Matemática Financeira

1. Introdución

Descontos, hipotecas, fondos de inversión...están presentes na nosa vida cotiá, por iso neste tema imos estudar como saber cal será a mellor oferta cando teñamos que facer uso de calquera delas.

2. Porcentaxes

Para calcular o porcentaxe dunha cantidade, multiplicamos esa cantidade polo tanto por cento dividido entre 100.

$$\%\ \boldsymbol{de\ C} = \frac{}{\mathbf{100}} \cdot \boldsymbol{C}$$

Recorda:

% significa "de cada cen" e outra forma de expresar as porcentaxes é en forma decimal, isto é, 24% $= \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{100}} = \mathbf{0,24}$

Nun problema de porcentaxes temos tres datos a cantidade Inicial C_o, o tanto % a, e a cantidade final.Vexamos un exemplo onde calcularemos o termo que falte.

<u>Exemplo</u>

Nunha tenda de electrodomésticos lánzase unha campaña promocional na que se permite o pago a prazos sen intereses, dos artigos que vende.

a) Adela mercou un televisor por 375€ e pagou 60% que cantidade lle queda sen pagar?
b) Xosé, que mercou o mesmo televisor, polo que pagou 225€. Qué tanto por cento pagou?
c) Uxía pagou 225€, o que supón un 30% do prezo total, canto custaba o televisor?

$a)Precisamos\ calcular\ o\ que\ lle\ queda\ coma\ pagou\ o\ 60\%\ se\ pagar\ lle\ queda\ o\ 40\%$

$co\ cal\ temos\ que\ facer\ o\ 40\%\ de\ 375 = 150€$

$b)\ O\ prezo\ do\ televisor\ é\ 375€\ e\ se\ pagaron\ 225€, temos\ que\ calcular\ o\ \%\ que\ pagou$

$que\ será\ (parte{:}\ total)\dfrac{225}{375}.100 = 60\%$

$c)Temos\ que\ o\ 30\%\ de\ C = 225 \Rightarrow C = \dfrac{225.100}{30} = 750€$

2.1 Incrementos e diminucións porcentuais

O **aumento porcentual** consiste en aumentar unha cantidade inicial C_o un a% e isto equivale a calcular:

$$(\mathbf{100} + \boldsymbol{a})\%\ \boldsymbol{de}\ \boldsymbol{C_o}$$

O número polo que se multiplica a cantidade inicial para obteres a cantidade final se lle chama **índice de variación.**

<u>Exemplo</u>

Unha estantería para o salón, antes de aplicar o 21% de IVA costa 1880€,cánto lle consta ao cliente? Cal é o índice de variación?

Se lle aplica un aumento do 21% $\Rightarrow (100 + 21\%) de\ 1880 = \frac{121}{100} \cdot 1880$=2274,80€

O índice de variación é : 1,21

A **diminución porcentual** consiste en diminuír unha cantidade inicial C_o un a% e isto equivale a calcular:

$$(\mathbf{100} - \boldsymbol{a})\%\ \boldsymbol{de}\ \boldsymbol{C_o}$$

O número polo que se multiplica a cantidade inicial para obteres a cantidade final se lle chama **índice de variación.**

<u>Exemplo 1</u>

Unha máquina de facer fotocopias custa 6000€ e ten un desconto do 15%, qué prezo pagarase por ela?Cal é o índice de variación?

Se lle aplica un desconto do 15% $\Rightarrow (100 - 15\%) de\ 6000 = \frac{85}{100} \cdot 6000$=5100€

O índice de variación é : 0,85

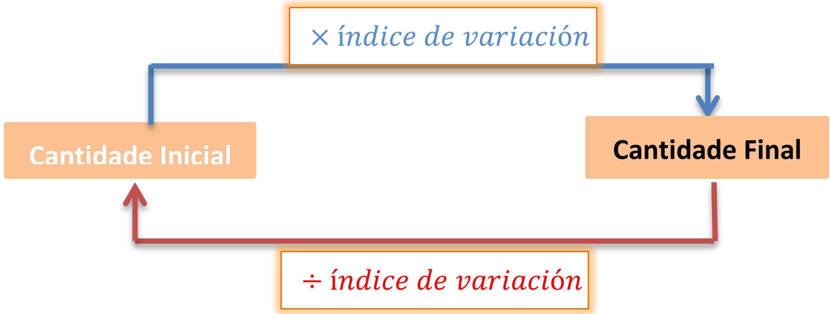
Exemplo 2

Paguei por un pantalón 50€ e fixéronme un descontó do 30%, Cal era o prezo inicial?

$$Se\ o\ desconto\ é\ do\ 30\%\ paguei\ o 70\%\ do\ pantalon\ iso\ equivale\ a\ 50€\ polo\ tanto:$$

$$50: (0{,}70) = 71{,}43€$$

Despois dos exemplos anteriores pódese concluír:



2.2 Porcentaxes encadeadas

Chamamos **porcentaxes encadeadas** a sucesivos aumentos ou diminucións porcentuais sobres unha cantidade**.**

A hora de facer estes exercicios temos que ter coidado cas cantidades as que lle temos que aplicar os tantos por cen vexamos un exemplo curioso.

Exemplo

Un frigorífico que custaba o ano pasado 1200€ aumentou o seu prezo nun 10%. Ao compralo este ano, nos rebaixaron un 10%. Cal é o prezo que imos pagar ? Cal é o tanto por cento que pagamos? ***Poderíamos pensar que o prezo é o mesmo****!!*

$Aumento\ do\ 10\%:\ 110\% = 1{,}10 (índice\ de\ variación)$

$Desconto\ do\ 10\%: 90\% = 0{,}90 (índice\ de\ variación)$

$Cantidade\ final = 1200 \cdot 1{,}10 \cdot 0{,}90 = 1188€$

$Índice\ de\ variación\ total = 1{,}10 \cdot 0{,}90 = 0{,}99$

$esto\ índica\ que\ se\ paga\ o\ 99\%\ do\ prezo\ inicial$

3. Problemas de interese

O **interese *I***, é unha cantidade de diñeiro que produce un capital depositado nunha entidade financeira nun determinado tempo.

O **rédito *r***, é o tanto por cento anual que paga a entidade financeira por depositar nel un diñeiro.

Na linguaxe coloquial usamos expresión do tipo "*un 3% de intereses*", cando en realidade nos estamos a referir ao rédito.

3.1 Interese Simple

O **interese simple *I***, é o beneficio que orixina unha cantidade de diñeiro denominada Capital, C_0,nun tempo expresado en anos ,*t*, a un rédito anual *r%.*

$$\boldsymbol{I = C_o \cdot r \cdot t}$$

O interese é simple cando os beneficios obtidos retíranse ao finalizar o período de tempo, sen reinvestilos. Polo tanto o capital sobre o que se reciben os intereses sempre é o mesmo.

Exemplo 1

Se depositan 3000€a un intereses simple do 6% anual durante dous anos. Qué capital obteremos ao finalizar ese tempo?

$C_o = 3000€$

$r = 6\%$

$t = 2anos$

$Calculamos\ os\ intereses\ \ I = C_o \cdot r \cdot t = 3000 \cdot 6\% \cdot 2 = 3000 \cdot 0{,}06 \cdot 2 =$

$= 360€$

$Capital\ final = 3000 + 360 = 3360€$

Exemplo 2

Se o banco ofrece un rédito do 3,5%anual e durante 5 anos obteranse 1050€ en intereses, cal foi o capital que se inverteu?

$r = 3{,}5\%$

$t = 5anos$

$I = 1050€$

$Temos\ que\ calcular\ o\ capital\ \ I = C_o \cdot r \cdot t \Rightarrow 1050 = C_o \cdot 3{,}5\% \cdot 5 \Rightarrow$

$$C_o = \frac{1050}{0{,}035 \cdot 5} = 6000€$$

Se o tempo que se deposita o diñeiro non é un ano, cóbrase a parte proporcional, e a fórmula varía e aparecen outras fórmulas pero o mellor e razoar a situación, vexamos un exemplo.

Exemplo

Depositanse 4500€ a un interese anual no 5,4% durante 3 meses, a canto ascenden ditos intereses?

$$C_o = 4500\ €$$

$$t = 3 meses$$

$$r = 5{,}4\%\ como\ un\ ano\ ten\ 12\ meses\ o\ novo\ r = \frac{5{,}4\%}{12}$$

$$I = 4500 \cdot \frac{5{,}4\%}{12} \cdot 3 = \frac{4500 \cdot 0{,}054 \cdot 3}{12} = 60{,}75€$$

3.2 Interese Composto

O **interese composto *I*,** os beneficios que orixinan unha cantidade de diñeiro e os seus intereses non se retiran o finalizar cada período de inversión.

Vexamos un exemplo para poderes deducir a fórmula:

Exemplo

Se depositamos nun banco unha cantidade C_o de euros a un 5% anual durante 3 anos cal é cantidade final?

1º ano obtemos :

$$C_1 = C_o + I = C_o + C_o.5\%.1 = C_0 \cdot (1 + 0{,}05)$$

2º ano obtemos:

$$C_2 = C_1 + I = C_1 + C_1.5\%.1 = C_1(1 + 0{,}05) = C_0(1 + 0{,}05)^2$$

3º ano obtemos:

$$C_3 = C_2 + I = C_2 + C_2.5\%.1 = C_2(1 + 0{,}05) = C_0(1 + 0{,}05)^3$$

Observamos que o expoñente coincide cos anos *t*

Co que podemos concluír: O Capital final, C_f, obtido ao investir un capital inicial, C_0, a un rédito, *r%,* durante un tempo, *t*, a interese composto é:

$$\boldsymbol{C_f = C_o(1 + r)^t}$$

Se o tempo *t,* non está expresado en anos a fórmula varía, xa que varía o rédito *r%*, e deberemos interpretar a fórmula.

O **período de Capitalización** é o tempo no que se aboan os intereses dun capital, a miúdo os intereses se aboan trimestralmente, mensualmente..., se chamamos "***n"*** o número de veces o ano que se aboan obtemos a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{C_f = C_o\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

Exemplo 1

Calcula o capital acumulado durante 10 anos con 12000€ colocados ao 4% anual, se os pagos son trimestrais.

$Temos\ que\ interpretar\ a\ fórmula, C_o = 12000.\ Coma\ os\ pagos\ son\ trimestrais$

$cada\ ano\ cobramos\ catro\ veces\ os\ intereses; polo\ que\ os\ períodos\ de\ capitalización$

$son\ 4\cdot 10 = 40, o\ rédito\ será\ trimestral\ \frac{4\%}{4} = 1\%, polo\ tanto\ a\ fórmula\ quédanos:$

$C_f = 12000\cdot\ (1+1\%)^{10\cdot 4} = 12000\cdot 1{,}01^{\ 40} = 17866{,}36€$

O capital acumulado é: 17866,36€

Exemplo 2

Calcula o tempo ao que deben estar prestados 1000€ ao 6% de interese composto anual, para que se convertan en 1504€.

$Aplicamos\ a\ fórmula\ \ 1504 = 1000\cdot(1+0{,}06)^t\ operamos\ e\ obtemos\ 1{,}504 = 1{,}06^t$

$esta\ ecuación\ chámase\ exponencial, e\ para\ resolvela\ deberemos\ aplicar\ os\ logaritmos$

$log1{,}504 =\ log1{,}06^t \Rightarrow log1{,}504 = tlog1{,}06 \Rightarrow t = \frac{log1{,}504}{log1{,}06} = 7{,}0042 \approx 7anos$

4. Capitalización. Anualidades de Capitalización

Capitalizarse é ir aumentando o capital que se ten en propiedade.

Unha ***anualidade de capitalización a***, é unha cantidade que se deposita anualmente nunha entidade financeira a interese composto para conseguir ao cabo de certo tempo un capital determinado.

Supoñamos que ao principio de cada ano se ingresa unha anualidade ***a*** e deséxase calcular o capital que se formou ao cabo de ***t*** anos, a un rédito *r %* anual de interese composto, como podemos ver na seguinte táboa:

Anualidade €	Anos	Capital
a	t	$a(1+r)^t$
a	$t-1$	$a(1+r)^{t-1}$
a	$t-2$	$a(1+r)^{t-2}$
...	...	...
a	2	$a(1+r)^2$
a	1	$a(1+r)$

Recorda:

A suma dos termos dunha progresión xeométrica, $\boldsymbol{{}_1, a_2, \dots, a_n}$ ***de razón r***,

$$\boldsymbol{S = \frac{{}_n \cdot r - {}_1}{r-1}}$$

O noso capital final será a suma dos termos da última columna que se trata dunha progresión xeométrica de razón (1+r) isto é:

$$C = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \dots + a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^t$$

Polo que podemos comprobar que nos atopamos nunha progresión xeométrica de razón $(r + 1)$, e aplicando a fórmula antes recordada obtemos que a suma é:

$$\boldsymbol{C = \frac{\cdot (1+r)^t \cdot (1+r) - a \cdot (1+r)}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r) \cdot [(1+r)^t - 1]}{r}}$$

Se o que queremos é calcular as anualidades que teremos que entregar usaremos a mesma fórmula despexando o valor da $\boldsymbol{a}$.

Exemplo

Unha entidade bancaria ofrece un plan de pensións de modo que durante 15 anos debemos achegar 600 euros ao 8% Que capital teremos ao finalizar o prazo?

$A\ anulidade\ \ a = 600€$

$r = 8\%$

$t = 15\ anos$

Aplicamos a fórmula anterior:

$$C = \frac{a \cdot (1+r) \cdot [(1+r)^t - 1]}{r} = \frac{600 \cdot (1+0{,}08) \cdot [(1+0{,}08)^{15} - 1]}{0{,}08} =$$

$$= \frac{600 \cdot 1{,}08 \cdot \left[1{,}08^{15} - 1\right]}{0{,}08}$$ = 1759,57€

Se os períodos de capitalización non son anuais a fórmula varía. No caso de depositar **"$\boldsymbol{n}$"** veces ao ano unha anualidade cun rédito *r%* durante *t* anos o capital será:

$$\boldsymbol{C = \frac{a\left(1+\frac{r}{n}\right) \cdot \left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} - 1\right]}{\frac{r}{n}}}$$

Un exemplo típico de capitalización son os plans de pensións, coma veremos nos exemplos seguintes.

Exemplo 1

Unha persoa ingresa 60€ mensuais nun plan de pensións ao 4%. Qué capital terá acumulado ao cabo de 30 anos?

$Mensualidade \quad a = 60€$

$Rédito \qquad r = 4\% = 0{,}04 \ \ iste \text{ é } anual \ no \ noso \ caso \ entre \ 12 \ meses$

$Tempo \qquad t = 30 \ anos \ cada \ ano \ ten \ 12 \ \ meses \ os \ períodos \ serán \ 12 \cdot 30$

$$C = \frac{60(1+\frac{0{,}04}{12})\left[\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{12\cdot 30} - 1\right]}{\frac{0{,}04}{12}} = 41782€$$

Exemplo 2

Podemos aforrar todos os anos 500€, nun plan de xubilación que nos ofrece uns intereses do 6% anual, canto tempo deberemos pagar para obteres un capital de 12336€?

$Anualidade \quad a = 500€$

$Rédito \qquad r = 6\%$

$Capital \ final = 12336€$

Aplicando a fórmula $12336 = \frac{500(1+0{,}06)[(1+0{,}06)^t - 1]}{0{,}06} \Rightarrow$

$12336 \cdot 0{,}06 = 500(1{,}06)[(1{,}06)^t - 1] \Rightarrow$

$740{,}16 = 530[(1{,}06)^t - 1] \Rightarrow 1{,}40 = [(1{,}06)^t - 1] \Rightarrow$

$2{,}40 = 1{,}06^t \Rightarrow Ecuación \ exponencial \ aplicamos \ de \ novo \ logaritmos$

$$log2{,}40 = log1{,}06^t \Rightarrow t = \frac{log2{,}40}{log1{,}06} = 15{,}0246 \ldots \approx 15 \ anos$$

5. Créditos. Anualidades de Amortización

Un **crédito** é unha cantidade de diñeiro que se pide prestado e que se debe devolver cun determinado interese nun certo tempo.

Amortizar un crédito é devolver a cantidade pedida e os seus intereses.

A **débeda,** que se debe pagar dunha cantidade prestada D, a un *r %* durante *t* anos nun único pago é:

$$Dédeda\ total = D(1 + r)^t$$

Unha **anualidade de amortización *a***, é a cantidade que se aboa cada ano para pagar con ela a débeda e os intereses que xenera.

Vexamos ca axuda da seguinte táboa como obter a fórmula.

- A débeda total é: $D(1 + r)^t$
- As anualidades que se van pagando van xenerando uns intereses compostos que cas seguintes anualidades van pagando a débeda.

Anualidade €	Anos que produce	Capital +intereses
a	$t - 1$	$a(1 + r)^{t-1}$
a	$t - 2$	$a(1 + r)^{t-2}$
a	$t - 3$	$a(1 + r)^{t-3}$
...	...	...
a	1	$a(1 + r)$
a		a

A cantidade que se lle paga a entidade é a suma dos termos da última columna que coma no anterior apartado trátase dunha progresión xeométrica de razón, (1+r), dita suma deberá coincidir ca débeda e os seus intereses así que obtemos:

$$\mathrm{D} \cdot (1 + \mathrm{r})^{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{a} \cdot (1 + \mathrm{r})^{\mathrm{t}-1} \cdot (1 + \mathrm{r}) - \mathrm{a}}{(1 + \mathrm{r}) - 1} = \frac{a[(1 + r)^t - 1]}{r}$$

Se despexamos o valor da anualidade que é o que nos interesa obtemos:

$$= \frac{\boldsymbol{D \cdot r \cdot (1+r)^t}}{\boldsymbol{(1+r)^t - 1}}$$

Coma nos demais casos, os pagos poderán realizarse ao ano, ao trimestre....O exemplo máis típico de crédito son as hipotecas e os pagos realízanse mensualmente, sendo $\boldsymbol{``n"}$ o número de pagos a fórmula nos queda:

$$= \frac{\boldsymbol{D \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}}{\boldsymbol{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} - 1}}$$

Exemplo 1

Un préstamo de 90000€ cun interese do 9,5% anual deberase devolver en 25 anos. Cal é a couta anual?

$D = 90000€$

$r = 9{,}5\%\ anual$

$t = 25anos\ temos\ todos\ os\ datos\ aplicamos\ a\ fórmula$:

$$a = \frac{90000(1+0{,}095)^{25}0{,}095}{(1+0{,}095)^{25}-1} = 9541{,}37€$$

Ca calculadora pódese facer a operación toda xunta pero teremos que ter coidado coas parénteses.

Exemplo 2

Calcula a mensualidade que teremos que pagar para devolver 60000€ ao 3,5% de intereses composto durante 10 anos.
$D = 60000€$

$r = 3{,}5\%\ anual\ o\ seres\ mensual$ é $\frac{3{,}5}{12}$

$t = 10anos\quad n = 12plazos$

$Agora\ os\ períodos\ de\ amortización\ son\ mensuais\ aplicamos\ na\ fórmula\ cambia\ o\ rédito$:

$$a = \frac{60000\left(1+\frac{0{,}035}{12}\right)^{10\cdot 12}\frac{0{,}035}{12}}{\left(1+\frac{0{,}035}{12}\right)^{10\cdot 12}-1} = 593{,}32€$$

Outra aplicación dentro deste apartado será a elaboración de Táboas de amortización, estas conteñen información como:

- Datas de cobro de cada anualidade.
- Parte da anualidade destinada a amortizar intereses.
- Parte da anualidade destinada a amortizar capital(débeda).
- A anualidade.
- A débeda pendente despois de cada cobro.

Vexamos un exemplo da elaboración dunha táboa de amortización:

Exemplo

Elabora a táboa de amortización dun préstamo de 22000€ ao 8,5% anual durante 6 anos. A data do préstamo comeza no 2014.

$Os\ datos\ son$:

$D = 22000€$

$r = 8{,}5\% = \frac{8{,}5}{100} = 0{,}085$

$t = 6anos$

$Calculemos\ as\ anulidades\ que\ temos\ que\ facer\ cada\ ano\ para\ amortizar\ o\ prestamo$

$a\ fórmula\ é\ \ a = \frac{\boldsymbol{D \cdot r \cdot (1+r)^t}}{\boldsymbol{(1+r)^t - 1}}\ \ a = \frac{22000 \cdot 0{,}085 \cdot 1{,}085^6}{1{,}085^6 - 1} = 4830{,}92€\ a\ pagar$

$intereses\ dos\ 22000\ no\ primeiro\ ano, 2015\ \Rightarrow I = 22000 \cdot 0{,}085 = 1870€$

$Capital\ amortizado\ 4830{,}92 - 1870 = 2960{,}92€\ o\ primeiro\ ano$

$Capital\ pendente\ 22000 - 2960{,}92 = 19039{,}08€\ e\ así\ sucesivamente\ cada\ ano$:

Anos	Anualidade€	Intereses€	Capital amortizado€	Capital pendente€
2014				22000
2015	4830,92	1870	2960,92	19039,08
2016	4830,92	1618,32	3212,60	15826,48
2017	4830,92	1345,25	3485,67	12340,81
2018	4830,92	1048,97	3781,95	8558,86
2019	4830,92	727,50	4103,42	4455,45
2020	4830,92	378,71	4452,21	0