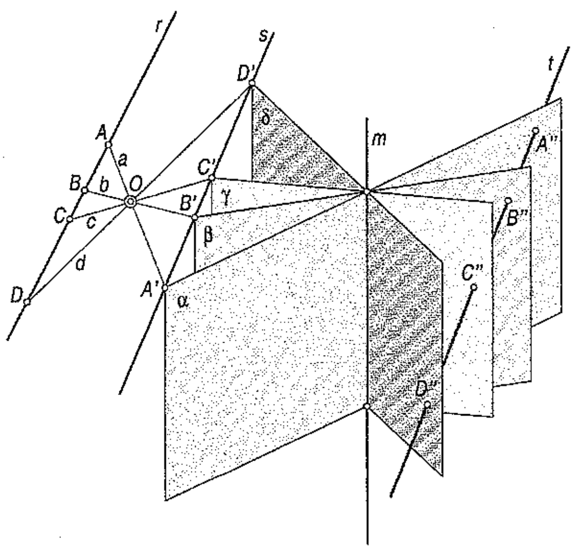

Fig. 17.

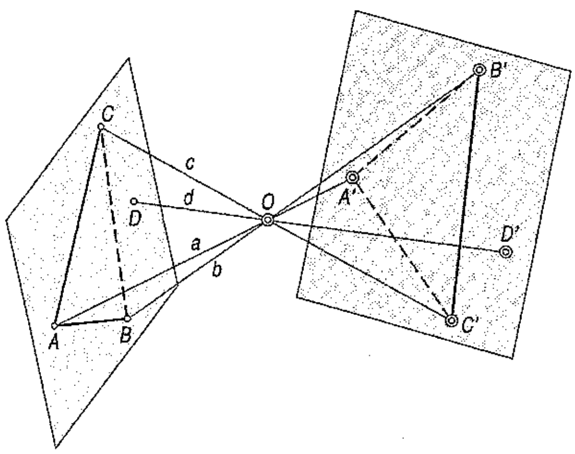

Fig. 18.

5. Haces y secciones proyectivos

Sea la serie rectilínea *A*, *B*, *C* y *D* contenida en la recta *r* y el punto *O*, exterior a ésta de la **Fig.** 17. Proyectando la citada serie desde el punto *O* se obtiene el haz de rectas *a*, *b*, *c* y *d*.

Al seccionar este haz por otra recta *s* se produce otra serie rectilínea *A'*, *B'*, *C'* y *D'*.

Si se proyecta esta última serie desde una recta *m*, no coplanaria con *s*, tenemos un haz de planos, α, β, γ y δ cuya arista es la recta *m*, que al seccionarlo por otra recta *t*, no coplanaria con *m*, dará otra serie *A''*, *B''*, *C''* y *D''*.

Todas estas formas de primera categoría, series y haces, se dice que son proyectivos entre sí.

Del mismo modo, mediante proyecciones y secciones sucesivas se puede pasar de una forma de segunda categoría *ABCD* a otras, *abcd*, *A'B'C'D'*,... etc., que son entre ellas proyectivas (**Fig.** 18).

De lo anterior se puede enunciar:

Dos formas de primera o de segunda categoría se llaman proyectivas entre sí cuando se obtienen una de otra por una sucesión de proyecciones y secciones.

La transformación que permite pasar de la primera a la segunda se dice que es inversa de la que transforma la segunda en la primera. Estas transformaciones se llaman proyectivas.

6. Homografía

Se denomina homografía a cualquier transformación proyectiva que establece una correspondencia entre dos formas geométricas, de modo que a un elemento, punto o recta, de una de ellas le corresponde otro elemento de la misma especie, punto o recta, de la otra.

Transformaciones **homográficas** son: la **traslación**, las **simetrías**, el **giro**, la **homotecia**, así como la **homología** y, su caso particular, la **afinidad**, que se estudian a continuación.

7. Homología plana

Es una transformación homográfica resultante de efectuar una proyección desde un punto, en la que a cada uno de los puntos y de las rectas de una figura plana le corresponden, respectivamente, un punto y una recta de su figura homológica, de modo que:

1°. Las parejas de puntos homológicos *A* y *A'*, *B* y *B'*,... etc., están alineados con otro punto fijo *O*, llamado **centro de homología**.

2°. Las parejas de rectas *r* y *r'*, *s* y *s'*,... etc., se cortan en puntos pertenecientes a una recta fija *e*, llamada **eje de homología**.

En la **Fig.** 19 al triángulo *ABC* le corresponde el *A'B'C'* en una homología de centro *O* y eje *e* y se cumplen las dos condiciones establecidas: las parejas de puntos homológicos A y A', B y B' y C y C' pertenecen a rectas que concurren en O, llamadas rayos de homología, y, por otra parte, las rectas r y s se cortan, respectivamente, con sus homológicas r' y s' en los puntos $1 \equiv 1'$ y $2 \equiv 2'$ del eje. La recta t, que pasa por los puntos A y B, y su homológica t', que contiene a A' y B', son paralelas al eje, por tanto, cumplen la condición de cortarse en un punto de éste que, en este caso, se trata del punto impropio o del infinito.

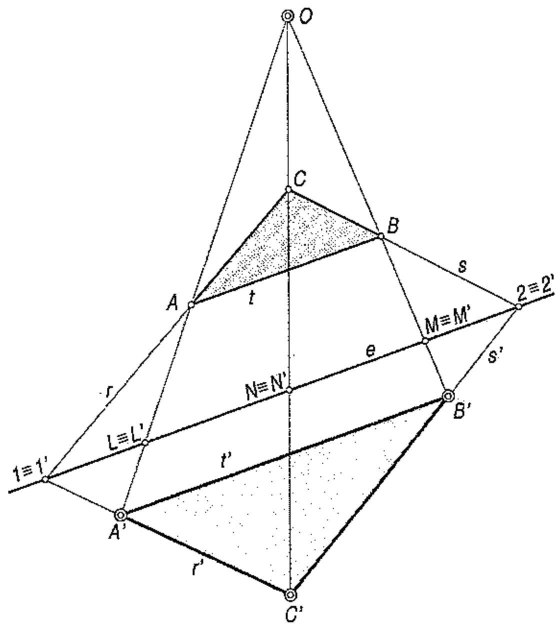

Fig. 19.

8. Elementos dobles en la homología

Como puede comprobarse en la **Fig.** 19 la homología es una transformación de **haz doble**, conjunto de rectas que pasan por su centro O, ya que la recta OA coincide con OA', la OB con OB',... etc., y de **serie lineal doble**, conjunto de puntos donde el eje e corta al haz doble anterior. Por tanto, los puntos dobles, es decir, homológicos de sí mismos, son el centro de homología O y los que pertenecen al eje e.

En consecuencia:

- Si una recta corta al eje, su homológica también lo cortará en el mismo punto.
- Si una figura es tangente al eje, su homológica también lo será en el mismo punto.
- Si una figura no tiene puntos comunes con el eje, su homológica tampoco los tendrá.
- Si una figura pasa por el centro O, su homológica también pasa por él. Si estas figuras son curvas, serán tangentes en el citado centro.

En una homología hay, además, algunas rectas dobles, estas son: el eje, que, por lo visto anteriormente, lo es punto a punto, y las rectas que forman el haz concurrente en O, aunque sólo tienen dos puntos dobles, el propio punto O y los puntos $L \equiv L'$, $M \equiv M'$, $N \equiv N'$,... etc., donde cortan al eje e (**Fig.** 19).

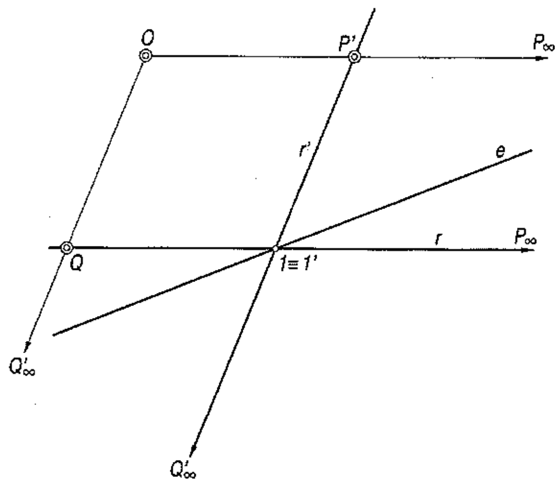

Fig. 20.

9. Rectas límites

En una homología se puede calcular el punto homológico de un punto impropio o del infinito.

Sea la homología de la **Fig.** 20 definida por su centro O, el eje e y la pareja de rectas r y r'. El homológico del punto P_∞, impropio de la recta r, debe pertenecer a r' y estar alineado con O y P_∞, por lo tanto, P' es el punto de intersección con r' de la paralela a r por O.

Del mismo modo, el punto Q, homológico de Q'_∞, punto impropio de la recta r', será la intersección con r de la paralela por O a r'.

Apliquemos lo anterior a los puntos impropios o del infinito de figuras homológicas entre sí.

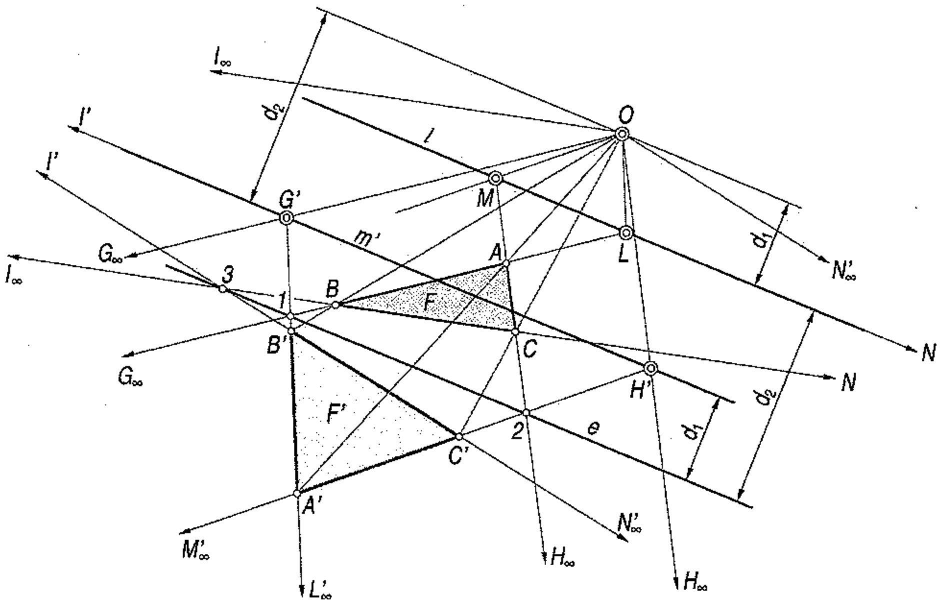

Fig. 21.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la Fig. 21 se corresponden en una homología de centro O y eje e. Los puntos impropios asociados al primero, G_∞, H_∞ e I_∞, tienen como homológicos, respectivamente, G', H' e I' que pertenecen a una recta m', en la que se encuentran los homológicos de todos los puntos impropios de la figura F.

Repitiendo la operación con la figura F', triángulo $A'B'C'$, a la que se asocian los puntos impropios L'_∞, M'_∞ y N'_∞, sus homológicos, L, M y N pertenecen a la recta l, lugar geométrico de los homológicos de los puntos impropios de la figura F'.

Ambas rectas, m' y l se llaman **rectas límites** y son las homológicas de las rectas impropias asociadas, respectivamente, a las figuras F y F', es decir, m' es la homológica de la recta m, recta impropia asociada a F, y l lo es de l', recta impropia asociada a F'. Esta es la razón por la que **las dos rectas límites son paralelas al eje e**, ya que, cada una de ellas, debe concurrir con su homológica en un punto de éste.

Otra propiedad importante de las rectas límites es que cada una de ellas dista del eje lo mismo que la otra del centro de homología y a la inversa. La distancia d_1 de m' al eje e es la misma que hay de l a O, pero del mismo modo, la distancia d_2 de m' a O es la misma que hay de l al eje e. Esto es fácilmente verificable si observamos los paralelogramos $OG'1L$ y $OH'2M$ de la Fig. 21. En ambos casos el primer punto es el centro de homología, el segundo pertenece a m', el tercero se halla en el eje e y el cuarto se encuentra en l.

Si, como ocurre en la **Fig.** 21, la recta l no corta a la figura F ni m' corta a F', la homológica de una figura cerrada es otra figura cerrada. Obsérvese que siguen siendo cerradas aunque l corte a F' o, como ocurre en este caso, m' corta a F.

Cuando una de las figuras F o F' tiene un vértice en l o en m', respectivamente, su homológica es una figura abierta con un punto impropio (**Fig.** 22).

El homológico del punto C, que pertenece a la recta límite l, es, por la definición anterior, un punto impropio. Por tanto, las rectas $A'C'_\infty$ y $B'C'_\infty$ deben cortarse en el infinito, luego son paralelas.

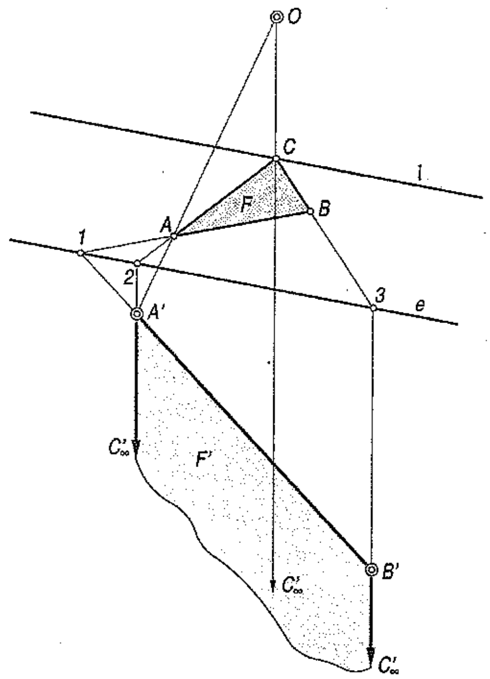

Fig. 22.

En el caso de que la recta límite l sea secante a la figura F o m' lo sea a F' su figura homológica correspondiente se compone de dos partes abiertas (**Fig.** 23).

Al lado $\overline{AC}$ de la figura F le corresponde el "**segmento**" $\overline{A'C'}$ que, para ir de un extremo a otro, ha de pasar por el punto impropio M'_∞, homológico de M, que pertenece a la recta límite l. Del mismo modo, al lado $\overline{BC}$, que tiene uno de sus puntos N, en la recta l, le corresponde $\overline{B'C'}$, uno de cuyos puntos, N'_∞, es impropio. Por tanto, la figura F' resulta "**partida**".

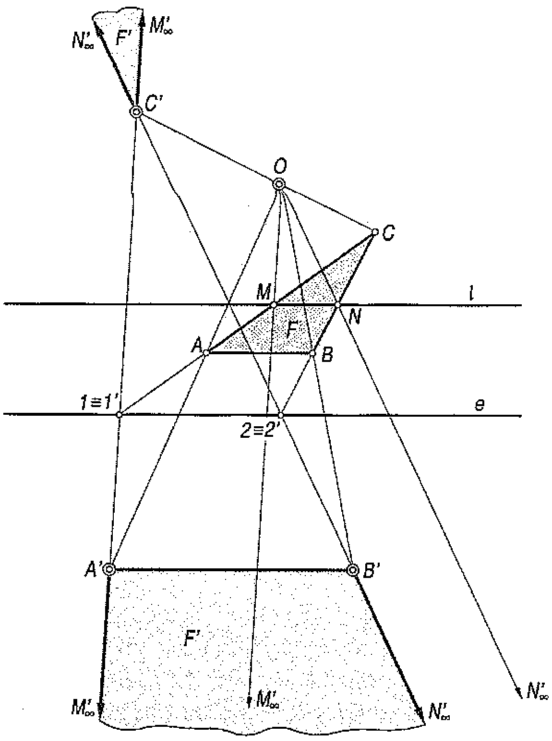

Fig. 23.

10. Datos necesarios para definir una homología

Para definir una homología son necesarios tres datos de entre: el eje, el centro, una pareja de puntos, una pareja de rectas, la dirección del eje, una de las rectas límites, etc. De entre todos los casos posibles, y además del caso expuesto en la Fig. 20, se exponen a continuación algunos, realizando su resolución hasta convertirlos en el primero de ellos cuya solución es inmediata.

1°. Dados el centro *O*, el eje *e* y una pareja de puntos homológicos *A* y *A'* (Fig. 24)

Para calcular la figura *F'*, a partir de los datos enunciados y de la figura *F*, se procede como sigue:

El vértice *B'* de la figura *F'* debe pertenecer al rayo de homología *OB* y a la recta *1A'*, homológica de la recta *AB* que corta al eje en el punto *1*. El punto donde se cortan ambas es el punto buscado *B'*.

Para calcular el resto de de los vértices se procede de la misma forma. Téngase en cuenta que los puntos que se van determinando permiten disponer de más parejas de puntos homológicos en los que apoyarse, en caso necesario, para calcular los vértices restantes.

Se advierte que las parejas de puntos homológicos que pertenecen al eje, es decir, los puntos dobles, no sirven como dato para determinar una homología.

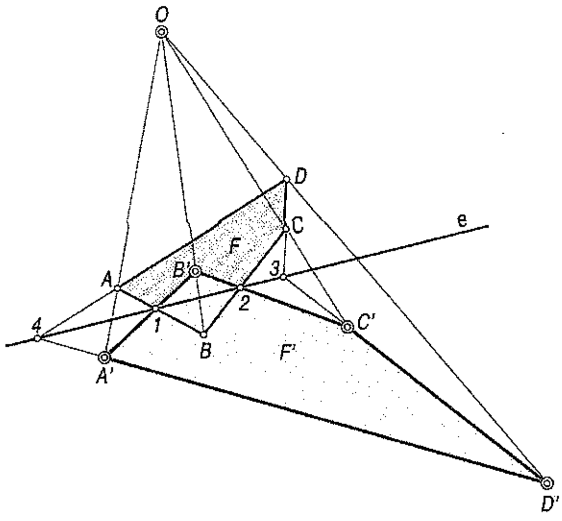

Fig. 24.

2°. Dados dos parejas de puntos homológicos *A*-*A'* y *B*-*B'* y la dirección *d* del eje de homología (Fig. 25)

El centro de homología *O* se halla en la intersección de los rayos *AA'* y *BB'*. El eje *e*, paralelo a la dirección *d* dada, pasa por el punto $1 \equiv 1'$ donde se cortan las rectas homológicas *AB* y *A'B'*.

Una vez conocidos el centro y el eje de homología, el proceso para hallar el resto de los vértices de la figura *F'* es el descrito en el caso anterior.

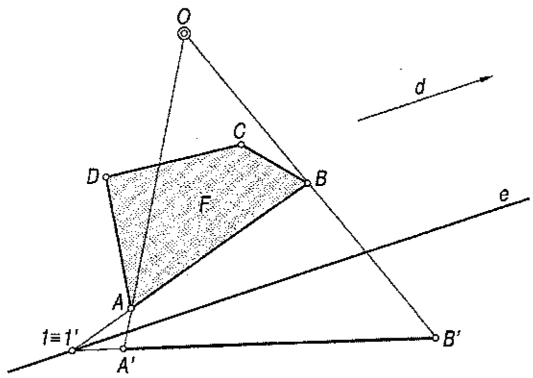

Fig. 25.

3°. Dados el centro *O*, el eje *e* y la recta límite *l* (Fig. 26)

Dada la figura *F*, se trata de calcular el homológico de uno de sus vértices, por ejemplo *A'*, para convertirlo en el caso 1°.

Al punto *M*, perteneciente a la recta *AB* y a *l*, le corresponde M'_∞, punto impropio alineado con *M* y

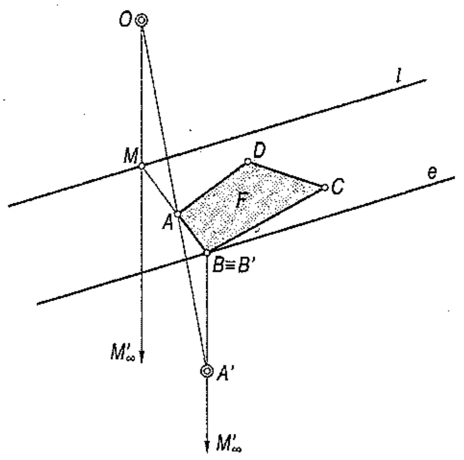

Fig. 26.

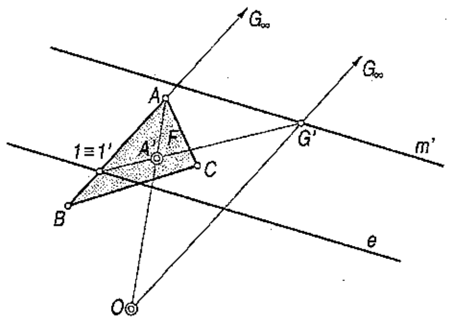

Fig. 27.

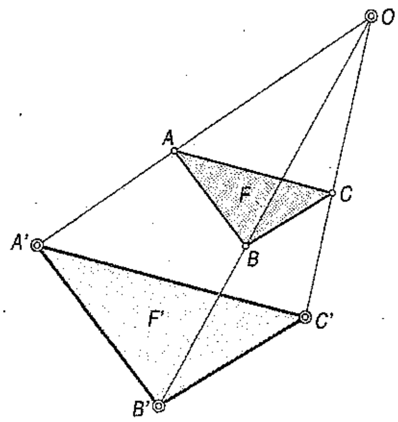

Fig. 28.

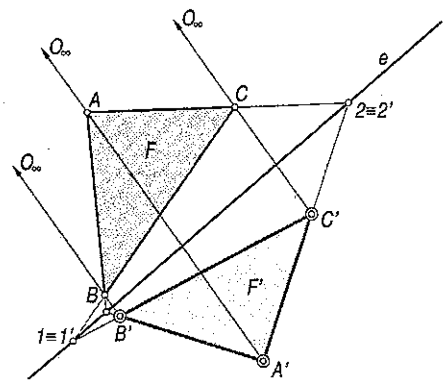

Fig. 30.

con O. El punto A', que ha de pertenecer a la recta $B'M'_\infty$, se encuentra en la intersección del rayo de homología OA con la paralela por B a la recta OM'_∞.

4°. **Dados el centro O, el eje e y la recta límite m'** (Fig. 27)

Como en el caso anterior, se trata de calcular el homológico de uno de los vértices de la figura F.

El punto G', correspondiente a G_∞, que pertenece a la recta AB, debe ser un punto de la recta límite m' dada y del rayo de homología OG_∞, por tanto, es la intersección con m' de la paralela por O a la recta AB.

El punto A' se halla en la intersección del rayo OA con la recta $G'1'$, homológica de la que contiene a los puntos A, B, G_∞ y 1. Este último punto es doble por pertenecer al eje e.

11. Homologías de condiciones especiales

Si en una homología, el eje, el centro, o ambos al mismo tiempo se hacen impropios, es decir, se hallan en el infinito, resultan transformaciones consideradas casos límites de homología. Algunas de ellas se han estudiado en el curso pasado.

1°. **Eje impropio** (Fig. 28)

Los puntos donde se deben cortar las parejas de rectas homológicas son impropios, por lo que éstas son paralelas. Esta condición convierte a la homología en una **homotecia** de centro O y razón:

$$\boxed{\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\text{constante}}$$

Si además, el valor de esta razón es -1 resulta una **simetría central** o un giro de 180°, que son lo mismo (**Fig. 29**).

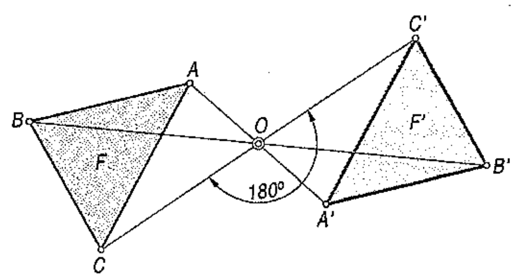

Fig. 29.

2°. **Centro impropio** (Fig. 30)

El punto de concurrencia de los rayos de homología es un punto del infinito, por lo que son paralelos.

A este caso particular, llamado **homología afín** o, simplemente, **afinidad**, se le dedica a continuación un análisis más detallado, por su importancia en el estudio de los sistemas de representación que se estudiarán más adelante.

3°. Centro y eje impropios (Fig. 31)

Por una parte, los rayos de homología serán paralelos y por otra las parejas de rectas homológicas también lo serán. Estas características convierten a esta homología en una **traslación** cuya dirección es la de escape del punto *O* para hacerse impropio.

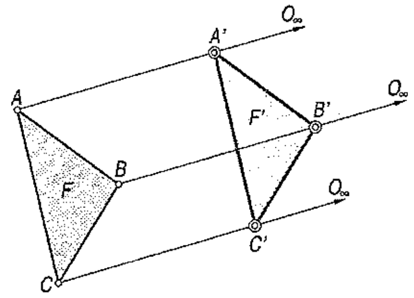

Fig. 31.

12. Afinidad

Como se ha visto anteriormente, esta transformación es un caso límite de homología, cuando el centro es impropio. Por tanto, las condiciones que se deben cumplir en la afinidad son:

1ª. Las parejas de puntos afines *A* y *A'*, *B* y *B'*,... etc., se hallan sobre rectas paralelas entre sí y paralelas a una dirección determinada, llamada **dirección de afinidad**.

2ª. Las parejas de rectas *r* y *r'*, *s* y *s'*,... etc., se cortan en puntos que pertenecen a una recta fija, llamada **eje de afinidad**.

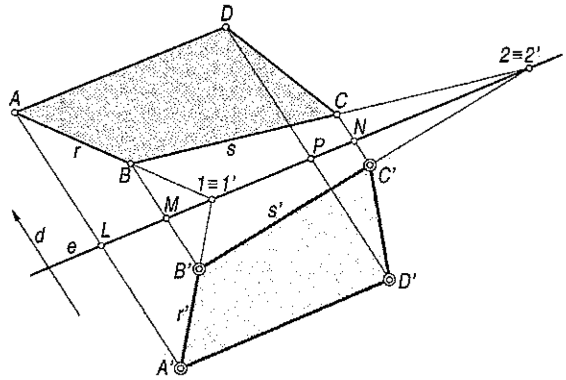

Fig. 32.

En la **Fig. 32** al cuadrilátero *ABCD* le corresponde el *A'B'C'D'* en una afinidad de eje *e* y dirección *d*. Puede comprobarse que se mantienen las condiciones de una homología, excepto que el haz de rayos concurre, en este caso, en un punto impropio en la dirección *d*.

En la afinidad los únicos puntos dobles son los del eje. Los afines de los puntos impropios también están en el infinito. Por esta causa, en la afinidad no se toman en consideración las rectas límites que son impropias.

12.1. Razón de afinidad

En una afinidad, la distancia de un punto al eje y la de su correspondiente afín, tomadas ambas en la recta que los une, están en una relación constante.

Por tanto, en la **Fig. 32** se cumple:

$$\frac{\overline{A'L}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{B'M}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{C'N}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{D'P}}{\overline{DP}}=K$$

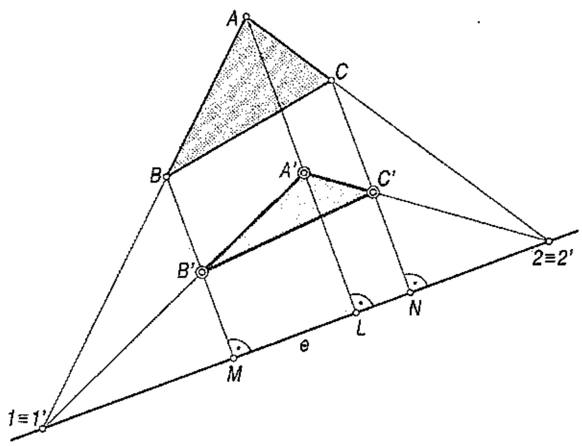

Fig. 33.

Siendo *K* una constante llamada **razón de afinidad**.

Si el valor de *K* es positivo, una pareja de elementos afines: puntos, segmentos o figuras, se hallan en el mismo semiplano respecto del eje (**Fig. 33**).

Cuando el valor de *K* es negativo cada elemento está situado a distinto lado de su afín respecto del eje (Fig. 32).

Aunque la dirección de afinidad y el eje pueden formar un ángulo cualquiera, en ocasiones ambas son perpendiculares, diciéndose entonces que la afinidad es **ortogonal** (Fig. 33).

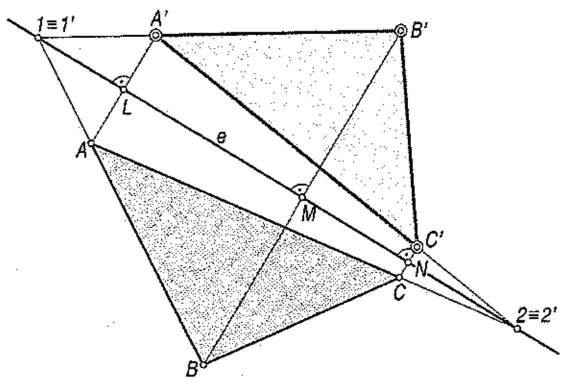

Fig. 34.

Cuando en una afinidad ortogonal la razón tiene valor $K = -1$, se cumplirá:

$\overline{A'L} = \overline{AL}$; $\overline{B'M} = \overline{BM}$,... y en este caso la afinidad es también una **simetría axial** cuyo eje es el de afinidad (Fig. 34).

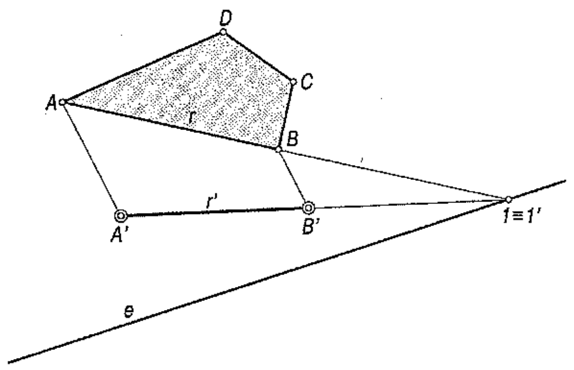

Fig. 35.

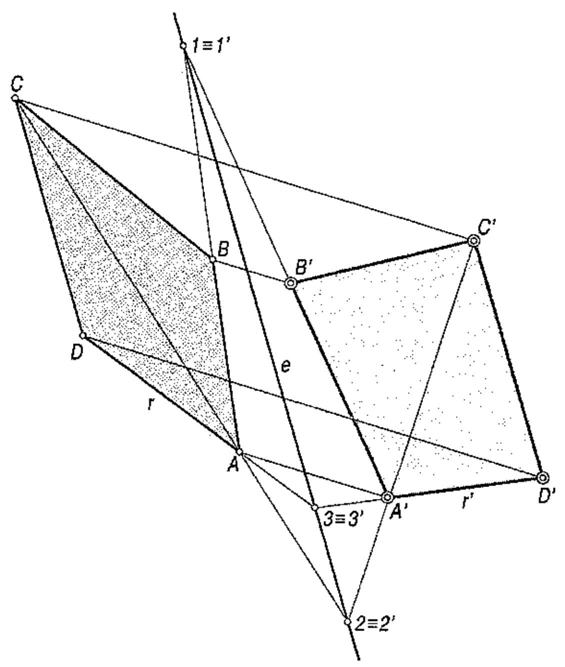

Fig. 36.

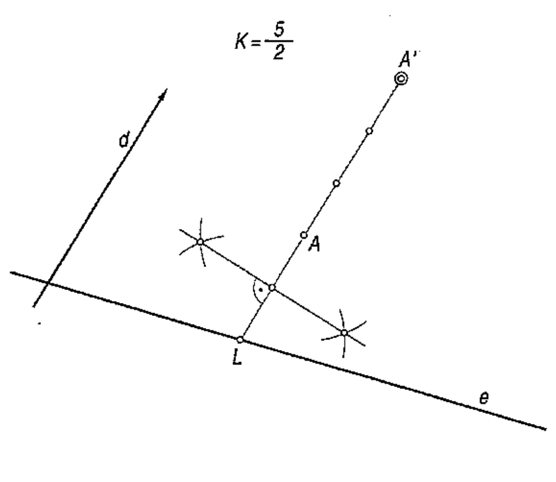

Fig. 37.

13. Datos que definen una afinidad

Los datos necesarios que con más frecuencia dispondremos para definir una afinidad son:

1°. El eje *e* y una pareja de puntos afines *A* y *A'* (Fig. 35)

Si conocemos una pareja de puntos afines conocemos la dirección de afinidad que, en este caso, la determina la recta *AA'*.

El punto *B'*, afín de otro dado, *B*, se halla en la paralela por éste a la recta *AA'* y en la recta *r'*, afín de *r*, que pasa por *A* y *B* y corta al eje en el punto doble *1 ≡ 1'*.

2°. Dos triángulos afines (Fig. 36)

En la afinidad que determinan los triángulos *ABC* y *A'B'C'* se pide calcular el cuadrilátero afín al *ABCD*.

Para hallar el punto *D'*, afín del cuarto vértice *D*, es preciso determinar la dirección de afinidad y el eje. La primera resulta ser la de las rectas *AA'*, *BB'* y *CC'*, y el eje resulta del cálculo de dos de sus puntos, *1 ≡ 1'*, donde se cortan las rectas *AB* y *A'B'* y *2 ≡ 2'*, intersección de *AC* y *A'C'*.

El punto *D'* es la intersección de la paralela por *D* a *CC'* con la recta *r'* afín de *r*.

3°. El eje *e*, la razón de afinidad *K* y la dirección *d* (Fig. 37)

Sea, por ejemplo, $K = 5/2$, para calcular *A'*, afín del punto *A* dado, y convertir este caso en el primero de los presentados, se traza por *A* la paralela a *d*, que corta al eje en *L*. Se divide el segmento $\overline{AL}$ en dos partes iguales, siendo estas dos divisiones las que corresponden al denominador de la razón de afinidad. El punto *A'* se halla en la recta *AL* a una distancia de *L* igual a cinco divisiones y al mismo lado de *A* respecto del eje *e* por tener la razón valor positivo.

Téngase en cuenta que si la afinidad que convierte al punto *A* en *A'* tiene como razón $K = 5/2$, la que convierte *A'* en *A* es $K_1 = 2/5$. Por esto, conviene fijar la posición que ocupa, en la fracción que determina el valor de la razón, la medida de cada uno de los segmentos, que en la **Fig. 37** es:

$$\frac{\overline{A'L}}{\overline{AL}} = K = \frac{5}{2}$$

14. Afinidad entre circunferencia y elipse

La relación de afinidad que puede establecerse entre una circunferencia y una elipse tiene aplicación práctica muy importante en los sistemas de representación que se basan en la proyección cilíndrica, como podrá comprobarse más adelante. Por ello, determinamos la elipse afín de una circunferencia.