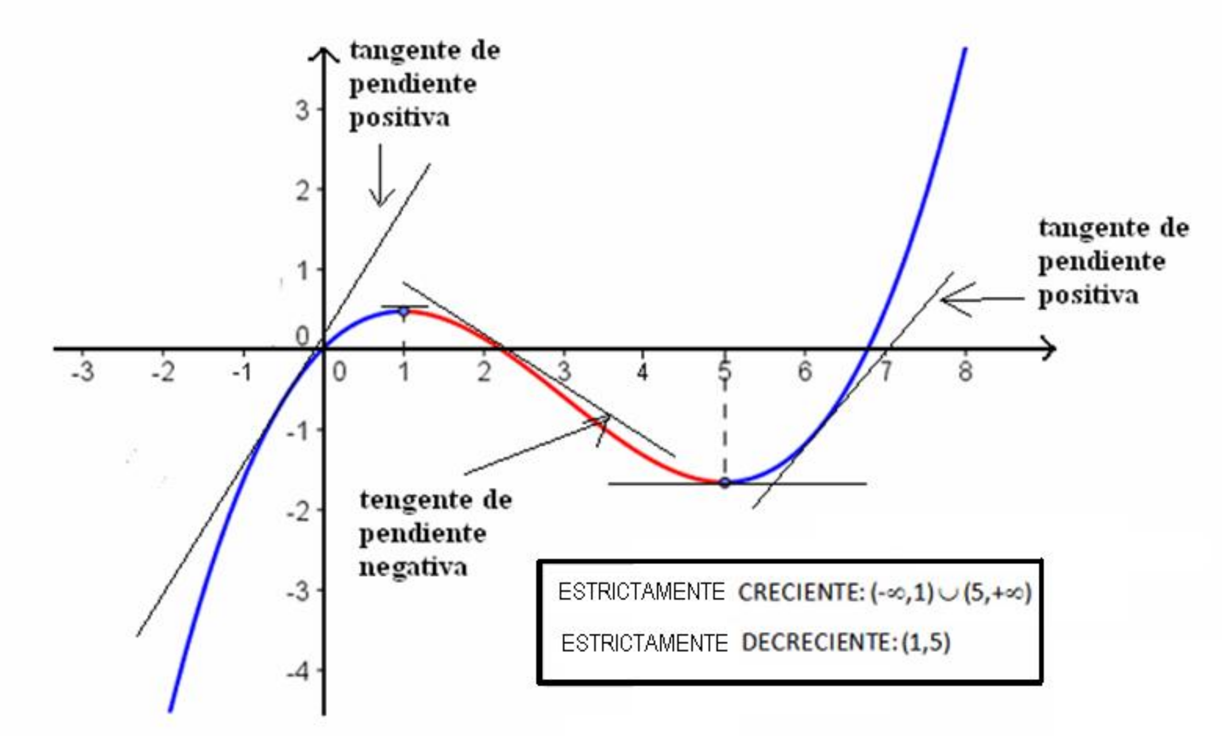
VI. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

Crecimiento y decrecimiento. Puntos singulares: máximos y mínimos.



- Teorema 1 (**condición suficiente**)

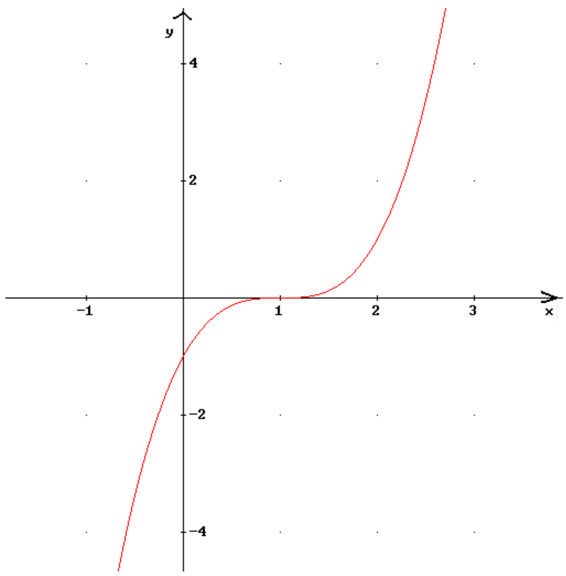
  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \rightarrow$ f es creciente en (a,b)

  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \rightarrow$ f es decreciente en (a,b)

- Teorema 2 (pero no suficiente para la condición necesaria existencia de máximos y/o mínimos)

  $$\left.\begin{array}{l}\text{f derivable en } x = a \\ \text{f tiene un mínimo (máximo) relativo en } x=a\end{array}\right\} \Rightarrow f'(a) = 0$$

  $f'(a) = 0$ No es condición suficiente;



Por ejemplo $f(x) = (x-1)^3$ (gráfica a la derecha)

Se tiene que $f'(x) = 3(x-1)^2$

$f'(x) = 0$ en $x = 1$ pero en $x = 1$ no tiene máximo ni mínimo. Los puntos en los que la derivada se hace cero son "candidatos" a máximos o mínimos, pero no tienen porqué serlo.

- Teorema 3 (condición suficiente para la existencia de máximos y/o mínimos)

  $f'(a) = 0$ y f es creciente a la izda. de $x=a$ y decreciente a la dcha. de $x=a$, entonces f tiene un máximo relativo en $x=a$.

  $f'(a) = 0$ y f es decreciente a la izda. de $x=a$ y creciente a la dcha. de $x=a$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x=a$.

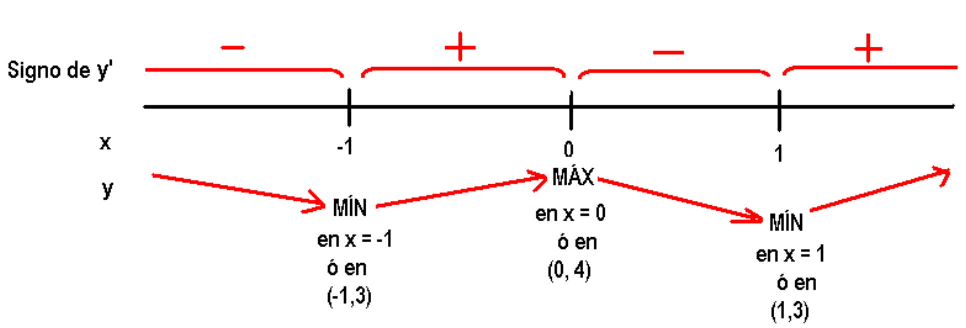
- Teorema 4 (condición suficiente para la existencia de máximos y/o mínimos)

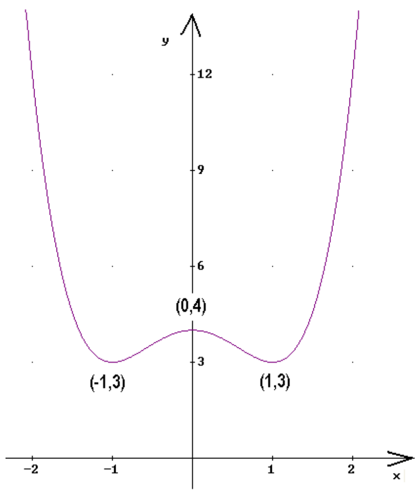
$$\left.\begin{array}{l} f'(a) = 0 \\ f''(a) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f tiene un máximo relativo en } x = a$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f tiene un mínimo relativo en } x = a$$

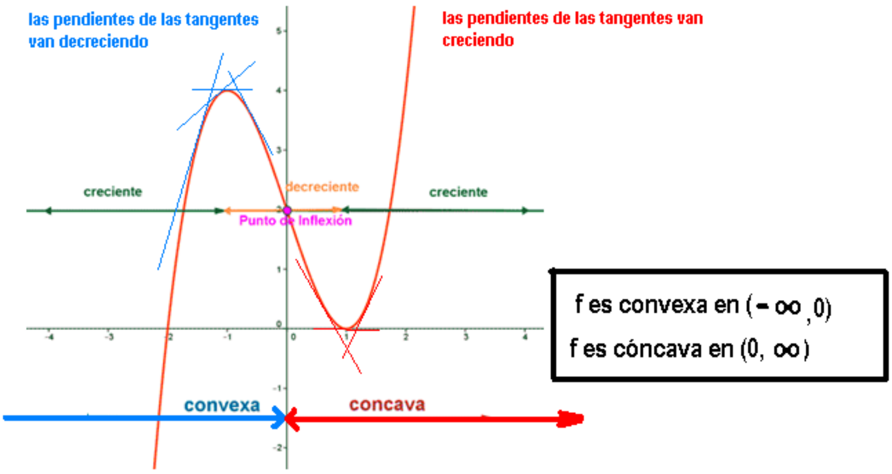
Ejemplo: $y = x^4 - 2x^2 + 4$

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = 1 \;$ y $\; x = -1$





Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión



- Teorema 5 (condición suficiente para la existencia de puntos de inflexión)

  $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \rightarrow$ f es convexa (cóncava hacia abajo) en (a,b)

  $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \rightarrow$ f es cóncava (cóncava hacia abajo) en (a,b)

- Teorema 6 (condición necesaria pero no suficiente para la existencia de punto de inflexión)

  $$\left.\begin{array}{l}\text{Existe } f''(a) \\ f \text{ tiene un punto de inflexión en } x=a\end{array}\right\} \Longrightarrow f''(a) = 0$$

  $f''(a) = 0$ No es condición suficiente;

- Teorema 7 (condición suficiente)

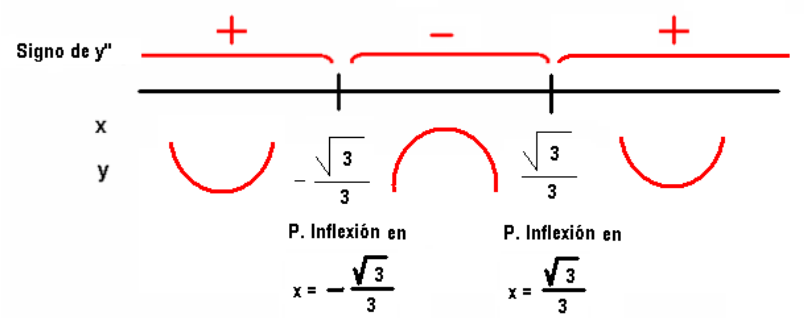
  $f''(a) = 0$ y f es cóncava (convexa) a la izda. de $x = a$ y convexa (cóncava) a la dcha. de $x = a$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

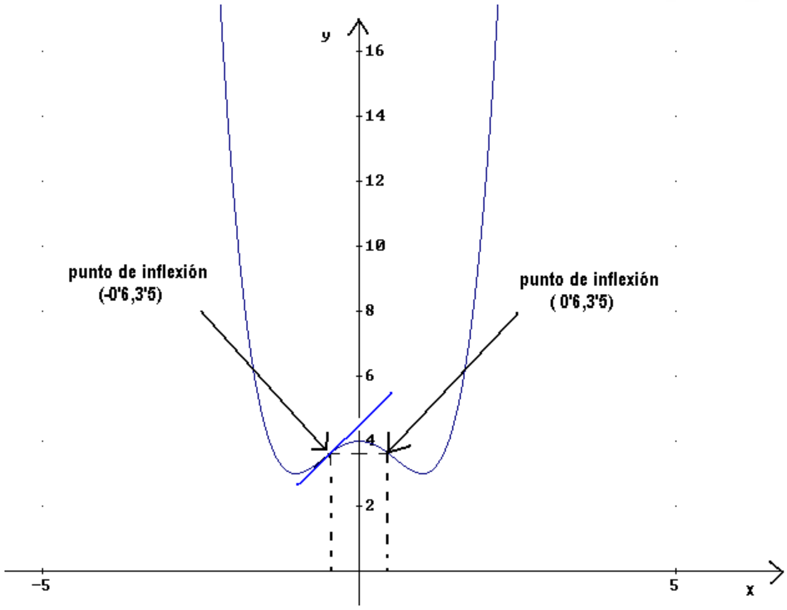
- Teorema 8 (condición suficiente para la existencia de máximos y/o mínimos)

  $$\left.\begin{array}{l} f''(a) = 0 \\ f'''(a) \neq 0 \quad) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión en } x = a$$

  Ejemplo: $y = x^4 - 2x^2 + 4$;

  $y' = 4x^3 - 4x \rightarrow y'' = 12x^2 - 4 = 0 \rightarrow 12x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$


Signo de y''
+
−
+
x
y
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
P. Inflexión en
$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
P. Inflexión en
$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$


y
16
14
12
10
8
6
4
2
−5
5
x
punto de inflexión
(-0'6,3'5)
punto de inflexión
(0'6,3'5)