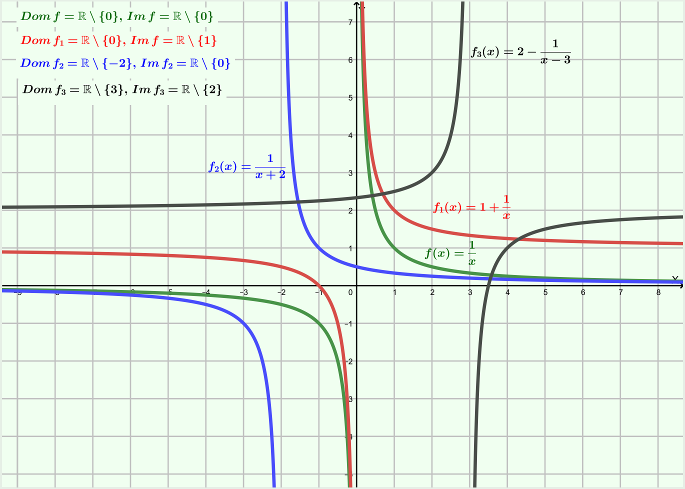
Función de proporcionalidad inversa

Su expresión analítica es $f(x) = \dfrac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

- Dos variables relacionadas mediante una función de proporcionalidad inversa son inversamente proporcionales, ya que el producto es constante $(y \cdot x = k)$.
- La representación gráfica es una curva llamada *hipérbola equilátera*.
- $Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $Im\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- A partir de la representación gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, pueden obtenerse las gráficas de transformaciones sencillas de f, como por ejemplo

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{x}, \;\; f_2(x) = \frac{1}{x+2} \;, \text{ o } f_3(x) = 2 - \frac{1}{x-3}$$

Ejemplo 10: Funciones racionales



Ejemplo 10

Las funciones f_1, f_2, y f_3 del gráfico anterior fueron obtenidas mediante composición de funciones:

- Si $g_1(x) = x + 1$, tenemos que $f_1(x) = (g_1 \circ f)(x)$. Es decir, para representar $y = f_1(x)$ tenemos que subir verticalmente una unidad la gráfica de $y = f(x)$.
- Si $g_2(x) = x + 2$, tenemos que $f_2(x) = (f \circ g_2)(x)$. Es decir, para obtener el valor de $f_2(x)$, tenemos que evaluar $f(x + 2)$, es decir, leer la gráfica de $y = f(x)$ dos unidades más a la derecha. Por tanto, para representar $y = f_2(x)$, tenemos que desplazar la gráfica de $y = f(x)$ dos unidades a la izquierda.
- Si $g_3(x) = x - 3$, $h_3(x) = -x$ y $H_3(x) = 2 + x$, entonces $f_3(x) = (H_3 \circ h_3 \circ f \circ g_3)(x)$. Es decir, para representar $f \circ g_3$ se traslada la gráfica $y = f(x)$ tres unidades a la derecha, y al aplicar h_3 a $f \circ g_3$, obtenemos su gráfica simétrica con respecto a OX. Finalmente, al aplicar a esta última H_3, la trasladamos verticalmente dos unidades hacia arriba.

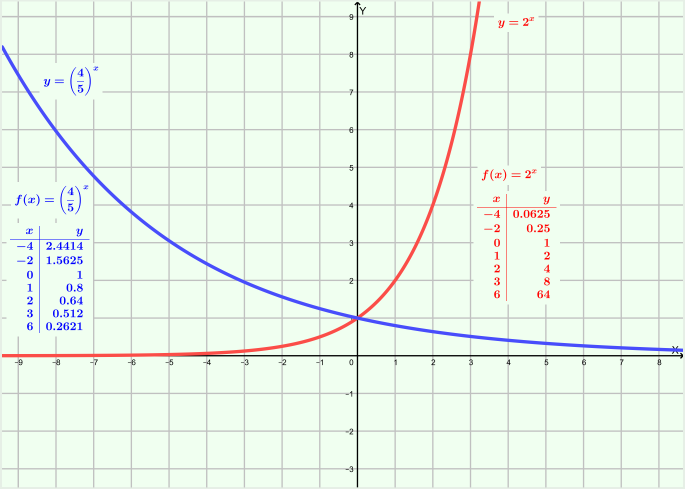
Funciones exponenciales

Función exponencial de base a

Su expresión analítica es $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

- $Dom\, f = \mathbb{R}$
- $Im\, f = (0, +\infty)$
- La gráfica de la función siempre pasa por el punto $(0, 1)$.
- Si $0 < a < 1$, f es decreciente.
- Si $a > 1$, f es creciente.

Ejemplo 11: Funciones exponenciales



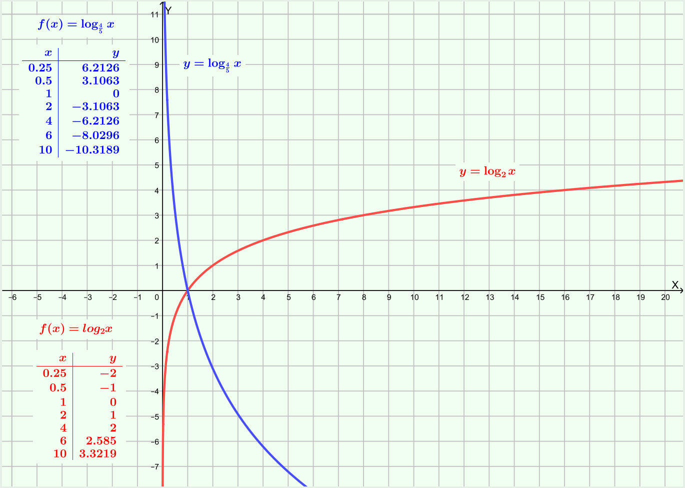
Funciones logarítmicas

Función logaritmo en base a

Su expresión analítica es $f(x) = \log_a(x)$, con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

- Si $a = 10$, $f(x) = \log x$ (logaritmo decimal).
- Si $a = e$, $f(x) = \ln x$ (logaritmo neperiano).
- La gráfica siempre corta al eje OX en el punto $(1, 0)$
- $Dom\, f = (0, +\infty)$
- $Im\, f = \mathbb{R}$
- Si $0 < a < 1$, f es decreciente.
- Si $a > 1$, f es creciente.

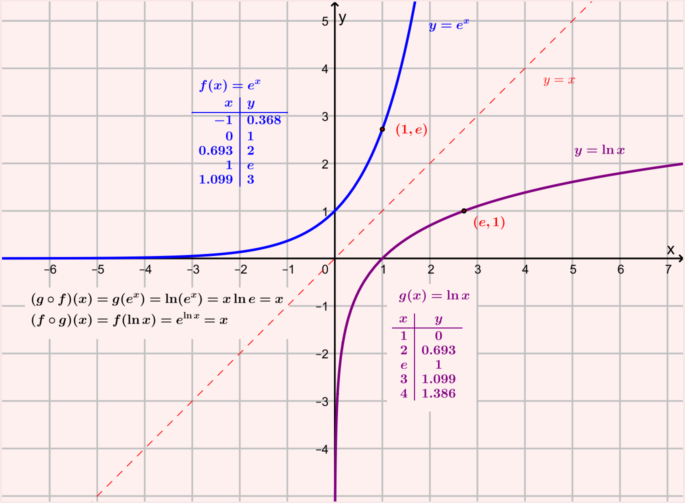
Ejemplo 12: Funciones logarítmicas



x	y
0.25	6.2126
0.5	3.1063
1	0
2	−3.1063
4	−6.2126
6	−8.0296
10	−10.3189

x	y
0.25	−2
0.5	−1
1	0
2	1
4	2
6	2.585
10	3.3219

Las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son recíprocas



$f(x) = e^x$

x	y
-1	0.368
0	1
0.693	2
1	e
1.099	3

$g(x) = \ln x$

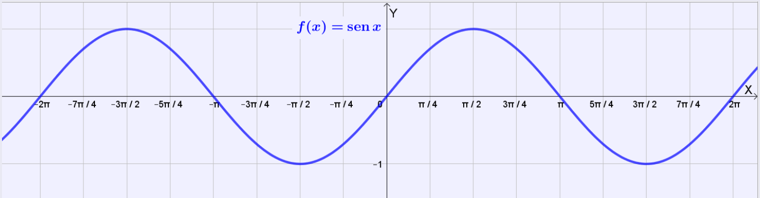
x	y
1	0
2	0.693
e	1
3	1.099
4	1.386

$(g \circ f)(x) = g(e^x) = \ln(e^x) = x \ln e = x$

$(f \circ g)(x) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x$

Funciones trigonométricas

Función seno



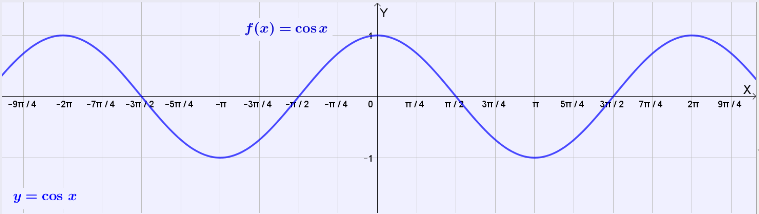
$y = \text{sen}\, x$

x	$-\pi$	$-5\cdot\frac{\pi}{6}$	$-3\cdot\frac{\pi}{4}$	$-2\cdot\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\cdot\frac{\pi}{3}$	$3\cdot\frac{\pi}{4}$	$5\cdot\frac{\pi}{6}$	π
y	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$Dom\, f = \mathbb{R}$
$Im\, f = [-1, 1]$
f es 2π periódica

Funciones trigonométricas

Función coseno



$y = \cos x$

x	$-\pi$	$-5\cdot\frac{\pi}{6}$	$-3\cdot\frac{\pi}{4}$	$-2\cdot\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\cdot\frac{\pi}{3}$	$3\cdot\frac{\pi}{4}$	$5\cdot\frac{\pi}{6}$	π
y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$Dom\, f = \mathbb{R}$
$Im\, f = [-1, 1]$
f es 2π periódica

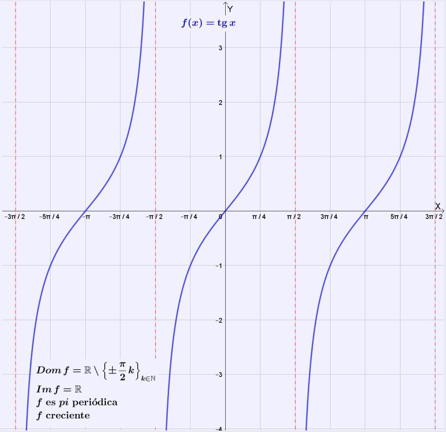
-4

Funciones trigonométricas

Función tangente

$y = \operatorname{tg} x$

x	y
$-\pi$	0
$-5 \cdot \frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$-3 \cdot \frac{\pi}{4}$	1
$-2 \cdot \frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{2}$	∞
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	∞
$2 \cdot \frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$3 \cdot \frac{\pi}{4}$	-1
$5 \cdot \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	0



$Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} k \right\}_{k \in \mathbb{N}}$

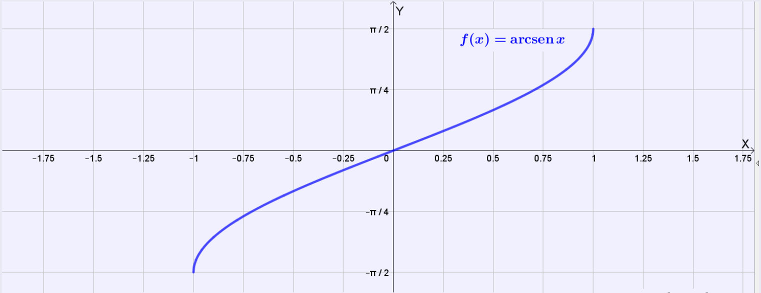
$Im\, f = \mathbb{R}$

f es *pi* periódica

f creciente

Funciones inversas de funciones trigonométricas

Función inversa de la función seno: Función arcoseno



$y = \operatorname{arcsen} x$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

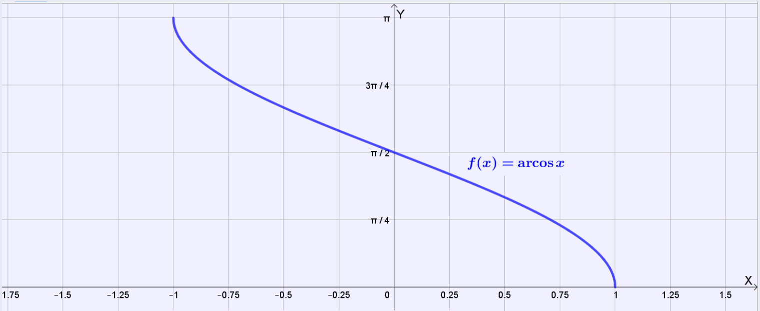
$Dom\, f = [-1, 1]$

$Im\, f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

f es creciente

Funciones inversas de funciones trigonométricas

Función inversa de la función coseno: Función arcocoseno



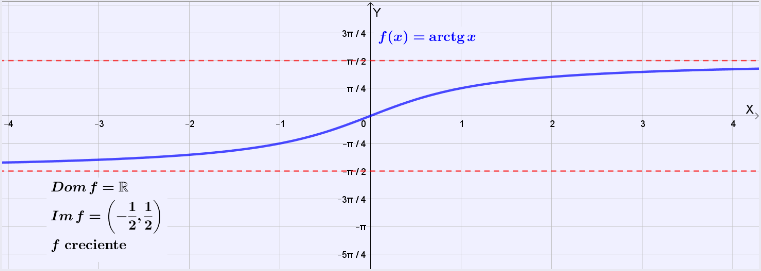
$y = \mathbf{arcos}\ x$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	π	$5\cdot\frac{\pi}{6}$	$3\cdot\frac{\pi}{4}$	$2\cdot\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$Dom\, f = [-1, 1]$
$Im\, f = [0, \pi]$
f **es decreciente**

Funciones inversas de funciones trigonométricas

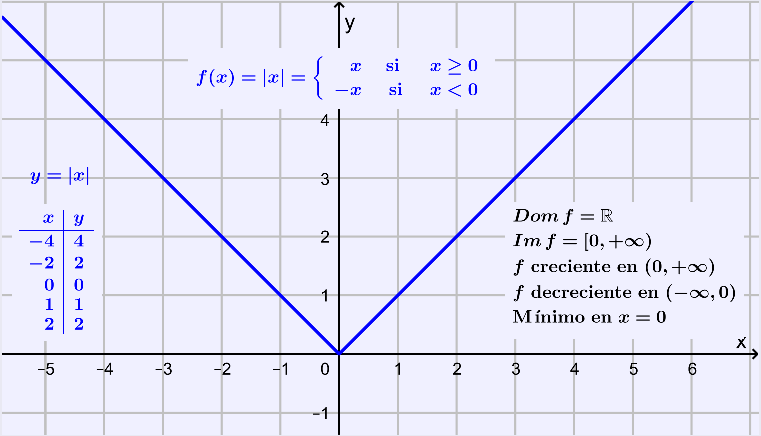
Función inversa de la función tangente: Función arcotangente



Otras funciones

Función valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



x	y
-4	4
-2	2
0	0
1	1
2	2

$Dom\, f = \mathbb{R}$

$Im\, f = [0, +\infty)$

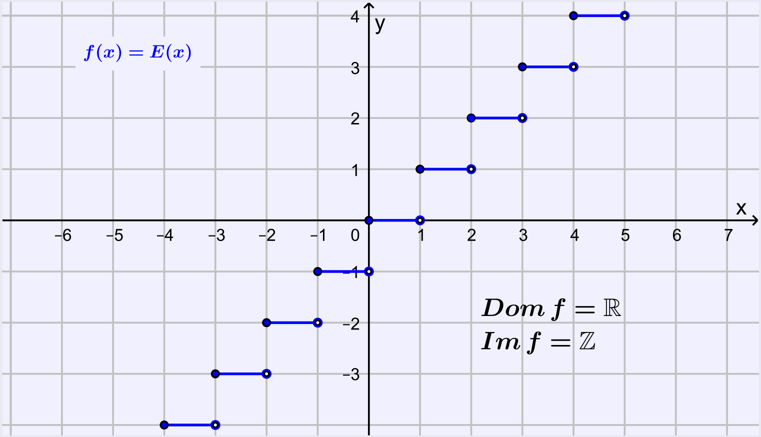
f creciente en $(0, +\infty)$

f decreciente en $(-\infty, 0)$

Mínimo en $x = 0$

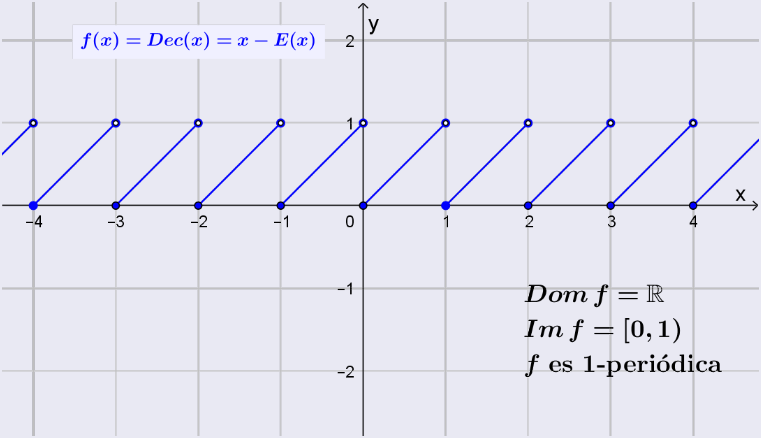
Otras funciones

Parte entera



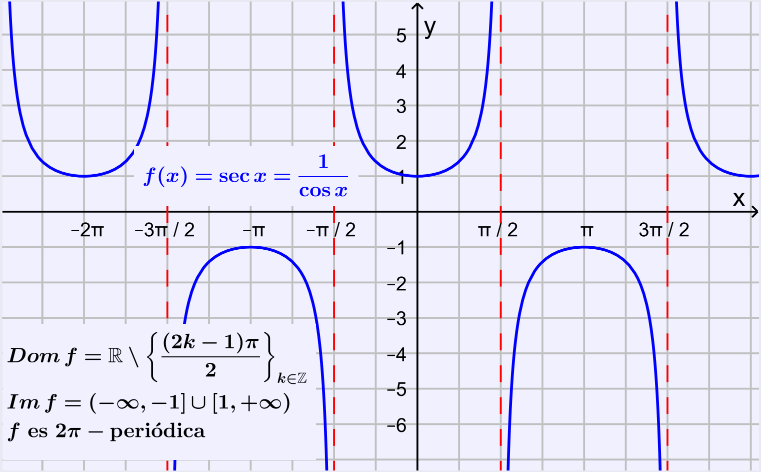
Otras funciones

Parte decimal



Otras funciones trigonométricas

Función secante



$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

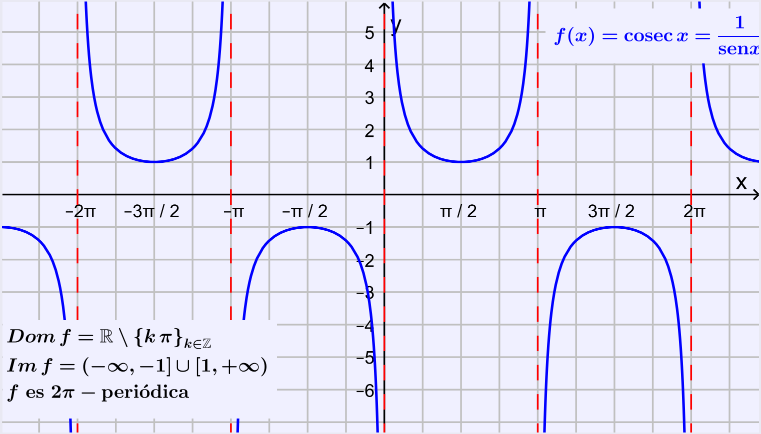
$$Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$Im\, f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

f es 2π − periódica

Otras funciones trigonométricas

Función cosecante



$f(x) = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

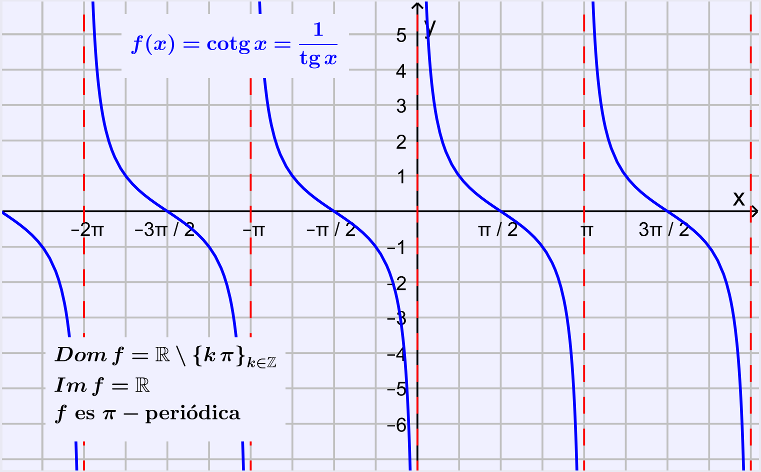
$Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

$Im\, f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

f es $2\pi -$ periódica

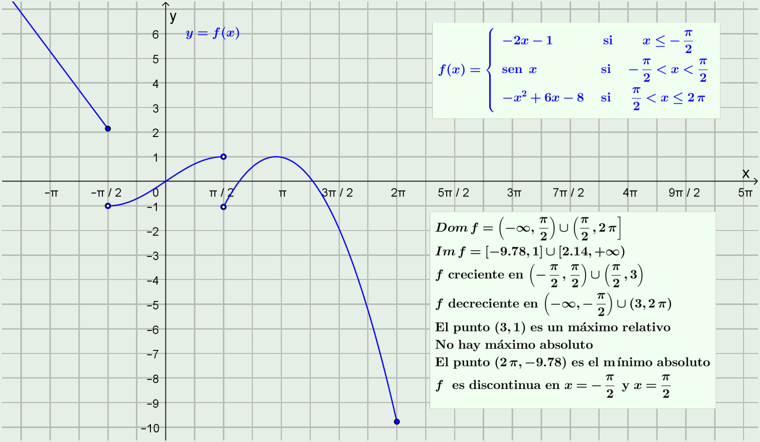
Otras funciones trigonométricas

Función cotangente



Funciones definidas a trozos

Ejemplo 13



$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si} \quad x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ \text{sen } x & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ -x^2+6x-8 & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$Dom\, f = \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

$Im\, f = [-9.78, 1] \cup [2.14, +\infty)$

f creciente en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$

f decreciente en $\left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right) \cup (3, 2\pi)$

El punto $(3, 1)$ es un máximo relativo

No hay máximo absoluto

El punto $(2\pi, -9.78)$ es el mínimo absoluto

f es discontinua en $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$

Funciones definidas a trozos

Ejemplo 14