Aplicaciones de las derivadas

Estudio de la monotonía y búsqueda de extremos relativos

IES O Couto

curso 2018-2019

BY NC SA
Silvia Fdez. Carballo

INFO ABOUT RIGHTS
1 903060 161782
www.safecreative.org/work

Estudio de la monotonía de una función

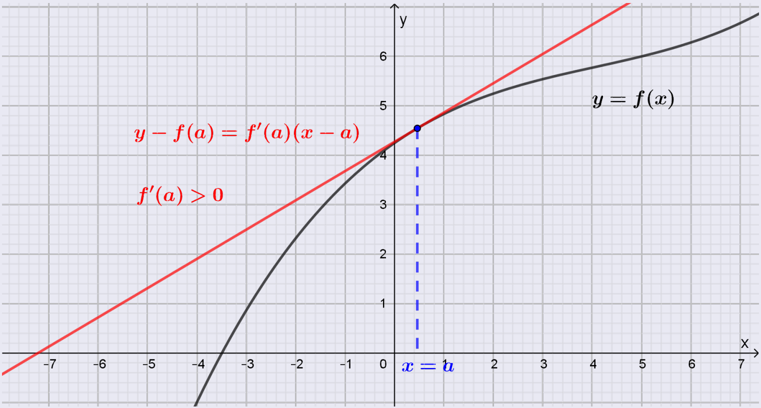
Sean:

- I un intervalo de números reales.
- $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en I.

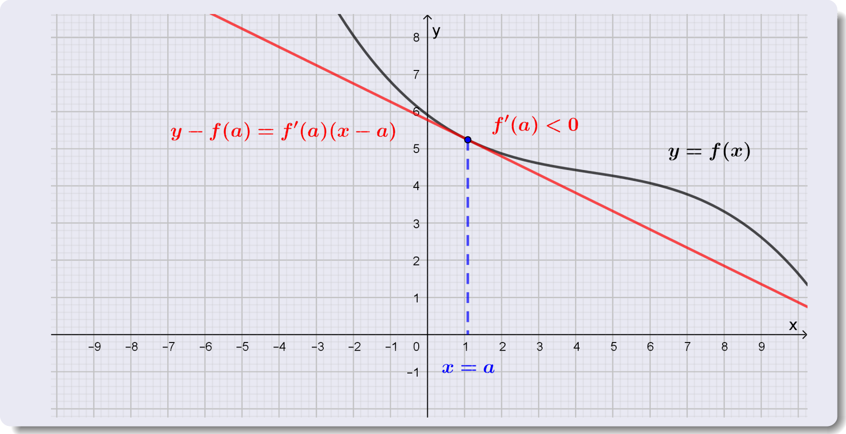
Entonces:

- $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I \iff f$ es creciente en I
- $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I \iff f$ es decreciente en I
- $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in I \iff f$ es constante en I

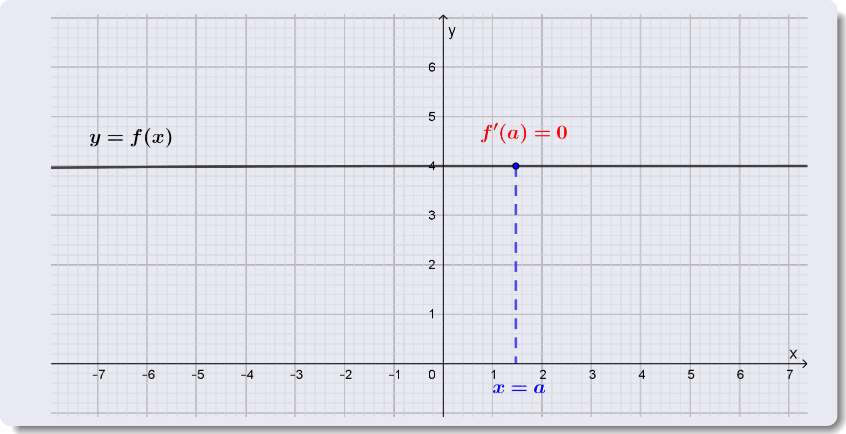
Ejemplo de función creciente



Ejemplo de función decreciente



Ejemplo de función constante



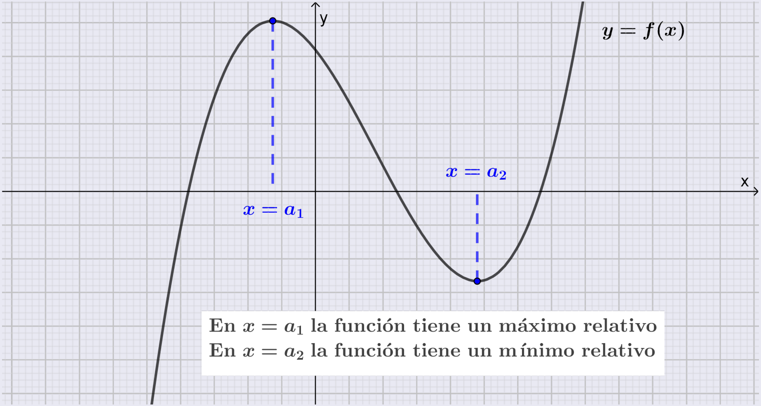
Extremos relativos

Definición de extremo relativo

- La función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = a$ si existe un intervalo I, centrado en $x = a$, en el que $f(a) \leq f(x) \;\; \forall x \in I$
- La función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = a$ si existe un intervalo I, centrado en $x = a$, en el que $f(a) \geq f(x) \;\; \forall x \in I$

Es decir, para que f tenga un extremo relativo en $x = a$, es necesario que en $x = a$ la función cambie de monotonía.

Ejemplo



En $x = a_1$ la función tiene un máximo relativo
En $x = a_2$ la función tiene un mínimo relativo

Condición necesaria para la existencia de un extremo relativo

Teorema

Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en I, y a es un punto interior del intervalo I, entonces siempre que f tenga un extremo relativo en $x = a$, necesariamente $f'(a) = 0$

Puntos críticos o puntos singulares de funciones derivables

Como consecuencia del teorema anterior, para localizar los extremos relativos de funciones derivables, se buscan los puntos críticos.

- Un punto $x = a$ se dice crítico si $f'(a) = 0$

Búsqueda de extremos relativos

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, con I un intervalo de números reales, y a un punto interior al intervalo I.

Caso 1: f es derivable en $x = a$

Si f es derivable en I, (y por tanto, también en $x = a$), y $f'(a) = 0$:

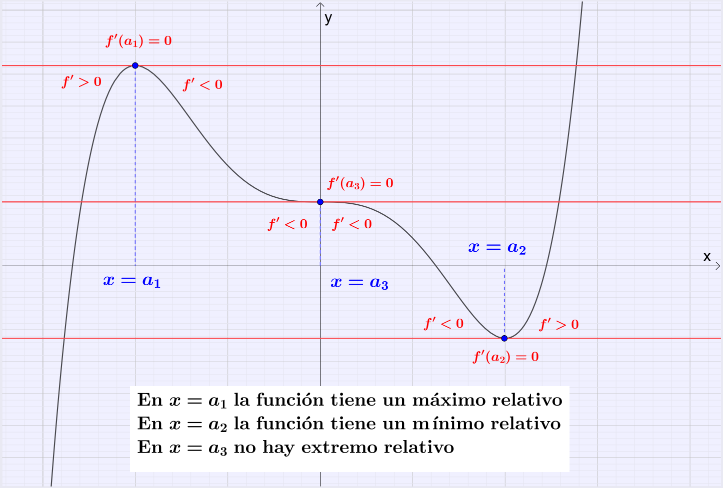
- $\left[\begin{array}{l} f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I,\; x < a \\ f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I,\; x > a \end{array}\right] \Longrightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = a$
- $\left[\begin{array}{l} f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I,\; x < a \\ f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I,\; x > a \end{array}\right] \Longrightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } x = a$
- En otro caso, no hay extremo relativo en $x = a$

Caso 2: f no es derivable en $x = a$

Si f es derivable en $I \setminus \{a\}$, pero es continua en $x = a$, y la derivada cambia de signo como en el punto anterior, f tiene un extremo relativo en $x = a$.

Ejemplo de búsqueda de extremos relativos de funciones derivables

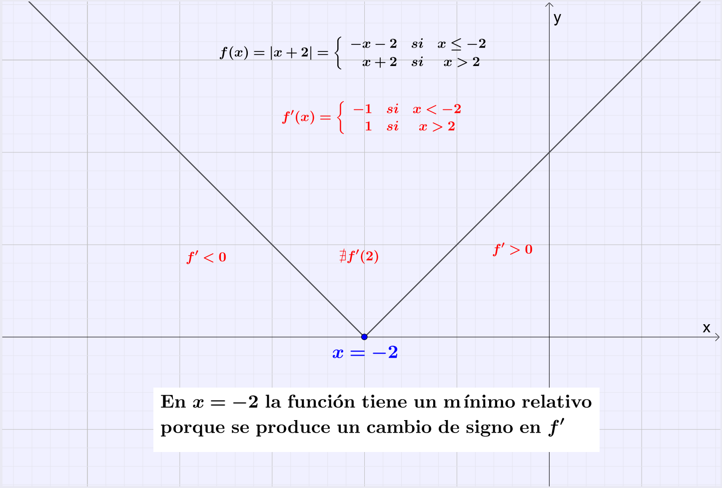
Caso 1: f derivable en $a \in I$



En $x = a_1$ la función tiene un máximo relativo
En $x = a_2$ la función tiene un mínimo relativo
En $x = a_3$ no hay extremo relativo

Ejemplo de búsqueda de extremos relativos de funciones no derivables

Caso 2: f no es derivable en $a \in I$



Ejemplo resuelto