Trigonometría

1. Introducción

La trigonometría es una parte de las matemáticas que estudia los ángulos, los triángulos y sus relaciones.

2. Ángulos

2.1. Unidades

Medir un ángulo es medir la apertura que hay entre cada uno de sus lados. Como todas las medidas, tenemos diferentes unidades. Las unidades de medida de los ángulos son:

- **Grados sexagesimales**: Son los que conocemos de toda la vida. Se obtienen de dividir una circunferencia en 360 partes. Su símbolo es º
- **Radianes**: Un radián es la apertura que existe entre dos semirrectas cuyo arco mide igual que ellas. Es la unidad del Sistema Internacional para medir ángulos y LA MÁS USADA.
- **Grados centesimales**: Se obtienen de dividir la circunferencia en 400 partes iguales. Casi no se usan.

La relación entre los ángulos y los radianes es:

SABER

$$180^{\mathbf{o}} = \pi \textbf{ radianes}$$

Usando esta relación y factores de conversión podemos transformar medidas de grados a radianes y viceversa. Ejemplo:

De grados a radianes:

$$270^o = 270\cancel{^o} \cdot \frac{\pi rad}{180\cancel{^o}} = \frac{270 \cdot \pi}{180} rad = \frac{3}{4} \pi rad$$

De radianes a grados:

$$2\pi rad = 2\pi \cancel{rad} \cdot \frac{180^o}{\pi \cancel{rad}} = \frac{2\cancel{\pi} \cdot 180^o}{\cancel{\pi}} = 360^o$$

***Ejercicio**: Calcula la medida en grados para los siguientes ángulos en radianes*:

a) 0 rad

b) $\pi/4$ rad

c) $\pi/3$ rad

d) $2\pi/3$ rad

***Ejercicio**: Calcula la medida en grados para los siguientes ángulos en radianes*:

a) 150º

b) 30º

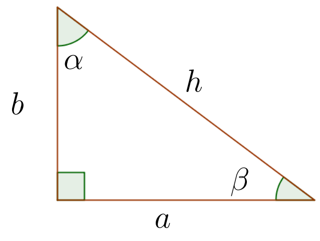
c) 90º

d) 45º

3. Razones trigonométricas

Entre los lados de los triángulos **RECTÁNGULOS** hay ciertas relaciones que se pueden establecer: las Razones trigonométricas.

Una razón es una división, así que las razones trigonométricas son las divisiones entre los lados de los triángulos rectángulos. Vamos a definir las tres razones fundamentales:

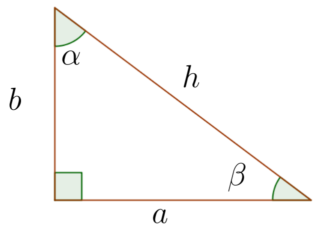


$$sen(\alpha) = \frac{\text{Cateto } \textbf{S}\text{eparado}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto } \textbf{C}\text{ontiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$tan(\alpha) = \frac{\text{Cateto Separado}}{\text{Cateto Contiguo}}$$

Ejemplo:



Para el ángulo α

$$sen(\alpha) = \frac{a}{h}$$

$$cos(\alpha) = \frac{b}{h}$$

$$tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

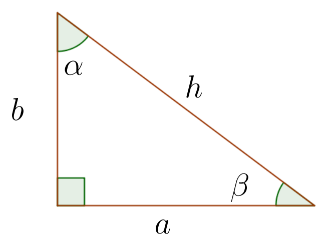
Para el ángulo β

$$sen(\beta) = \frac{b}{h}$$

$$cos(\beta) = \frac{a}{h}$$

$$tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

Se definen también las inversas de las razones trigonométricas, así como algunas relaciones entre ellas que es necesario SABER:



$$cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto } \textbf{S}\text{eparado}}$$

$$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto } \textbf{C}\text{ontiguo}}$$

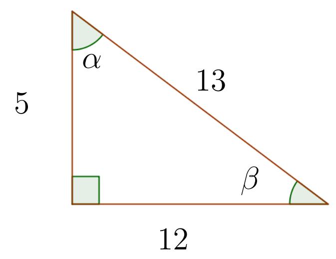
$$cotan(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{Cateto Separado}}$$

RECUERDA:

El **seno** y el **coseno** de un ángulo son siempre valores comprendidos entre **-1 y +1**

***Ejercicio resuelto**: Calcula las razones trigonométricas de los ángulos del siguiente triángulo*:

a) h=13cm;a=12cm;b=5cm



Para el ángulo α

$$sen(\alpha) = \frac{12}{13} \qquad cosec(\alpha) = \frac{13}{12}$$

$$cos(\alpha) = \frac{5}{13} \qquad sec(\alpha) = \frac{13}{5}$$

$$tan(\alpha) = \frac{12}{5} \qquad cosec(\alpha) = \frac{5}{12}$$

Para el ángulo β

$$sen(\beta) = \frac{5}{13} \qquad cosec(\beta) = \frac{13}{5}$$

$$cos(\beta) = \frac{12}{13} \qquad sec(\beta) = \frac{13}{12}$$

$$tan(\beta) = \frac{5}{12} \qquad cotan(\beta) = \frac{12}{5}$$

***Ejercicio**: Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de los siguientes triángulos*:

a) h=5cm; a=4cm; b=3cm

b) h=15cm; b=12cm; a=9cm

4. Razones trigonométricas de ángulos conocidos

Hay algunas razones trigonométricas que es conveniente que **SEPAMOS**. Se resumen en la siguiente tabla:

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No tiene	0	No tiene

Todos los ángulos iguales tienen las mismas razones trigonométricas. Las razones trigonométricas de otros muchos ángulos aparecen en tablas trigonométricas, o bien las da directamente la calculadora con las teclas :

$\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\text{tan}}$

4.1. Cálculo de ángulos sabidas sus razones trigonométricas

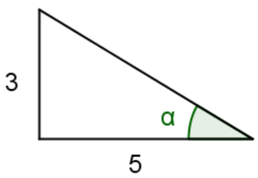
Al igual que si conocemos un ángulo sabemos sus razones trigonométricas, también podemos conocer el valor de un ángulo si sabemos cual es su seno, coseno o tangente, ¿cómo se hace esto?: Usando la calculadora o las tablas trigonométricas. Veamos primero cómo se despejan las razones trigonométricas:

$x = sen(\alpha) \Rightarrow \alpha = ArcSen(x)$ Con la calculadora: $\alpha = \boxed{shift}\ \boxed{\sin(x)}$

$x = cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = ArcCos(x)$ Con la calculadora: $\alpha = \boxed{shift}\ \boxed{\cos(x)}$

$x = tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = ArcTan(x)$ Con la calculadora: $\alpha = \boxed{shift}\ \boxed{\tan(x)}$

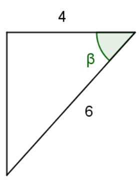
Ejercicio Resuelto*: Calcula α en el siguiente triángulo:*

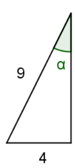


$$tan(\alpha) = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = ArcTan\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow alpha = \boxed{shift}\ \boxed{\tan}\ 3/5 \Rightarrow$$

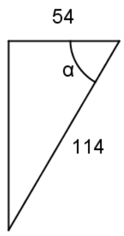
$$\alpha = 30{,}96º$$

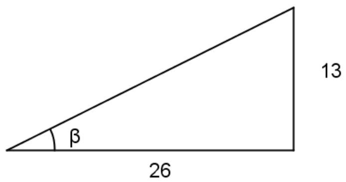
Ejercicio*: Halla el ángulo indicado de los siguientes triángulos rectángulos:*

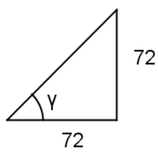
a) 

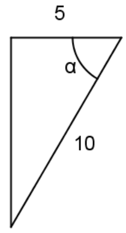
b) 

Ejercicio**: Halla el ángulo indicado en las siguientes figuras* ***sin usar la calculadora:

a) 

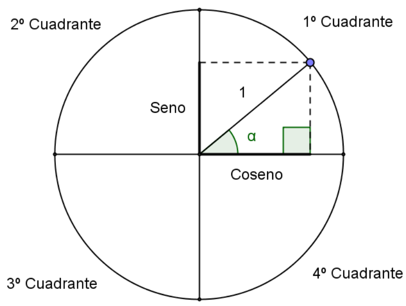
b) 

c) 

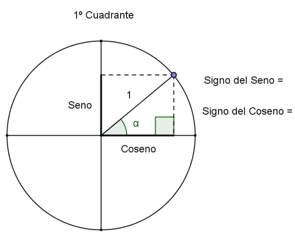
d) 

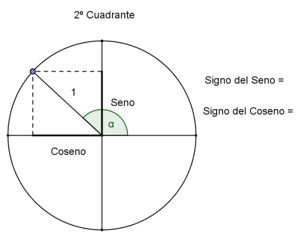
5. Representación gráfica de razones trigonométricas. La circunferencia goniométrica

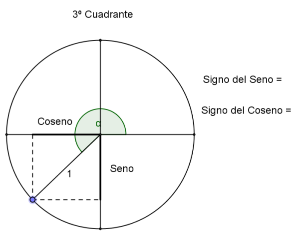
Una circunferencia **goniométrica** es una circunferencia normal y corriente pero que tiene como **radio 1**. En ella podemos dibujar cualquier ángulo. Veamos cómo se representan las razones trigonométricas en una circunferencia de este tipo:

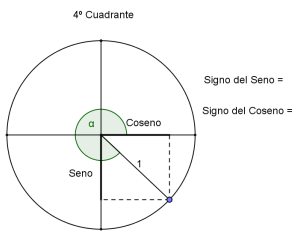


5.1. Signo de las razones trigonométricas según el cuadrante









5.2. Ecuación fundamental de la trigonometría

Hay una ecuación importantíiiisima que es necesario **SABER** muy pero que muy bien. Se llama *Ecuación Fundamental de la trigonometría*:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

A partir de ella se pueden obtener otras muchas expresiones que son muy útiles.
También es conveniente conocer la relación que mantienen las tres razones trigonométricas:

$$tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

5.3. Ejercicios cálculo de razones trigonométricas

1. Sabiendo que $\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{2}{3}$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, halla el resto de las razones trigonométricas.

2. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ y que α es un ángulo del 4º cuadrante, encuentra las otras razones trigonométricas.

3. Sabiendo que $\mathrm{sen}(\alpha) = -\frac{1}{4}$ y que α es un ángulo del tercer cuadrante, encuentra las demás razones trigonométricas. Repite lo mismo si α estuviese en el 4º cuadrante.

4. Sabiendo que $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ y que α está en el 2º cuadrante, halla las otras razones trigonométricas. Repite lo anterior si el ángulo estuviese en el 3º cuadrante. Podría α ser un ángulo del primer o del 4º cuadrante?. ¿Por que?

5. Si sabemos que $\tan\alpha = 1$ y que α está en el tercer cuadrante, encuentra las otras razones trigonométricas.

6. Si sabemos que $\tan\alpha = -1/2$ y que α está en el segundo cuadrante, calcula el resto de las razones trigonométricas

7. De un ángulo sabemos que $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ y $270^0 < \alpha < 360^0$. Calcula las demás razones trigonométricas.

8. Simplifica:

   a) $sen\alpha \cdot \dfrac{1}{\tan\alpha}$

   b) $\dfrac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}$

9. Utilizando la ecuación fundamental de la trigonometría y las relaciones entre las razones trigonométricas, demuestra las siguientes igualdades:

   a) $\tan\alpha \cdot sen\alpha = sec\alpha - \cos\alpha$

   b) $1 + cotan^2\alpha = cosec^2\alpha$

   c) $1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$

   d) $\dfrac{1 - sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + sen\alpha}$

   e) $\sec^2\alpha + \mathrm{cosec}^2\,\alpha = sec^2\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\,\alpha$

   f) $\tan^2\alpha - 1 = \mathrm{sen}^2\,\alpha \cdot \cos^2\alpha - \cos^4\alpha$

6. Paso al primer cuadrante

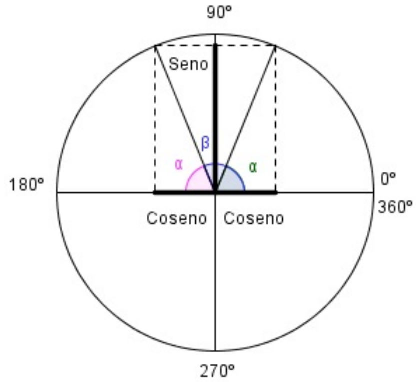
Los ejercicios de paso al primer cuadrante consisten en conocer las razones trigonométricas de ángulos que *a priori* parece que no sabemos, pero que se relacionan con las razones de los ángulos conocidos: 30º, 45º y 60º.

6.1. Paso del segundo al primer cuadrante

Si tenemos un ángulo del segundo cuadrante β, le faltará un poquito para llegar a 180º. Ese poquito que le falta es un ángulo que llamaremos α, y se calcula como:

$$\alpha = 180 - \beta$$

Este ángulo α es menor que 90º, es decir, es un ángulo del primer cuadrante. Los ángulos α y β y sus razones trigonométricas se dibujan en la circunferencia goniométrica como indica la figura, y podemos ver que dichas razones se parecen mucho y se relacionan.



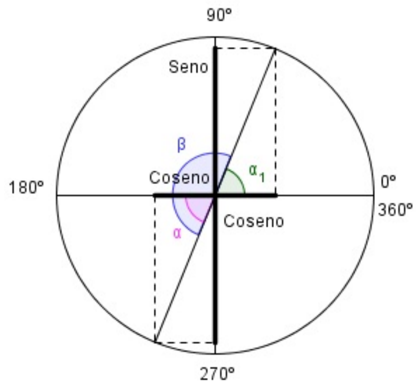
$$sen(180 - \alpha) = sen(\alpha)$$
$$cos(180 - \alpha) = -cos(\alpha)$$
$$tan(180 - \alpha) = -tan(\alpha)$$

6.2. Paso del tercer al primer cuadrante

De igual manera, si tenemos un ángulo del tercer cuadrante β, se pasa un poco de 180º, por tanto, podemos calcular cuánto se pasa y relacionarlo con un ángulo del primer cuadrante α de la forma:

$$\alpha = \beta - 180$$

Los ángulos y sus razones trigonométricas se representan y relacionan de la forma:



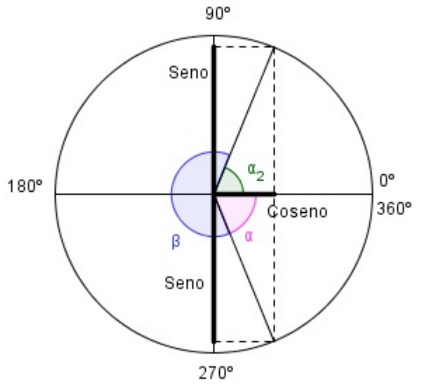
$$sen(180 + \alpha) = -sen(\alpha)$$
$$cos(180 + \alpha) = -cos(\alpha)$$
$$tan(180 + \alpha) = tan(\alpha)$$

6.3. Paso del cuarto al primer cuadrante

Por último, si tenemos un ángulo del segundo cuadrante β, le falta un poquito para llegar a 360º. Ese poquito que le falta será un ángulo que llamaremos α y se calcula como:

$$\alpha = 360 - \beta$$

Los ángulos y las razones trigonométricas de α y β se representan y relacionan como muestra la figura.



$$sen(360 - \alpha) = -sen(\alpha)$$
$$cos(360 - \alpha) = cos(\alpha)$$
$$tan(360 - \alpha) = -tan(\alpha)$$

Es conveniente darse cuenta que si en vez de medir los ángulos en sentido antihorario, los medimos en sentido horario,

$$\beta = -\alpha$$

6.4. Resumen de relaciones

Mostramos a continuación una tabla con la relación entre los ángulos conocidos: 30º 45º y 60º y otros del resto de los cuadrantes que tienen razones trigonométricas parecidas:

1ºC	2ºC	3ºC	4ºC
30º	150º	210º	330º
45º	135º	225º	315º
60º	120º	240º	300º

7. Ejercicios de paso al primer cuadrante

1. Relaciona los siguientes ángulos con un ángulo del primer cuadrante
   a) 160º   *b*) 210º   *c*) 310º   *d*) 100º

2. Calcula:
   a) Sen(150º)
   b) Cos(300º)
   c) Sen(315º)
   d) Tan(135º)
   e) Cos(210º)
   f) Sen(-45º)
   g) Tan(330º)
   h) Cos(150º)
   i) Cos(225º)
   j) Sen(120º)
   k) Cos(120º)
   l) Tan(120º)

3. Sabiendo que el $sen(\alpha) = 3/4$ y α está en el primer cuadrante, calcula:
   a) $cos(\alpha)$
   b) $tan(\alpha)$
   c) α
   d) $sen(180 - \alpha)$
   e) $cos(180 - \alpha)$
   f) $tan(180 - \alpha)$
   g) $sen(180 + \alpha)$
   h) $cos(180 + \alpha)$
   i) $tan(180 + \alpha)$
   j) $sen(360 - \alpha)$
   k) $cos(360 - \alpha)$
   l) $tan(360 - \alpha)$

4. Sabiendo que la $tan(\alpha) = 3/2$, y α está en el primer cuadrante, calcula:
   a) $sen(\alpha)$
   b) $cos(\alpha)$
   c) α
   d) $sen(180 - \alpha)$
   e) $cos(180 - \alpha)$
   f) $tan(180 - \alpha)$
   g) $sen(180 + \alpha)$
   h) $cos(180 + \alpha)$
   i) $tan(180 + \alpha)$
   j) $sen(360 - \alpha)$
   k) $cos(360 - \alpha)$
   l) $tan(360 - \alpha)$