BOLETÍN DE EXERCICIOS Nº 3.

Exercicio 1.

a) $8,0999\ldots \in \mathbb{Q}$

b) $1,223334444\ldots \in \mathbb{I}$

c) $\sqrt{15} \in \mathbb{I}$

d) $6,\widehat{126} \in \mathbb{Q}$

e) $2,5 \in \mathbb{Q}$

f) $-11 \in \mathbb{Z}$

Exercicio 2.

a) $\frac{301}{200}$ e $\frac{302}{200}$

Este exercicio é de resposta aberta, xa que entre dous números racionais existen infinitos racionais.

$\frac{301}{200} = 1,505$

$\frac{302}{200} = 1,51$

Posibles solucións (soamente son un exemplo xa que hai infinitas).

$\frac{3011}{2000}$, $\frac{3012}{2000}$ e $\frac{3013}{2000}$

b) $\sqrt{5}$ e $\sqrt{5} + \frac{1}{10}$

Sucede o mesmo que no apartado anterior. Resposta aberta.

$\sqrt{5} = 2,2360679....$

$\sqrt{5} + \frac{1}{10} = 2,2360679.... + 0,1$

Entón: $\sqrt{5} + \frac{1}{100}$, $\sqrt{5} + \frac{2}{100}$ e $\sqrt{5} + \frac{3}{100}$

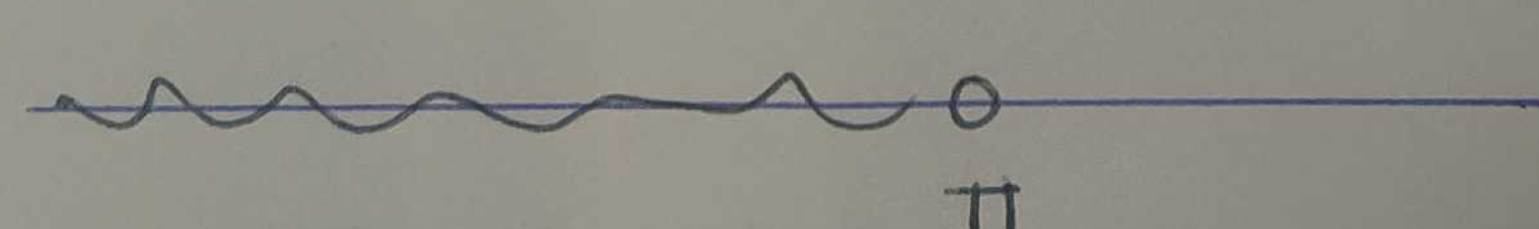
Exercicio 3.

$3 < \frac{2827}{900} < \pi < \frac{22}{7}$

Exercicio 4.

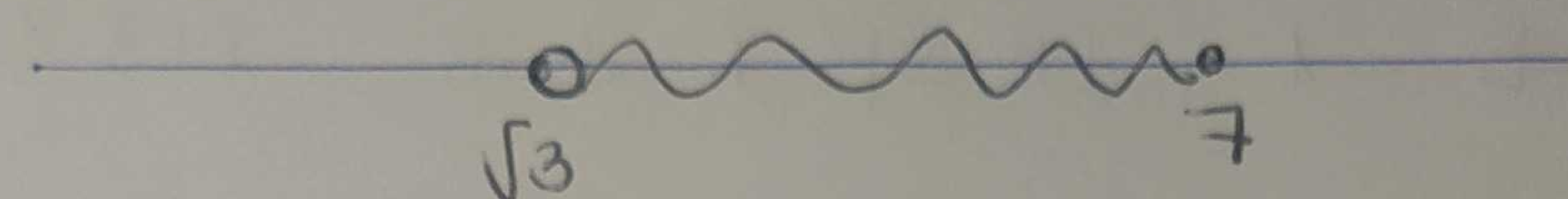
a) Números menores que π.

$(-\infty, \pi) = \{x \,/\, x < \pi\}$



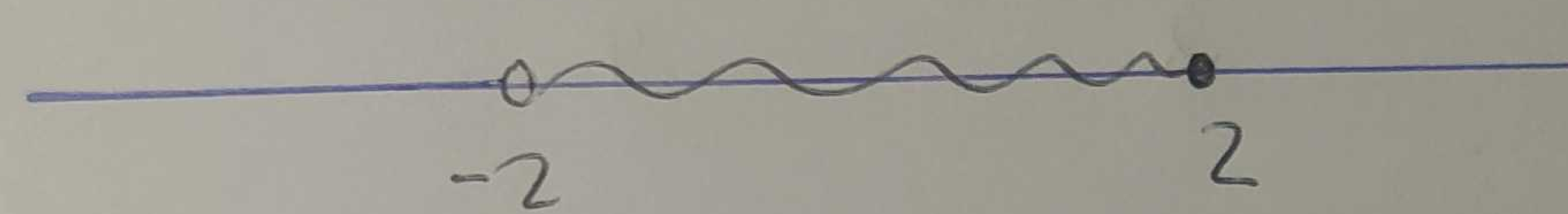
b) Números maiores qe $\sqrt{3}$ e menores ou iguais qe 7.

$(\sqrt{3}, 7) = \{x / \sqrt{3} < x \leq 7\}$



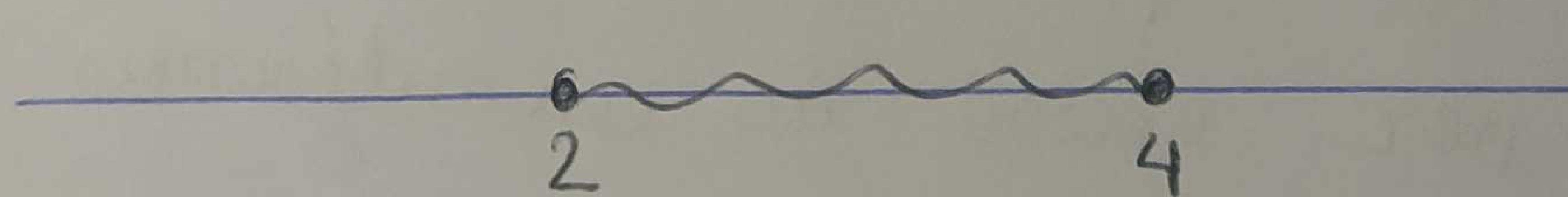
c) Números menores o iguales qe 2 y mayores qe -2.

$(-2, 2] = \{x / -2 < x \leq 2\}$



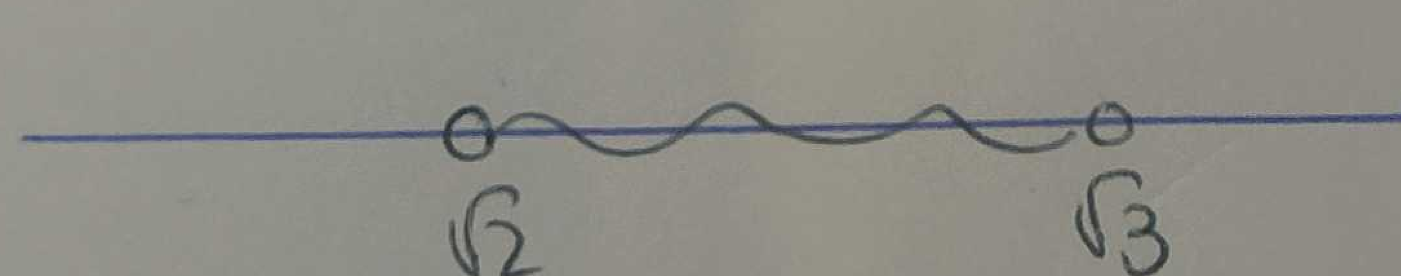
d) Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos.

$[2, 4] = \{x / 2 \leq x \leq 4\}$



e) Números comprendidos entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

$(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{x / \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$



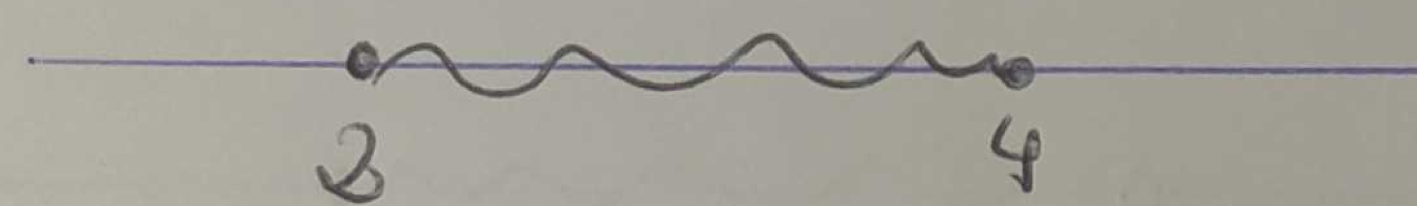
Exercicio 5.

$\{x : |x-3| \leq 1\}$

$|x-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq |x-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1+3 \leq x-3+3 \leq 1+3$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

$[2,4] = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$



Exercicio 6.

$\sqrt{3} = 1{,}7320\,5080\ldots$

Aproximación por defecto ás dezmilésimas: 1,7320

Aproximación por exceso ás dezmilésimas: 1,7321

Aproximación por defecto ás cenmilésimas: 1,73205

Aproximación por exceso ás cenmilésimas: 1,73206

Exercicio 7.

Resposta aberta.

Exemplo:

Valor real = 12,5

Valores aproximados: 12 e 13.

Erro absoluto $= |V_{exacto} - V_{aproximado}| = E_a$

Erro relativo $= \dfrac{E_a}{V_{exacto}} = E_r$

Erro absoluto $= |12{,}5 - 12| = 0{,}5$

Erro relativo $= \dfrac{0{,}5}{13} = 0{,}0385$

Exercicio 8.

Para poder calcular os erros relativos e absolutos é necesario coñecer o valor real, polo tanto, non se pode calcular.

As cotas de erro serán:

$$E_a = \left| \frac{1}{2 \cdot 10^{-1}} \right| = 5$$

$$E_r = \left| \frac{5}{310 - 5} \right| = 0{,}016$$

Exercicio 9.

a) $8{,}5 \cdot 10^{-6}$

b) $5 \cdot 10^{12}$

c) $3{,}194 \cdot 10^{10}$

d) $4{,}79 \cdot 10^{-10}$

Exercicio 10.

a) $(5,2 \cdot 10^3 + 4,75 \cdot 10^2) : 8,05 \cdot 10^{-4} = 6,45968 \cdot 10^6$

b) $3,79 \cdot 10^8 \cdot (7,73 \cdot 10^4 - 6,54 \cdot 10^2) = 2,92966 \cdot 10^{13}$

Exercicio 11.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$

FALSO. Debido a que $(-2)^4 = 16$

b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$

FALSO. Xa que $4^8 = 65.536$

c) $\sqrt[3]{1000.000} = \pm 1000$

FALSO. Debido a que $(-1000)^3 = -1000.000.000$

d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

FALSO. O único número que cumpre a condición

é $(-2)^5 = -32$

Exercicio 12.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ e $\sqrt{3^3}$

$\sqrt[4]{3^6} = \sqrt[4]{3^6}$

$\sqrt{3^3} = \sqrt[4]{3^6}$

Son equivalentes

$\sqrt[4]{3^6} = \sqrt{3^3}$

b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ e $\sqrt{2}$

$\sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[10]{2^{20}}$

$\sqrt{2} = \sqrt[10]{2^5}$

Non son equivalentes

$\sqrt[5]{2^{10}} \neq \sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{36}$ e $\sqrt{6}$

$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{36}$

$\sqrt{6} = \sqrt[4]{6^2}$

Son equivalintes

$\sqrt{6} = \sqrt[4]{36}$

d) $\sqrt[4]{5^{10}}$ e $\sqrt{5^4}$

$\sqrt[4]{5^{10}} = \sqrt[4]{5^{10}}$

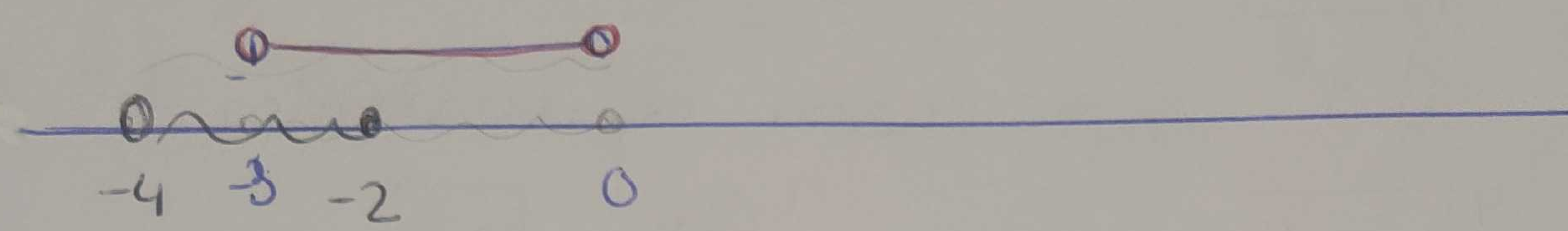
$\sqrt{5^4} = \sqrt[4]{5^8}$

Non son equivalentes

$\sqrt[4]{5^{10}} \neq \sqrt{5^4}$

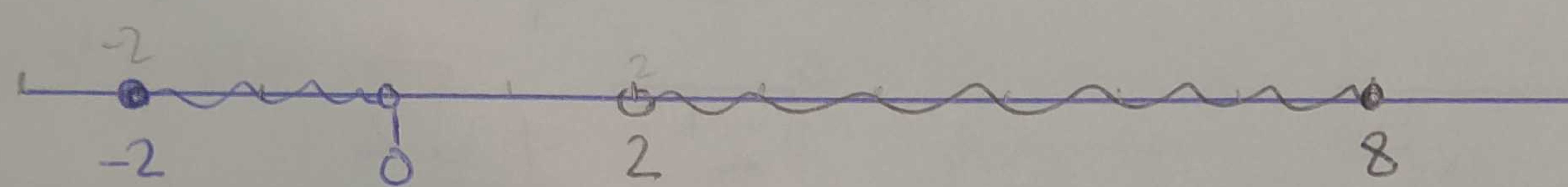
Exercício 13.

a) $(-4,-2] \cup (-3,0) = (-4,0)$



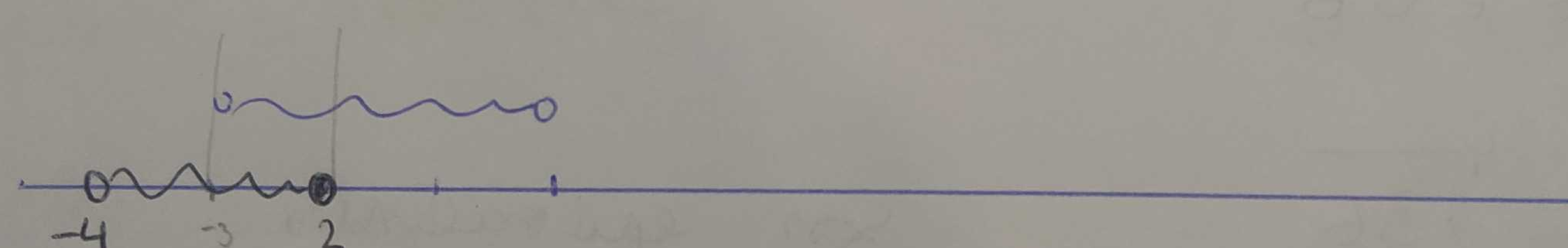
$(-4,0) = \{x / -4 < x < 0\}$

b) $(2,8] \cup [-2,0) = [-2,0) \cup (2,8]$



$[-2,0) \cup (2,8] = \{x / -2 \leq x < 0 \cup 2 < x \leq 8\}$

c) $(-4,2] \cap (-3,0) = (-3,-2]$



$(-3,-2] = \{x / -3 < x \leq -2\}$

d) $(2,8] \cap [-2,0) = \phi$

Exercício 14.

a) $[-1,13] = (-\infty,13] \cap [-1,+\infty)$

b) $[0,27) = [0,+\infty) \cap (-\infty,27)$

c) $(0,100) = (0,+\infty) \cap (-\infty,100)$

d) $[18,+\infty)$

e) $(0,11.000] = (0,+\infty) \cap (-\infty,11.000]$

Exercício 15.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a^6}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{a^6}} = \dfrac{1}{a}$

b) $\sqrt[4]{32a^5b^{-8}c^{-12}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^5a^5}{b^8c^{12}}} = \dfrac{2a}{b^2c^3}\sqrt[4]{2a}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^4}{81b^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3a^4}{3^4b^3}} = \dfrac{2a}{3b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{3}}$

d) $\dfrac{-\sqrt[3]{8a^3b^5c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6b^4}} = \dfrac{-\sqrt[3]{2^3a^3b^5c^{-2}}}{-\sqrt[3]{2^5a^6b^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3a^3b^5}{2^5a^6b^4c^2}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{b}{2^2a^3c^2}} = \dfrac{1}{a}\sqrt[3]{\dfrac{b}{2^2c^2}}$

e) $\sqrt[6]{72 \cdot a^7 b^{-12}} = \sqrt[6]{\frac{2^3 \cdot 3^2 a^7}{b^{12}}} = \frac{a}{b^2}\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2 a}$

f) $\left[\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right]^{-1/2} = \left[a^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}} = a^{1/2} = \sqrt{a}$

Exercício 16.

a) $\frac{\sqrt[4]{2^3} \cdot 2^{-4} \cdot \sqrt[3]{2}}{2^2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-\frac{5}{2}}} = \frac{2^{3/4} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{1/3}}{2^2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{-5/2}} =$

$= \frac{2^{\frac{3}{4} - 4 + \frac{1}{3}}}{2^{2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}}} = \frac{2^{\frac{9-48+4}{12}}}{2^{\frac{4+1-5}{2}}} = \frac{2^{-35/12}}{2^0} =$

Racionalizo

$= \frac{1}{\sqrt[12]{2^{35}}} = \frac{1}{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^{11}}} = \frac{2^{1/12}}{2^2 \cdot 2^{11/12} \cdot 2^{1/12}}$

$= \frac{\sqrt[12]{2}}{2^3}$

d) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-1/2} = \left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{3^4}}}\right)^{-1/2} =$

$= \left(\sqrt{14+\sqrt{7\;3}}\right)^{-1/2} =$

$= \left(\sqrt{14+\sqrt{4}}\right)^{-1/2} = \left(\sqrt{14+2}\right)^{-1/2} = \left(\sqrt{16}\right)^{-1/2} =$

$= 4^{-1/2} = \dfrac{1}{(2^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{16}}}} =$

$= \sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+\sqrt[4]{2^4}}}} = \sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{47+2}}}$

$= \sqrt{6+\sqrt[3]{20+\sqrt{49}}} = \sqrt{6+\sqrt[3]{20+7}} =$

$= \sqrt{6+\sqrt[3]{27}} = \sqrt{6+\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

b) $\left(81^{1/4} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right) : \sqrt{3} =$

$= \left((3^4)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right) : \sqrt{3} =$

$= \left(3 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right) : \sqrt{3} =$

$= (3 \cdot 3^{-1/4} \cdot 3^{-1/8}) : 3^{1/2} = 3^{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}} : 3^{1/2}$

$= 3^{\frac{8-2-1}{8}} : 3^{1/2} = 3^{5/8} : 3^{1/2} =$

$= 3^{\frac{5}{8} - \frac{1}{2}} = 3^{\frac{5-4}{8}} = 3^{1/8} = \sqrt[8]{3}$

Exercício 17.

a) $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{(3+\sqrt{2})}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2^5}}{2}$

b) $\frac{7\sqrt{7}-7}{\sqrt[3]{7}} = \frac{(7\sqrt{7}-7)}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{(7\sqrt{7}-7)\sqrt[3]{7^2}}{7} =$

$= (\sqrt{7}-1)\sqrt[3]{7^2}$

c) $\frac{3\sqrt{5}-2}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{(3\sqrt{5}-2)}{\sqrt[4]{5^3}} \cdot \frac{5^{1/4}}{5^{1/4}} = \frac{3\sqrt[4]{5^3}-2\sqrt[4]{5}}{5}$

d) $\frac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt[5]{-5^3}} = \frac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt[5]{(-1)\cdot 5^3}} = -\frac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt[5]{5^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{5^2}}{\sqrt[5]{5^2}} =$

$= -\frac{(3\sqrt{5}-1)\sqrt[5]{5^2}}{5} = -\frac{3\sqrt[10]{5^9}-\sqrt[5]{5^2}}{5}$

Exercicio 18.

a) Falso. Os números irracionais non se poden escribir en forma de fracción.

b) Falso. Ahai números reais que son irracionais xa que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

c) Verddadeiro. $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$ xa que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

d) Falso. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

e) Verdadeiro. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ como os números racionais son reais si que hai números reais que son racionais ($\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$).

f) Falso. Contraexemplo $\sqrt{3}$ é un número decimal pero non é racional (é irracional).

g) Verdadeiro. ten infinitas cifras decimais non periódicas.

h) Falso. Contraexemplo 2'5 é un decimal exacto e non ten infinitas cifras decimais que se repiten.

i) Verdadeiro. Pola propia definición de número racional.

Exercicio 19.

a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{ab}$

FALSO.

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} \neq \sqrt[nm]{ab}$ xa que

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = a^{1/n}\cdot b^{1/m} = a^{\frac{m}{n.m}}\cdot b^{\frac{n}{m.n}} =$

$= \sqrt[m.n]{a^m\cdot b^n}$

b) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{ab}$

FALSO.

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} \neq \sqrt[n.m]{ab}$ xa que

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[n.m]{a^m.b^n}$ 7

c) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

FALSO

$\sqrt[n]{a+b} = (a+b)^{1/n} \neq a^{1/n}+b^{1/n} = \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[m]{b^m} = \sqrt[m]{(a.b)^m}$

FALSO.

$a.\sqrt[m]{b^m} \neq \sqrt[m]{(a.b)^m}$ xa que

$a.\sqrt[m]{b^m} = a.b \neq \sqrt[n]{a^m . b^m} = a^{m/n} . a^{m/n}$

e) $\sqrt{a}\ \sqrt{a}.\sqrt{a}\sqrt{b} = a\sqrt{a.b}$

VERDADEIRO

$\sqrt{a}\ \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a^2}\,a\sqrt{b} = a\sqrt{a.b}$

f) $a\sqrt{b+c} = \sqrt{ab+ac}$

FALSO.

$a\sqrt{b+c} \neq \sqrt{ab+ac} \rightarrow a\sqrt{b+c} = \sqrt{a^2b+a^2c} =$

$= \sqrt{a^2(b+c)}$

g) $\sqrt[4]{a^8b^2} = a\sqrt{b}$

FALSO

$\sqrt[4]{a^8b^2} \neq a\sqrt{b}$ xa que $\sqrt[4]{a^8b^2} = a^2\sqrt{b}$.

h) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

FALSO $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b \rightarrow \sqrt{a^2+b^2+2ab} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b$.