PERSPECTIVA AXONOMETRICA DE LA CIRCUNFERENCIA

INTRODUCCION

El empleo de la perspectiva axonométrica ha estado limitado por la aparente dificultad que encierra el trazado de la elipse, curva que hay que dibujar muchas veces dentro de una misma pieza.

En este tema explicamos la forma de construirla con los utensilios de dibujo. No obstante en la actualidad existen plantillas de elipses isométricas que permiten dibujar la curva de forma inmediata y con la máxima precisión. Para ello, se sitúa el centro de la curva y la posición de los ejes y diámetros conjugados y se hace coincidir la plantilla con estos elementos.

1. Método del cuadrado circunscrito. *(Figs. 1, 2 y 3).*

Vamos a representar la elipse que es proyección de una circunferencia de centro O y radio r y sustituiremos la elipse por un óvalo.

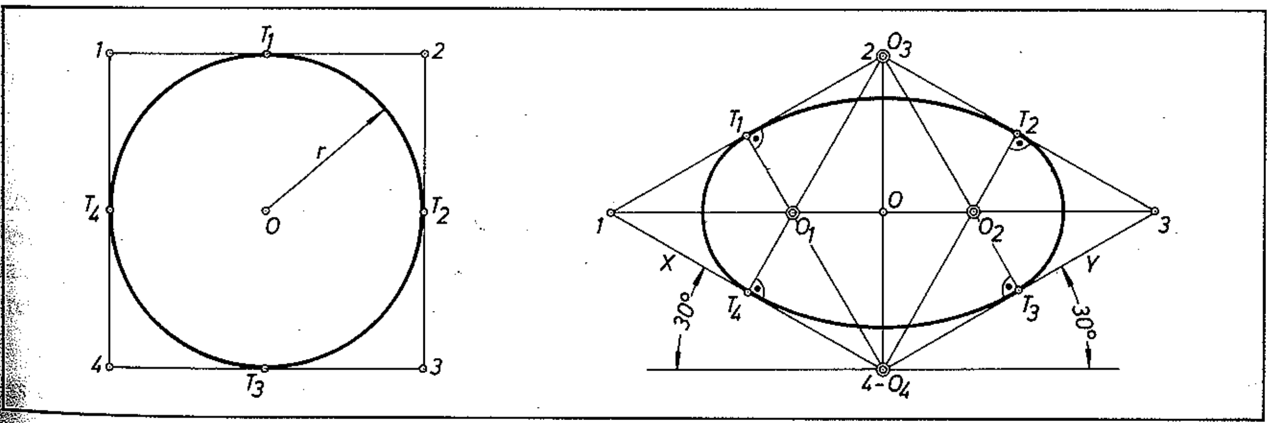

Fig. 1

Supongamos la circunferencia inscrita en un cuadrado *1-2-3-4-* *(Fig. 1)*, siendo los puntos T_1, T_2, T_3 y T_4 los puntos medios de los lados, los de tangencia con aquélla. El cuadrado situado sobre el plano XOY se transforma en isométrico en el rombo *1-2-3-4*, siendo los lados paralelos a los ejes X e Y; los puntos medios de los lados del cuadrado siguen siendo los puntos medios de los lados del rombo. Las normales en estos puntos a la curva son las perpendiculares a las tangentes, que son los lados del rombo; las normales pasan por los puntos *2* y *4* y se cortan de forma que nos dan los cuatro centros de curvatura para construir la curva.

Con centro en O_1 y O_2 trazamos los arcos $\widehat{T_1\text{-}T_4}$ y $\widehat{T_2\text{-}T_3}$ y con centros en O_3 y O_4 trazamos los arcos $\widehat{T_3\text{-}T_4}$ y $\widehat{T_1\text{-}T_2}$.

Este método tan sencillo en el que se sustituye la elipse por un óvalo es uno de los más empleados en perspectiva rápida, cuyo único fin es hacer ver al observador lo que se quiere representar, sin fijarse en el rigorismo teórico de la proyección axonométrica.

En la *Fig. 2* se resuelve este método en los tres casos posibles, es decir, supuesta la circunferencia en cada uno de los tres planos del sistema; obsérvese que los ejes mayores de los óvalos son perpendiculares en cada caso al eje del sistema que es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia.

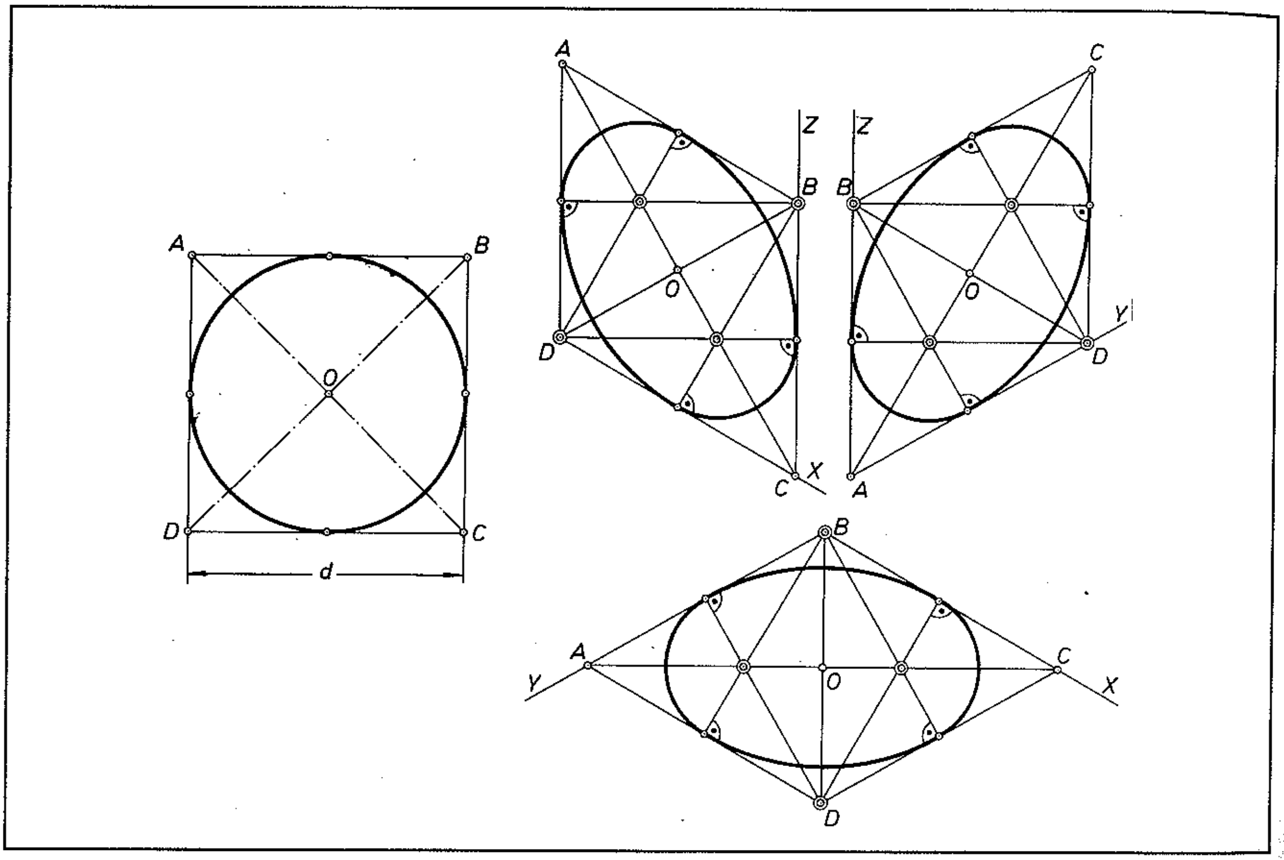

Fig. 2

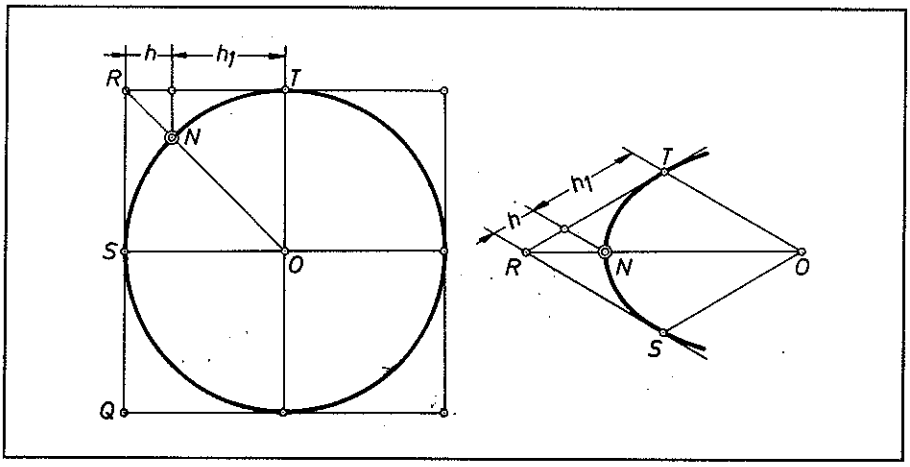

Fig. 3

En la *Fig. 3* se indica la forma de llevar un punto N de la circunferencia a su correspondiente a la elipse; el lector deducirá con sencillez la construcción.

2. Método de los diámetros conjugados *(Fig. 4)*.

Por el centro O de la elipse trazamos los diámetros conjugados $\overline{A'C'}$ y $\overline{B'D'}$ paralelos a los ejes X e Y (en el supuesto de que la circunferencia esté en el plano XOY o en un paralelo a él); sobre estos diámetros conjugados llevamos el radio R de la circunferencia a proyectar o bien el radio reducido, es decir, $0{,}816\,R$, según cuál sea el sistema elegido de antemano para hacer la perspectiva. Los puntos A', B', C' y D' son los extremos de los diámetros conjugados. Las normales en estos puntos son perpendiculares a dichos diámetros, es decir, las normales en A' y C' son perpendiculares al diámetro $\overline{B'D'}$ y las normales en B' y D' son perpendiculares a $\overline{A'C'}$. Los centros de curvatura son los puntos *1, 2, 3 y 4* de intersección de las normales. En la figura pueden verse con sencillez los arcos que se trazan con cada centro.

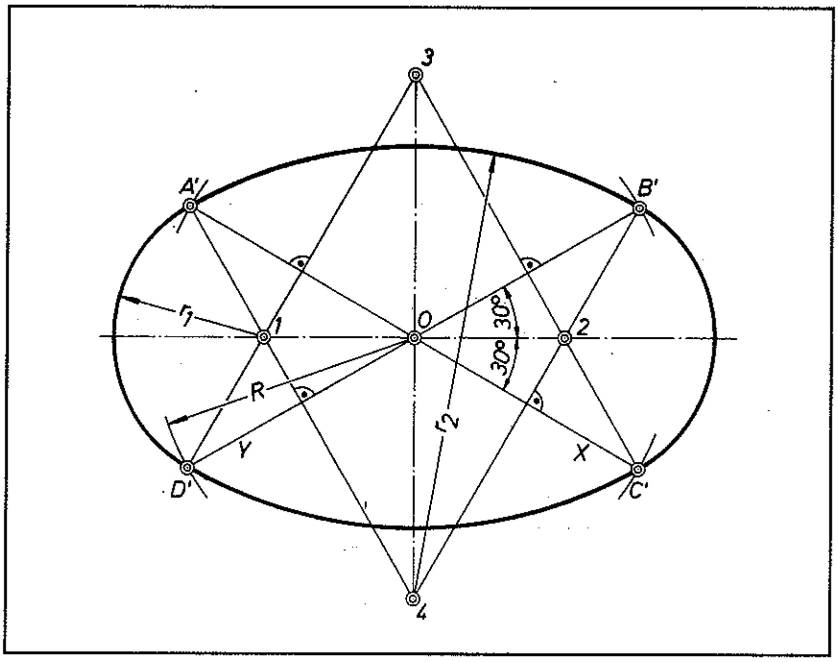

Fig. 4

3. Proyección de la circunferencia situada en los planos del sistema. *(Figs. 5, 6, 7, 8, 9 y 10).*

Vamos a representar la circunferencia situada en cada uno de los tres planos del sistema y para ello la suponemos inscrita en las caras de un cubo cuyas aristas sean paralelas a los ejes de triedro.

Caso isométrico. *(Fig. 5).*

Los ejes X e Y forman *30°* con la horizontal; tomamos sobre los ejes X, Y y Z el diámetro de la circunferencia que lo representamos por la unidad y tenemos los puntos A, B y C; por paralelas se completa la proyección del cubo. Las circunferencias inscritas en las caras *AVCD, VCFB* y *CDEF* se proyectan según tres elipses iguales.

Los diámetros conjugados de las elipses son las paralelas medias de los rombos en que se transforman las caras del cubo en perspectiva; estos diámetros son las rectas $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, $\overline{HG}$ y $\overline{QI}$, $\overline{JR}$ y $\overline{HK}$.

Los ejes mayores $\overline{NM}$, $\overline{N_1M_1}$ y $\overline{N_2M_2}$ son perpendiculares respectivamente a los ejes Y, Z y X, siendo el segmento $a = 1{,}224\ R$; los ejes menores son perpendiculares a los anteriores, siendo $b = 0{,}707\ R$.

Caso dimétrico. *(Figs. 6 y 7).*

Los ejes X e Y forman con la horizontal los ángulos de $7°\ 10' \sim 7°$ y $41°\ 25'$ respectivamente. Representamos un cubo de arista $a = \overline{O_0N_0} = \overline{O_0L_0} = \overline{O_0R}$, como ya se ha indicado anteriormente *(Fig. 6)*, abatiendo los planos XOY y ZOX, las artistas reducidas son:

Sobre los ejes X y Z: $\overline{OP} = \overline{OL}$.

Sobre el eje Y: $\overline{OQ} = \overline{ON}$.

En la *Fig. 7* se reproduce el cubo con las mismas dimensiones y se dibujan las proyecciones de una circunferencia en cada uno de los planos del triedro, inscrita en la cara del cubo correspondiente.

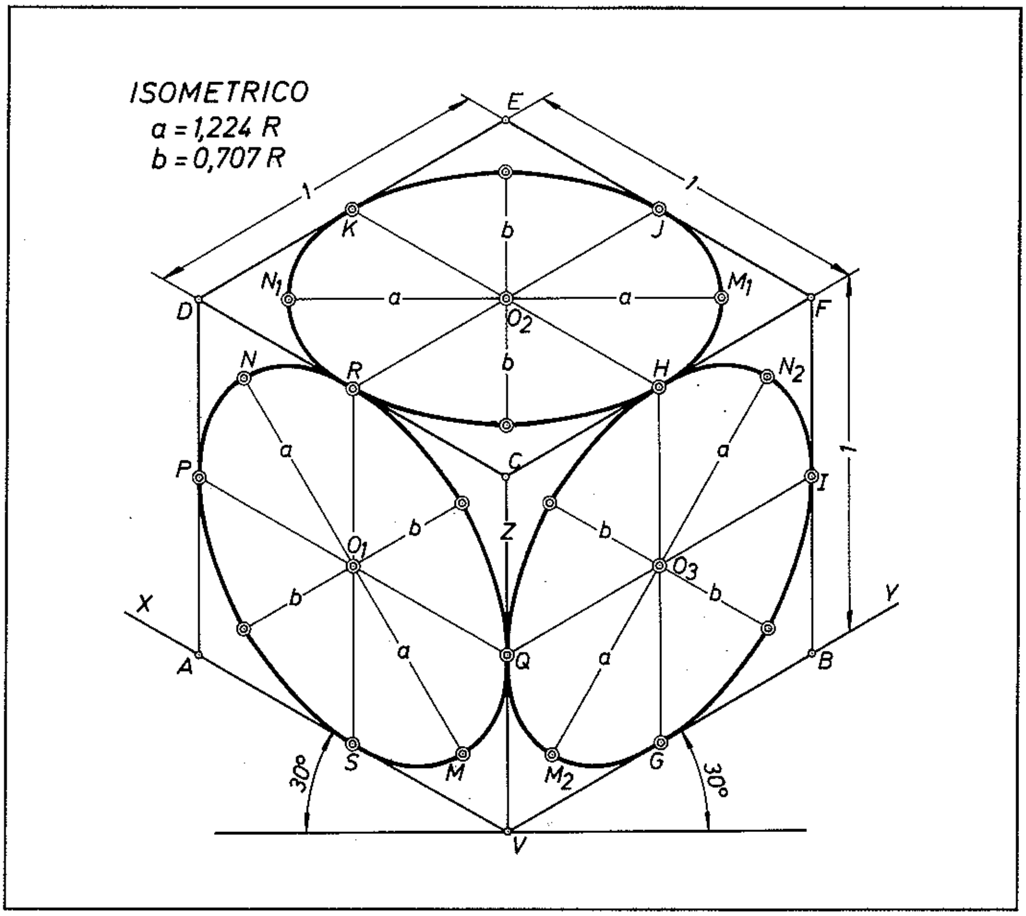
ISOMETRICO
a = 1,224 R
b = 0,707 R
E
K
J
N1
M1
D
F
O2
N
R
H
N2
P
C
I
Z
O1
O3
X
Y
Q
A
B
S
M
M2
G
30°
30°
V
a
b
1

Fig. 5

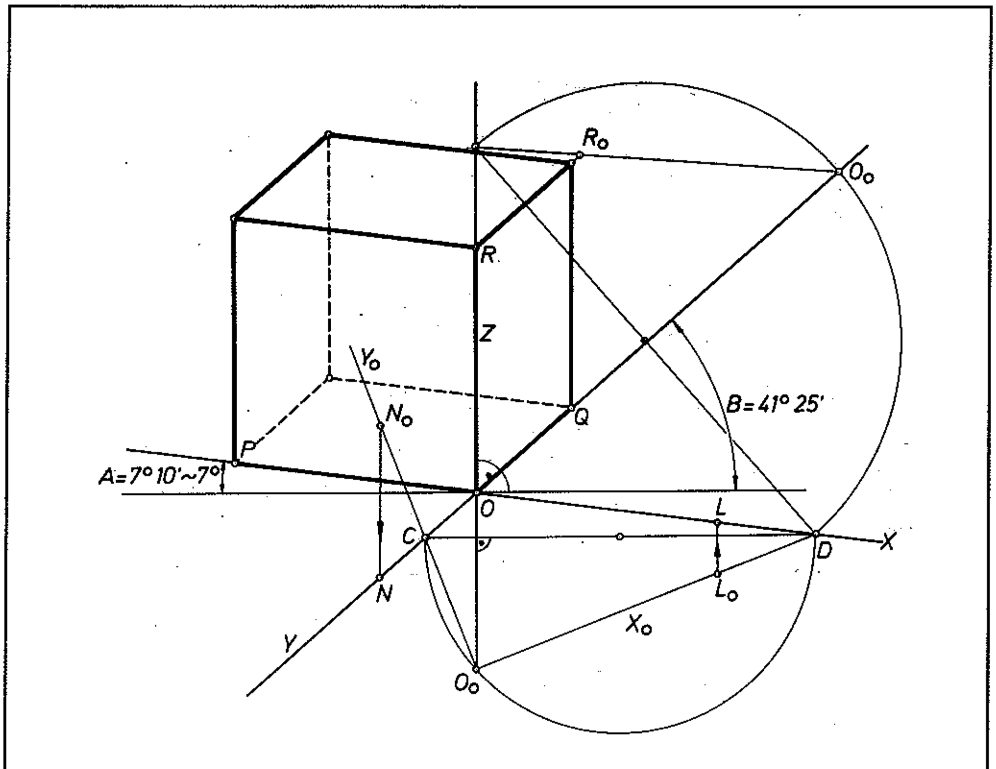
Ro
Oo
R
Z
Yo
No
Q
B=41° 25'
P
A=7° 10'~7°
O
L
C
D
X
N
Lo
Y
Xo
Oo

Fig. 6

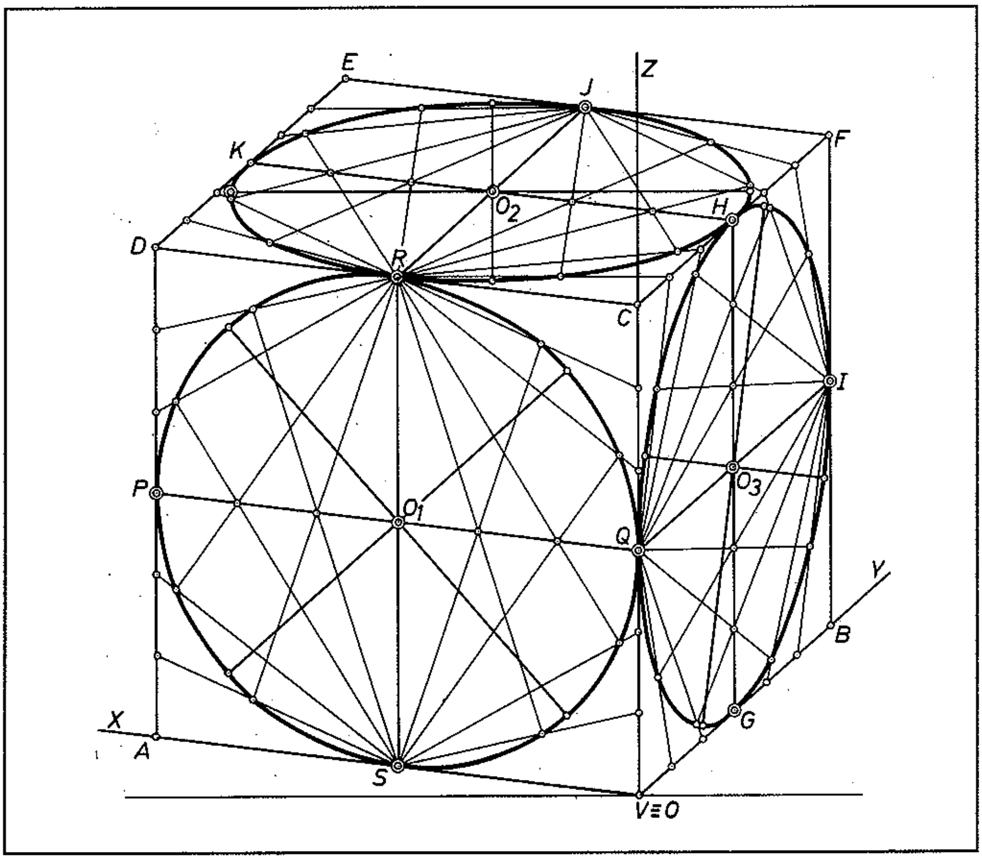
E
Z
J
F
K
O_2
H
D
R
C
I
P
O_1
O_3
Q
Y
B
X
A
G
S
V≡O

Fig. 7

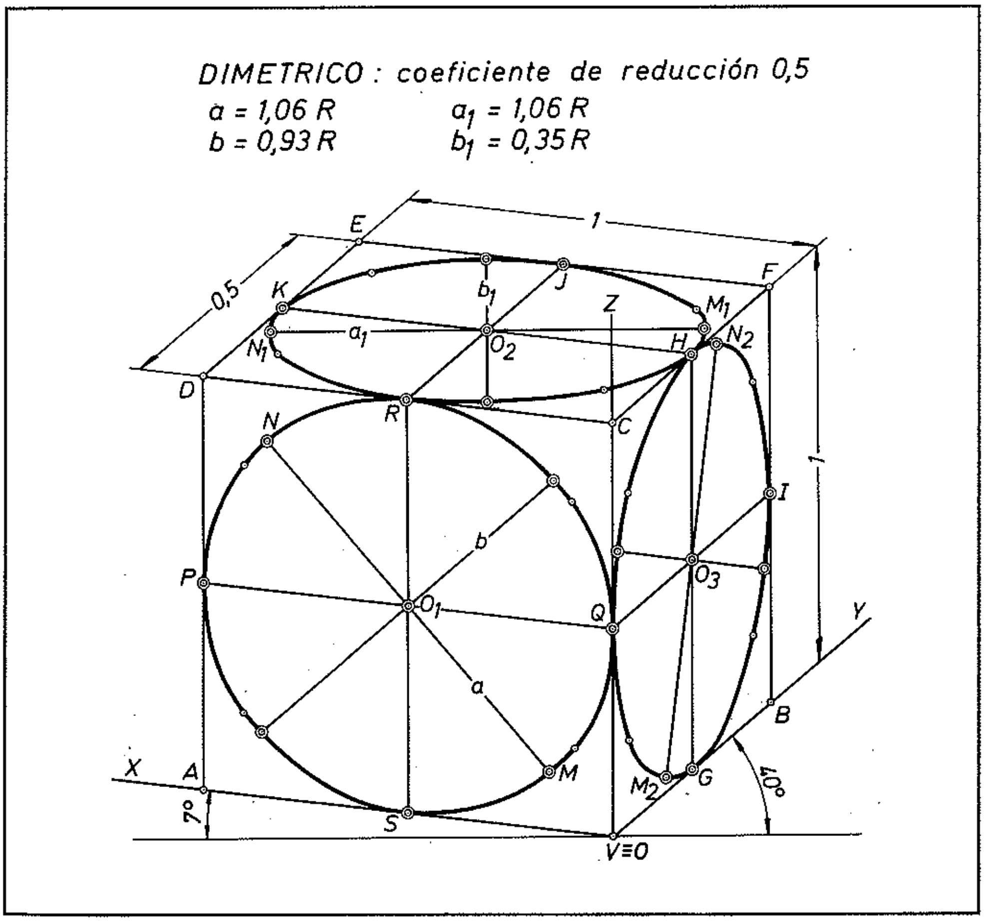
DIMETRICO : coeficiente de reducción 0,5
$a = 1{,}06\,R$ $a_1 = 1{,}06\,R$
$b = 0{,}93\,R$ $b_1 = 0{,}35\,R$
1
E
0,5
K
b_1
J
Z
M_1
F
N_1
a_1
O_2
H
N_2
D
R
C
N
I
b
P
O_1
O_3
Q
Y
a
B
X
A
M
M_2
G
7°
40°
S
V≡O

Fig. 8

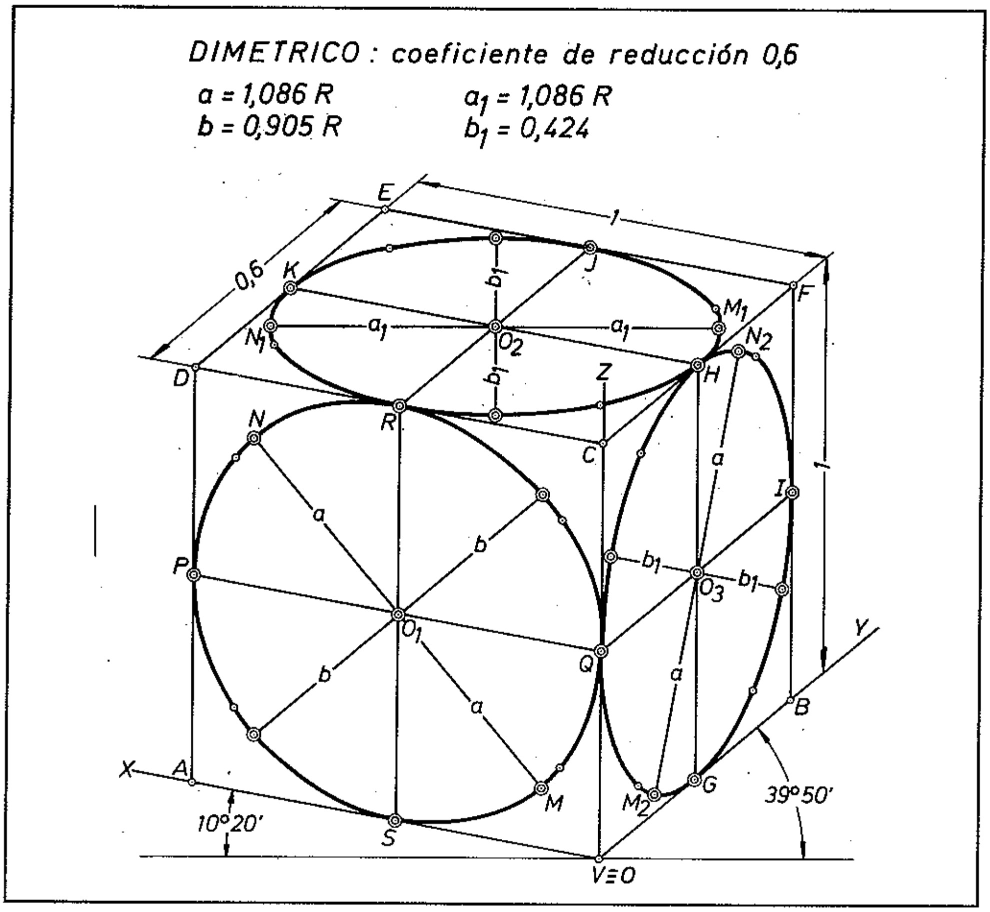
DIMETRICO : coeficiente de reducción 0,6
a = 1,086 R
b = 0,905 R
a1 = 1,086 R
b1 = 0,424
E
1
0,6
K
J
F
M1
N1
a1
O2
N2
D
Z
H
R
N
C
a
I
b
P
b1
O3
O1
Y
Q
b
a
B
X
A
M
M2
G
10°20'
39°50'
S
V≡O

Fig. 9

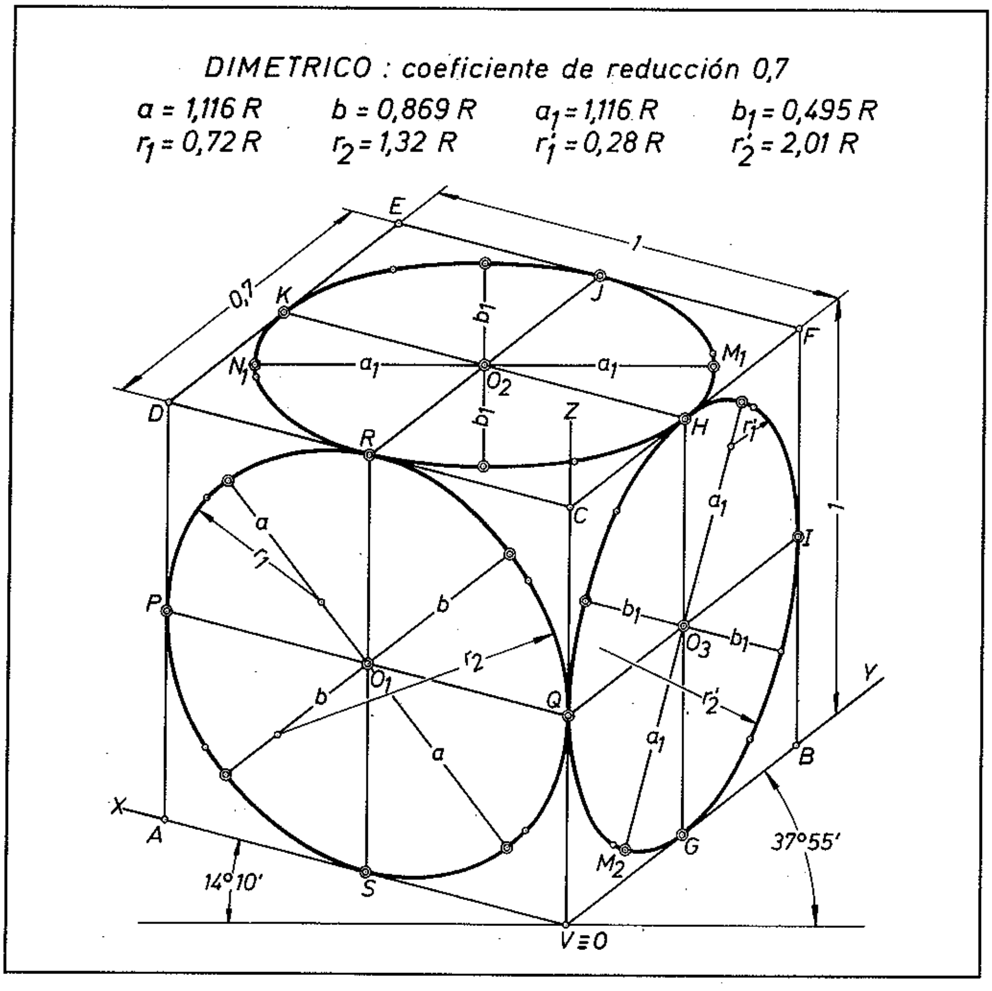
DIMETRICO : coeficiente de reducción 0,7
a = 1,116 R
b = 0,869 R
a1 = 1,116 R
b1 = 0,495 R
r1 = 0,72 R
r2 = 1,32 R
r'1 = 0,28 R
r'2 = 2,01 R
E
1
0,7
K
J
F
M1
N1
a1
O2
D
Z
H
r'1
R
C
a
r1
I
P
b
b1
O3
r2
O1
Y
Q
r'2
b
a
B
X
A
M2
G
14°10'
37°55'
S
V≡O

Fig. 10

Tema 17

PERSPECTIVA CABALLERA DE LA CIRCUNFERENCIA

1. Perspectiva caballera de una circunferencia situada en el plano XOY o en el ZOY o en planos paralelos a uno de ellos.

Observemos la *Fig. 1*. Tenemos en la parte superior una circunferencia de centro -O-, el cuadrado 1-2-3-4 circunscrito a ella, las diagonales 1-3 y 2-4 de este cuadrado y las tangentes en los puntos K, L, M y N.

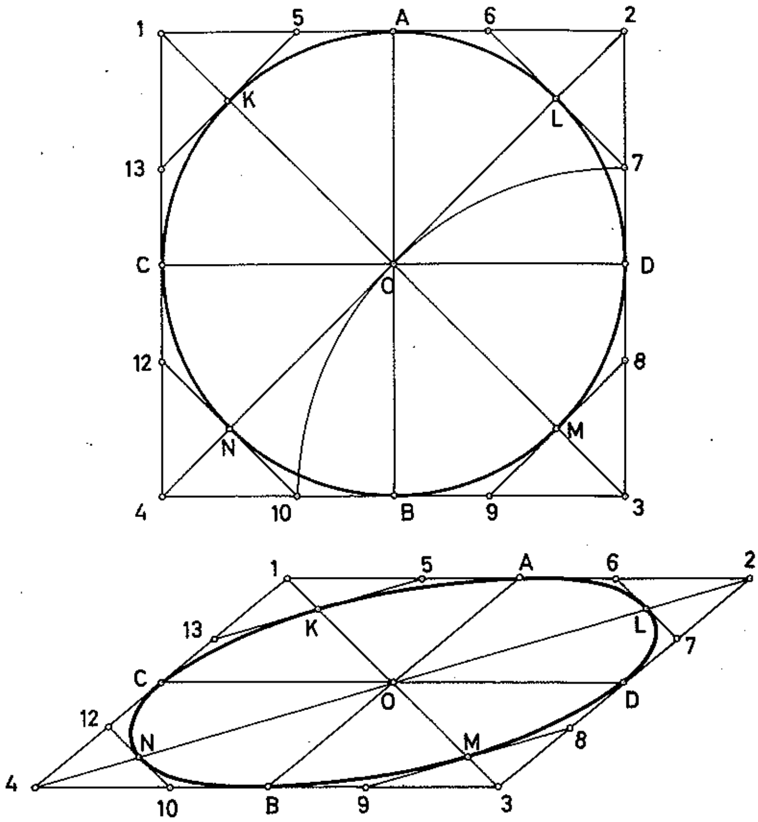

Fig. 1

La perspectiva caballera de esta circunferencia supuesta situada en el plano XOY o en uno paralelo a él, se obtiene construyendo el paralelogramo 1-2-3-4 de la parte inferior de la figura, siendo -O- el centro de la elipse perspectiva y AB y CD, paralelas medias del paralelogramo, son una pareja de diámetros conjugados de la elipse, precisamente los paralelos a los ejes X e Y; CD está en verdadera magnitud y AB es el diámetro reducido según el eje Y; con el auxilio de los puntos 5-13, 6-7, 8-9 y 10-12 se obtienen los puntos K, L, M y N de la elipse situados en las diagonales 1-3 y 2-4.

En la *Fig. 2* se obtiene la elipse perspectiva de una circunferencia situada en el plano ZOY o en uno paralelo a él empleando el método ya visto de haces proyectivos.

A la izquierda de la figura tenemos la circunferencia de centro O, su cuadrado circunscrito M-N-Q-P y los diámetros AB y CD; esta circunferencia se construye por puntos, obteniendo los 1, 2, 3 y 4 por intersección de rayos homólogos de haces proyectivos de centros C y D.

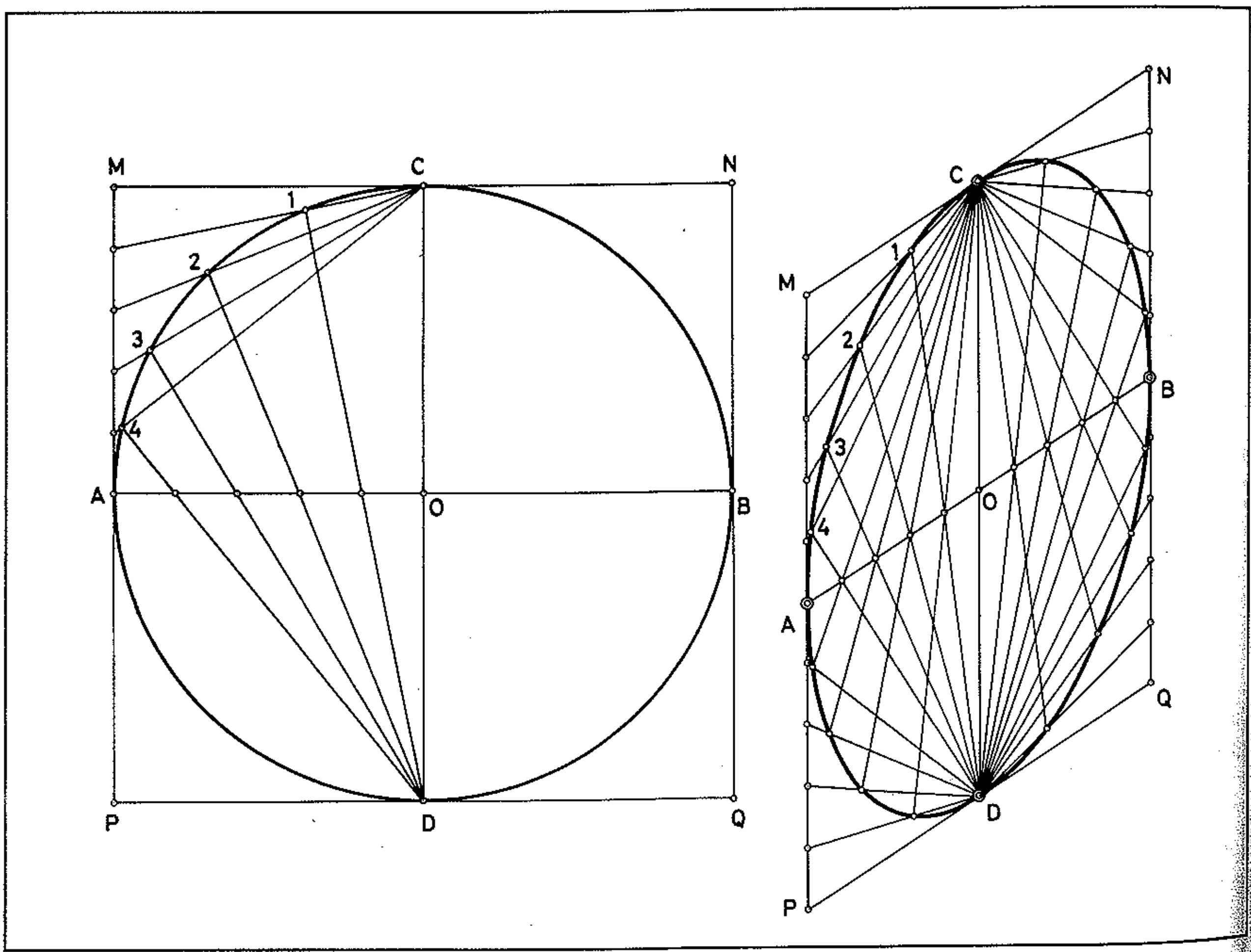

Fig. 2

A la derecha de la figura, a partir del centro -O- de la curva, trazamos el diámetro CD paralelo al eje Z, igual al diámetro de la circunferencia y AB igual a dicho diámetro reducido según el eje Y; con los diámetros conjugados AB y CD construimos el romboide M-N-Q-P y después, por los haces proyectivos, obtenemos cuantos puntos se deseen de la elipse.

Para poder construir la elipse no es preciso determinar muchos puntos de ella, basta con los cuatro extremos de una pareja de diámetros conjugados y otros cuatro puntos intermedios, los cuales, unidos a mano o con plantilla, nos permiten tener una elipse magnífica.

Veamos la *Fig. 3.*

Tenemos la circunferencia de centro -O-, sus diámetros AB y CD, el cuadrado circunscrito a ella E-F-G-H y los puntos P, Q, R y S, uno de cada cuadrante, obtenidos por haces proyectivos; obsérvese que los puntos 1 y 2 son puntos medios de OA y AE. Pues bien; la elipse perspectiva caballera se representa en las figuras adjuntas, a la derecha, caso de que la circunferencia esté en el plano ZOY o en uno paralelo a él, y la de abajo, en el caso de que esté en el plano XOY o en uno paralelo a él. Como ambas se construyen igual, describiremos la segunda.

Por el centro -O- de la curva trazamos el diámetro AB paralelo al eje X, igual al diámetro de la circunferencia y también trazamos el diámetro CD paralelo al eje Y e igual al anterior, pero reducido según el coeficiente del sistema; completamos el paralelogramo E-F-G-H y hallamos los puntos marcados con 1 y 2, unimos DE y C2 y tenemos el punto P e igualmente para los puntos Q, R y S; tenemos así 8 puntos de la curva obtenidos rápidamente que nos permiten trazarla con facilidad.
Si el coeficiente del sistema es igual a la unidad ($\mu = 1$) podemos sustituir la curva por un óvalo, determinando los centros de curvatura como indica la *Fig. 4.*

Tenemos los diámetros conjugados T_1-T_3 y T_2-T_4 que son iguales por ser $\mu = 1$; construimos el paralelogramo A-B-C-D que sabemos es circunscrito a la elipse y trazamos las normales en T_1, T_2, T_3 y T_4; estas normales se cortan en los dos puntos C_1 y en los dos puntos C_2 que son centros de curvatura, con los que se construyen los arcos T_4-T_1, T_1-T_2, T_2-T_3 y T_3-T_4.

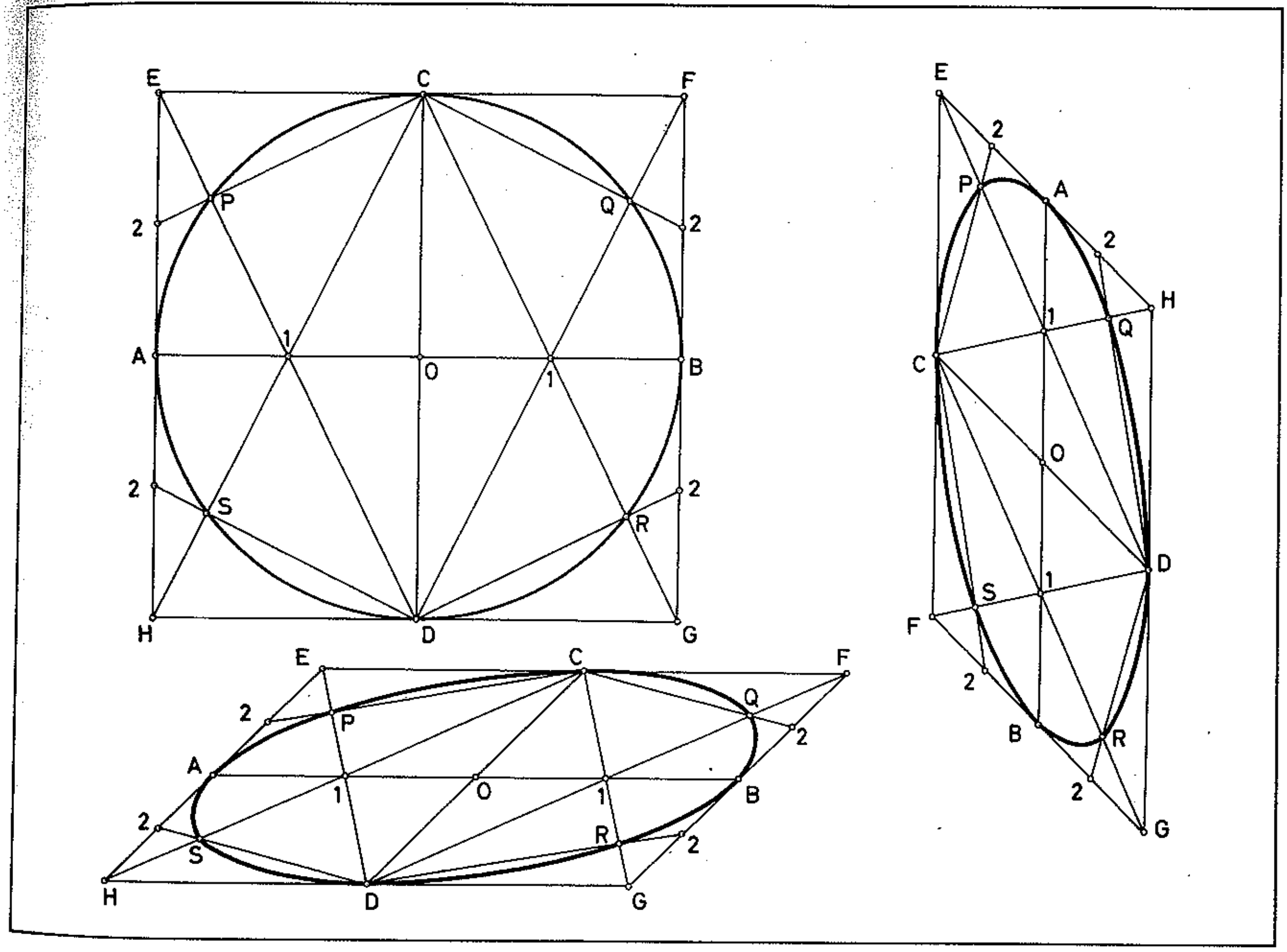

Fig. 3

La elipse se puede construir también con ayuda de aparatos llamados elipsógrafos o compases de elipses, y por medio de plantillas de elipses.

Pasemos ahora a la determinación de los elementos necesarios para construir una elipse empleando los llamados «Gráficos de Elipses».

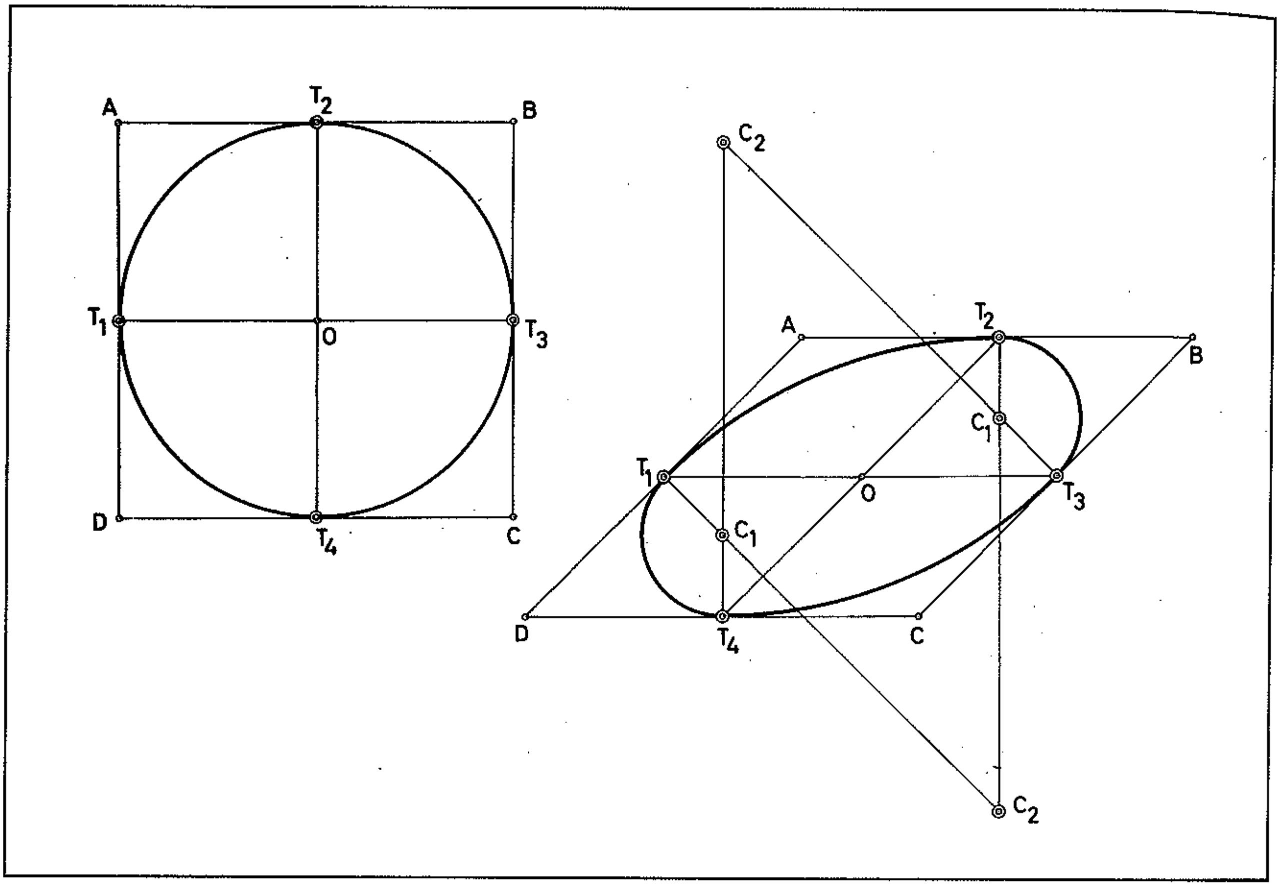

Fig. 4

En primer lugar hay que hacer constar que cuando el eje Y se proyecta formando ángulo de $+45°$ ó $+135°$ con los ejes X y Z, las circunferencias iguales contenidas en los planos XOY o ZOY o en paralelos a ellos, se proyectan según elipses también iguales. Según esto, las construcciones que damos a continuación para las elipses que son proyecciones de circunferencias situadas en el plano XOY, sirven también para el plano ZOY.

Consideramos tres casos según unos valores muy útiles del coeficiente de reducción:

1.° $\varphi = 135°$ y cotg. $\sigma = \mu = 0{,}5$.

2.° $\varphi = 135°$ y cotg. $\sigma = \mu = 0{,}6$.

3.° $\varphi = 135°$ y cotg. $\sigma = \mu = 0{,}7$.

Para los coeficientes de reducción 0,5 y 0,6 la elipse se construye por medio de cuatro centros, y para el de 0,7, con ocho centros.

Primer caso: $\varphi = 135°$ y cotg. $\sigma = \mu = 0{,}5$ (Fig. 6).

Suponiendo la circunferencia a proyectar en el plano XOY o en uno paralelo a él, trazamos por la proyección -O- del centro de ella los dos diámetros conjugados paralelos a los ejes X e Y; estos diámetros son A'B' y C'D', que forman 45°. El diámetro menor conjugado mayor es igual al diámetro de la circunferencia y el menor se reduce según el coeficiente 0,5.

Con estos diámetros se pueden hallar los ejes AB y CD de la elipse, en posición y magnitud; la construcción gráfica se indica en la figura. (Véase *Curso de Dibujo Geométrico y de Croquización* del autor).

Hemos de advertir que, en el sistema isométrico, las circunferencias iguales situadas en los planos del triedro o en paralelos a ellos, se proyectan sobre el cuadro según elipses iguales cuyos ejes se determinan con la condición de ser, el mayor perpendicular, el menor, paralelo al eje coordenado, que es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia.

Vistas estas consideraciones, pasemos a desarrollar los siguientes casos:

Elipse a escala natural por medio de cuatro centros.

Elipse a escala de ampliación por medio de cuatro centros.

Elipse a escala natural por medio de ocho centros.

Elipse a escala de ampliación por medio de ocho centros.

6. Construcción de la elipse isométrica aproximada, a escala natural, por medio de cuatro centros. *(Fig. 11).*

Por la proyección del centro de la circunferencia a proyectar, punto O, trazamos la pareja de diámetros conjugados de la elipse $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ que por ser paralelos a los ejes forman 60^o y cuya magnitud es la del diámetro de la circunferencia reducido según la escala *0,816 : 1,* es decir: $a' = b' = \overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'} = \overline{OD'} = 0{,}816\ R$.

Los ejes de la elipse son las bisectrices de los diámetros conjugados. El eje mayor, que es proyección del diámetro de la circunferencia paralelo al plano del cuadro, tiene una longitud igual al citado diámetro, es decir: $a = \overline{OA} = \overline{OB} = R$.

El eje menor, por ser perpendicular al eje Z en el espacio (en el supuesto de que la circunferencia está en el plano *XOY*), es la *l.m.p. del plano XOY* con respecto al cuadro y por lo tanto viene reducido por un coeficiente que es el valor del coseno del ángulo de $54^o\ 44'$ que forma el plano *XOY* con el cuadro, es decir: $b = \overline{OC} = \overline{OD} = R \cos 54^o\ 44' = 0{,}58\ R$.

Los centros de curvatura O_1 y O_2 de los vértices A y B del eje mayor, se encuentran en él a una distancia r_1 de los vértices igual a $r_1 = 0{,}39\ R$.

Los centros de curvatura O_3 y O_4 de los vértices C y D del eje menor, se hallan en él a una distancia de aquéllos igual a $1{,}49\ R$.

Resumiendo: Los ejes, los diámetros conjugados y los centros de curvatura tienen, en función del radio R de la circunferencia a proyectar, los valores siguientes:

Semieje mayor	$a = R$
Semieje menor	$b = 0{,}58\ R$
Semidiámetros conjugados	$a' = b' = 0{,}816\ R$
Radio de curvatura menor	$r_1 = 0{,}39\ R$
Radio de curvatura mayor	$r_2 = 1{,}49\ R$

Todos estos valores se pueden obtener gráficamente de una forma muy sencilla, al objeto de evitar las enojosas y largas operaciones de multiplicar el radio R por los diversos coeficientes.

Para obtener de una vez todos los valores, construimos un gráfico de elipses de la forma siguiente:

Se dibuja un triángulo rectángulo *JKL*, tal que un cateto $\overline{KJ}$ mide *1 dm*, o lo que es igual, *100 mm* o *10 cm* y sobre el otro cateto se toman las longitudes de los coeficientes expresadas en la misma unidad, es decir, *0,39 dm, 0,58 dm, 0,816 dm, 1 dm* y *1,49 dm;* se unen los puntos de división con el vértice *J*. Supongamos ahora que hemos de dibujar la elipse isométrica que es proyección de una circunferencia de radio $R = 50\ mm$; tomamos el valor de R a partir de J según JN; la perpendicular NM por el extremo N al cateto horizontal $\overline{JK}$ nos da, al cortar el haz de rectas, los valores gráficos de r_1, b, $a' = b'$, a y r_2, con los cuales construimos la elipse.

Gráfico para la construcción de elipses isométricas aproximadas, por medio de cuatro centros de curvatura.

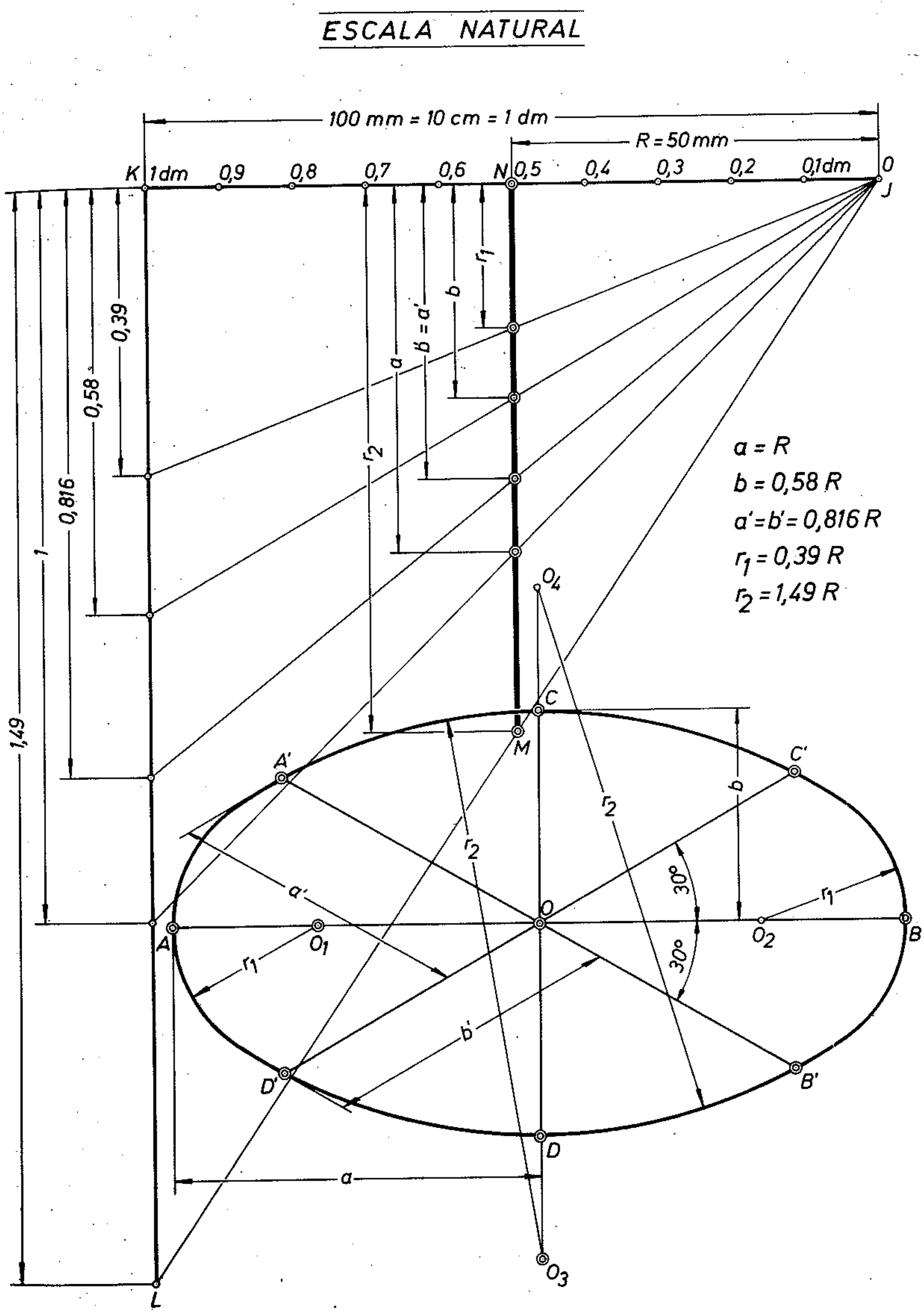

Fig. 11

7. Construcción de la elipse isométrica aproximada, a escala de ampliación, 1 : 0,816, por medio de cuatro centros. *(Fig. 12).*

En el caso de que no se reduzcan las medidas paralelas a los ejes, hemos ya indicado que se trata realmente de una escala de ampliación que es *1:0,816,* pues obtenemos una perspectiva que corresponde a una pieza semejante, pero aproximadamente el *25 %* mayor que la pieza que tratamos de representar.

Para construir la elipse en este caso se opera de la forma siguiente:

Por la proyección del centro de la circunferencia, punto *O*, trazamos la pareja de diámetros conjugados de la elipse $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$, que por ser paralelos a los ejes forman *60°* y cuya magnitud es la del diámetro de la circunferencia, es decir, $a' = b' = R$.

Los ejes de la elipse son las bisectrices de los diámetros conjugados. El eje mayor que es proyección del diámetro de la circunferencia paralelo al plano del cuadro, tiene una longitud igual al diámetro ampliado según la escala *1 : 0,816,* es decir, $a = \overline{OA} = \overline{OB} = R : 0{,}816 = 1{,}224\ R$.

El eje menor, por ser perpendicular al eje Z en el espacio (en el supuesto de que la circunferencia esté en el plano *XOY* o en un plano paralelo a él), es la *l.m.p.* del plano *XOY* respecto al cuadro y por lo tanto viene reducido por un coeficiente que es el valor del coseno del ángulo de *54° 44'* que forma el plano *XOY* con el cuadro, es decir, $b = \overline{OC} = \overline{OD} = 1{,}224 \cdot R \cdot \cos 54^\circ\ 44' = 0{,}707 \cdot R$.

Los centros de curvatura O_1 y O_2 de los vértices *A* y *B* del eje mayor, se encuentran en él a una distancia r_1 de los vértices igual a $r_1 = 0{,}48\ R$.

Los centros de curvatura O_3 y O_4 de los vértices *C* y *D* del eje menor, se hallan en él a una distancia de aquéllos igual a $r_2 = 1{,}82\ R$.

Resumiendo: los ejes, los diámetros conjugados y los centros de curvatura tienen para este caso, en función del radio *R* de la circunferencia a proyectar, los valores siguientes:

Semieje mayor	$a = 1{,}224\ R$
Semieje menor	$b = 0{,}707\ R$
Semidiámetros conjugados	$a' = b' = R$
Radio de curvatura menor	$r_1 = 0{,}48\ R$
Radio de curvatura mayor	$r_2 = 1{,}82\ R$

Todos estos valores, igual que en el caso anterior, se pueden obtener gráficamente de una forma muy sencilla y rápida empleando el gráfico de elipses de la figura y cuya explicación y construcción es igual que en el caso anterior.

Tanto en este caso como en el que hemos visto y en los dos que veremos a continuación, se obtienen ocho puntos de la elipse suficientes para que un buen dibujante la construya a pulso y a lápiz con gran exactitud y luego pase a tinta con ayuda de la plantilla de curvas.

8. Construcción de la elipse isométrica aproximada a escala natural por medio de ocho centros. *(Fig. 13).*

Cuando se desee mayor precisión en el trazado, se pueden obtener ocho centros de curvatura para construir la elipse.

Por la proyección del centro de la circunferencia a proyectar, trazamos una pareja de diámetros conjugados de la elipse, que por ser paralelos a los ejes, forman en proyección *60°* y cuya longitud será la del diámetro de la circunferencia reducido según la escala *0,816:1,* es decir, $\overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'} = \overline{OD'} = 0{,}816\ R$.

Gráfico para la construcción de elipses isométricas aproximadas, por medio de cuatro centros de curvatura.

ESCALA DE AMPLIACION 1: 0,816

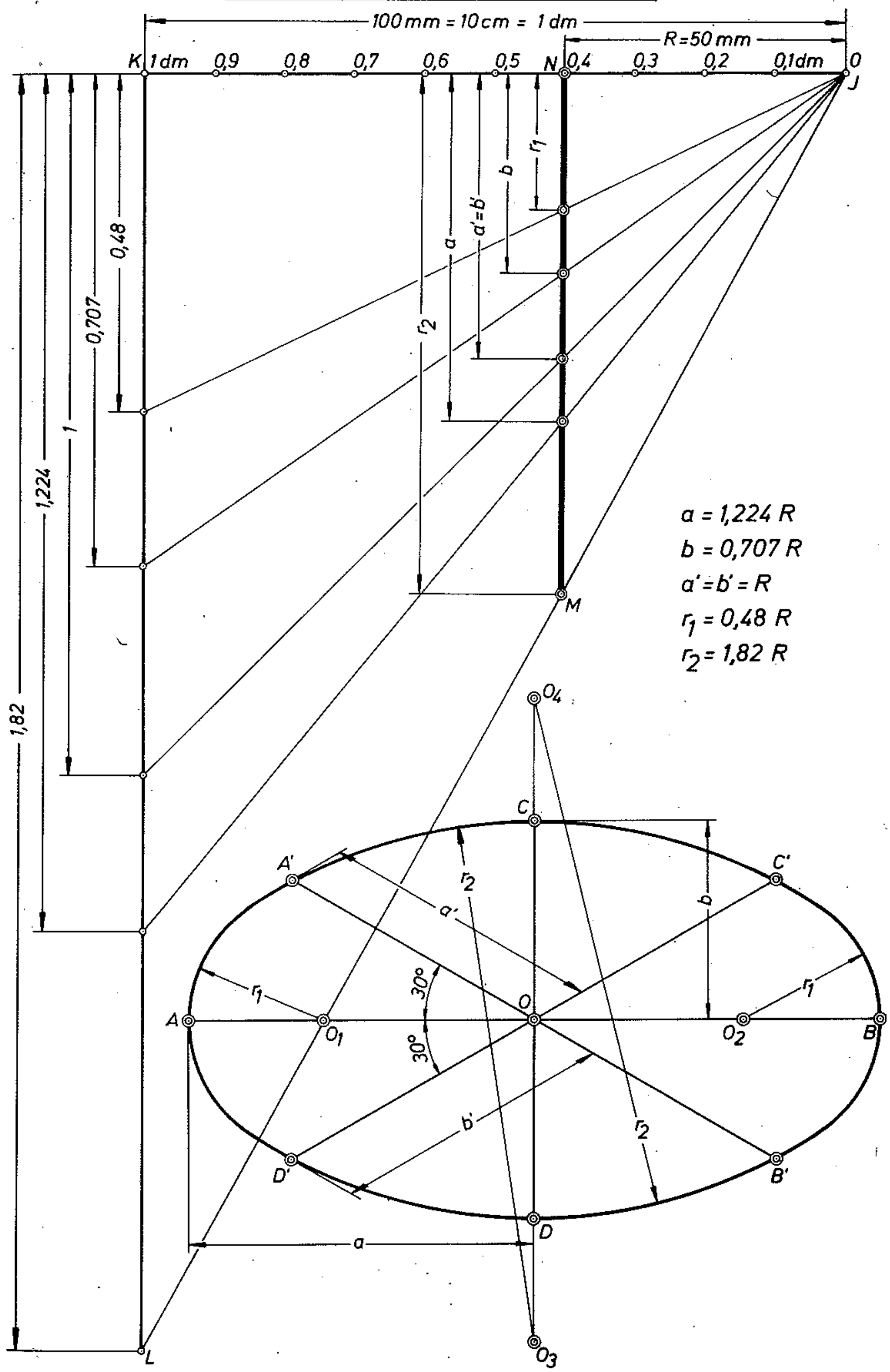

Fig. 12

Gráfico para la construcción de elipses isométricas aproximadas, por medio de ocho centros de curvatura.

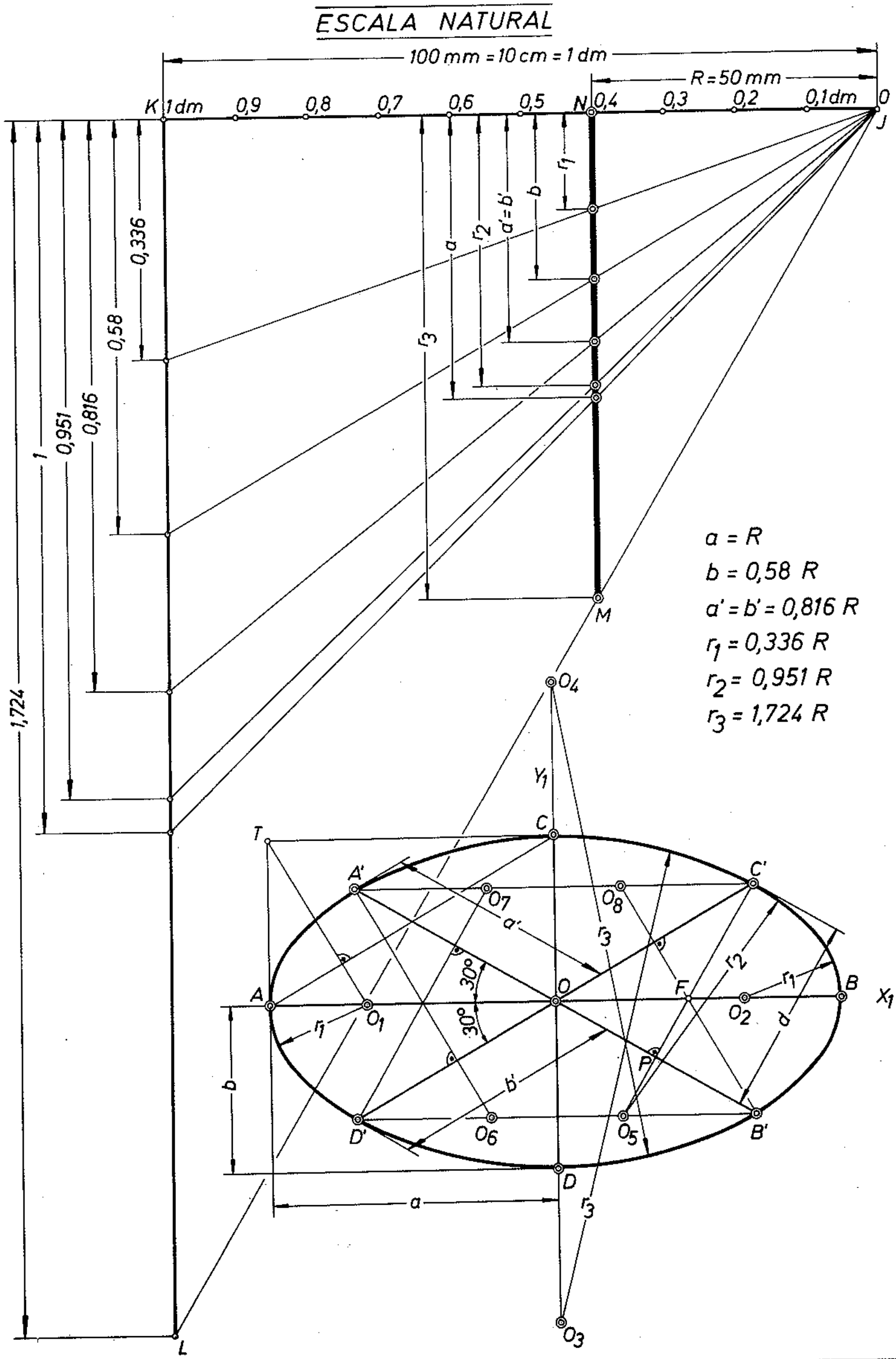

Fig. 13

9. Construcción de la elipse a escala de ampliación 1 : 0,816 por medio de ocho centros. *(Fig. 14).*

En este caso la construcción de la elipse es idéntica a la anterior. Los datos para dibujar la elipse son los siguientes:

Semieje mayor	$a = 1{,}224\ R$
Semieje menor	$b = 0{,}707\ R$
Semidiámetros conjugados	$a' = b' = R$
	$r_1 = 0{,}473\ R$
	$r_2 = 1{,}154\ R$
	$r_3 = 1{,}976\ R$

Hemos de hacer constar una observación. Los radios de curvatura difieren ligeramente de los obtenidos por medio de la construcción gráfica para la elipse de grandes dimensiones. Los coeficientes dados son, pues, empíricos para este caso, ya que lo que se pretende es conseguir una buena tangencia entre los tres arcos de circunferencia.

En la figura está trazado el correspondiente gráfico de elipses.

10. Tablas de valores de los principales elementos de la elipse a partir del radio *R* en mm de la circunferencia a proyectar.

A continuación se presentan unas tablas con los valores de los ejes y radios de curvatura de la elipse que es proyección axonométrica de una circunferencia de radio *R* situada en uno de los planos de proyección. Los valores indicados se obtienen multiplicando los sucesivos valores de *R* por el correspondiente coeficiente.

Tabla I

Sistema isométrico. Escala de ampliación. Se emplea para el caso de que no se reduzcan las medidas paralelas a los ejes del sistema. En la primera columna se indica el radio *R* de la circunferencia en mm y en las restantes se indican los valores siguientes:

a: semieje mayor	$= 1{,}224\ R$
b: semieje menor	$= 0{,}707\ R$
r_1: radio de curvatura menor	$= 0{,}48\ R$
r_2: radio de curvatura mayor	$= 1{,}82\ R$

Tabla II

Sistema dimétrico. Escala de ampliación. Se emplea para el caso de que no se reduzcan las medidas paralelas a los ejes del sistema. La elipse se obtiene por medio de ocho centros de curvatura.

En la primera columna se indica el radio *R* de la circunferencia a proyectar en mm y en las restantes se dan los valores siguientes:

a: semieje mayor	$= 1{,}224\ R$
b: semieje menor	$= 0{,}707\ R$
r_1: radio de curvatura menor	$= 0{,}473\ R$
r_2: radio de curvatura medio......	$= 1{,}154\ R$
r_3: radio de curvatura mayor	$= 1{,}976\ R$

El lector puede confeccionarse una tabla como las anteriores para cada caso de dimétrico o trimétrico que utilice.

Gráfico para la construcción de elipses isométricas aproximadas, por medio de ocho centros de curvatura.

ESCALA DE AMPLIACION 1:0,816

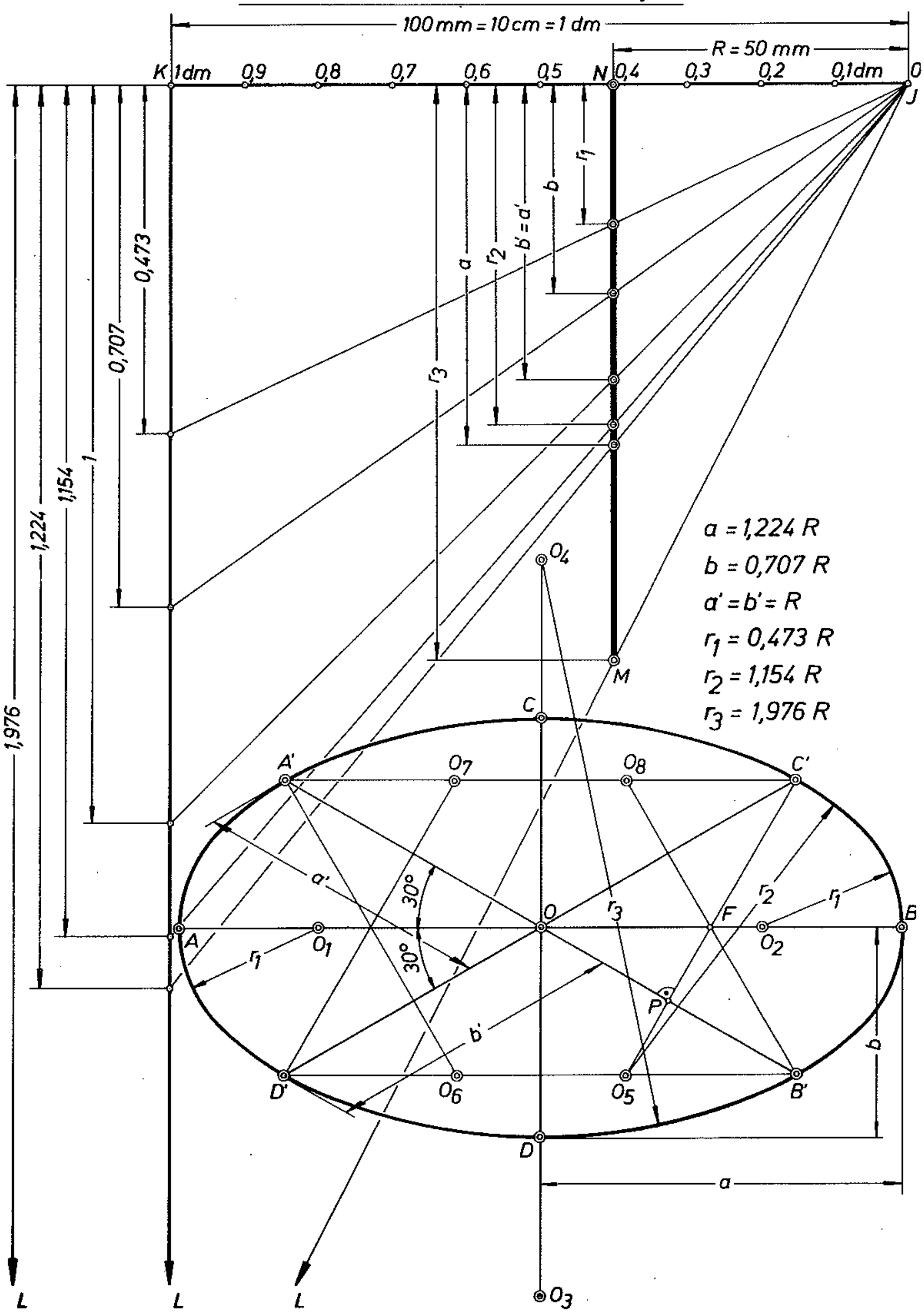

Fig. 14