XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para persoas adultas

Ámbito científico tecnolóxico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 4

Unidade didáctica 1

Números e álxebra

Índice

1. Introdución

1.1 Descrición

Nesta unidade podemos distinguir dous bloques, un primeiro bloque dedicado a números e outro á álxebra.

- Posto que xa coñecemos de módulos anteriores os números naturais $\mathbb{N}$, enteiros $\mathbb{Z}$ e racionais $\mathbb{Q}$, nesta unidade estudaremos os números irracionais $\mathbb{I}$, que xunto a todos os anteriores conforman o conxunto dos números reais $\mathbb{R}$. Ademais, aquí estudaremos as potencias de expoñente enteiro e fraccionario e as porcentaxes.
- No segundo bloque estudaremos conceptos relacionados coa álxebra, os polinomios, a factorización, as ecuacións de grao superior a dous e os sistemas de ecuacións.

1.2 Coñecementos previos

Posto que todas e cada unha das unidades de matemáticas están baseadas en coñecementos progresivos sería interesante lembrar:

- Cales son os números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.
- Os números decimais exactos e periódicos e como se transforman en fraccións.
- As potencias destes números con expoñente enteiro e as súas operacións básicas.
- As ecuacións de primeiro e segundo grao.
- Os sistemas de ecuacións lineais e o diferentes métodos de resolución.

1.3 Criterios de avaliación

- Utilizar as propiedades dos números racionais, as raíces e outros números radicais para operar con eles, utilizando a forma de cálculo e a notación adecuada para resolver problemas da vida cotiá e presentar os resultados coa precisión requirida.
- Utilizar a linguaxe alxébrica para expresar unha propiedade ou relación dada mediante un enunciado, extraendo a información relevante e transformándoa.
- Resolver problemas da vida cotiá nos que se precise a formulación e a resolución de ecuacións de primeiro e segundo grao, e sistemas lineais de dúas ecuacións con dúas incógnitas, aplicando técnicas de manipulación alxébricas, gráficas ou recursos tecnolóxicos e valorar e contrastar os resultados obtidos.

2. Secuencia de contidos e actividades

2.1 O conxunto dos números reais $\mathbb{R}$

2.1.1 Números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Os números naturais son $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Os números enteiros son $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Como se pode observar, os números enteiros son unha ampliación dos números naturais. Podemos dicir que os números naturais son os enteiros positivos. O cero é o único enteiro que non é nin positivo nin negativo.

Os números racionais son $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a\epsilon\mathbb{Z}, b\epsilon\mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Por exemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{-2}{1} = -2$, $\frac{-7}{5}$, $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{0}{5} = 0$.

Como pode observar, todos os números naturais e enteiros son tamén racionais.

2.1.2 Números racionais e expresións decimais

- Os números decimais exactos son fraccións.

Actividade resolta

Exprese 9,23 como fracción.

$$\mathbf{9,23} = \frac{923}{100}$$

- Os números decimais periódicos son fraccións.

Actividades resoltas

Exprese 1,2343434...... e 3,2525.... como fraccións.

- $N = 1{,}2343434 \dots.$

$$1000N = 1234{,}3434 \dots$$

$$10N = 12{,}343434 \dots$$

$$Restando\ obtemos\ 990N = 1222 \qquad N = \frac{1222}{990}$$

– $N = 3{,}252525 \ldots.$

$$100N = 325{,}2525 \ldots$$

$$N = 3{,}2525 \ldots$$

$$Restando\ obtemos\ 99N = 322 \qquad N = \frac{322}{99}$$

2.1.3 Números irracionais. Expresión decimal dos números irracionais

Existen outros números cuxa expresión decimal é infinita e ademais non é periódica. Estes números son coñecidos dende a antiga Grecia como números irracionais $\mathbb{I}$, posto que para eles, segundo a súa visión matemática das cousas, eran algo insólito e raro.

Exemplos:

- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots.$
- $\pi = 3{,}141592 \ldots$ A relación entre a lonxitude da circunferencia e o diámetro é un dos números irracionais máis importantes. Emprégase frecuentemente en matemáticas, física, enxeñería etc.
- $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033 \ldots.$ É o chamado número de ouro, proporción áurea, divina proporción e outros máis nomes ao longo da historia. Podemos identificar o número áureo nas artes, na natureza etc.
- $e = 2{,}718281 \ldots.$ É o chamado número de Euler ou constante de Napier. O seu uso é transcendental en leis físicas, economía, química etc.

2.1.4 Números reais

O conxunto dos números reais está formado pola unión dos números racionais e os números irracionais. Matematicamente queda expresado do seguinte xeito $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Actividades propostas

S1. Ache a expresión decimal das seguintes fraccións:

$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{125}{1000}$	$\frac{4}{11}$

$\frac{6}{5}$	$\frac{525}{10000}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{532}{100}$
$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{4}{6}$

S2. Clasifique estes números en naturais, enteiros, racionais ou irracionais. Cando for posible, expréseos en forma de fracción.

$\frac{8}{4}$	$21{,}25$	$\frac{5}{10}$	$0,\widehat{26}$	$3{,}2\hat{9}$
$3,\widehat{06}$	$2{,}1121231234\ldots$	$\sqrt{7}$	$\frac{-6}{2}$	$24,\hat{9}$
$\sqrt{4}$	$\frac{7}{6}$	$2\cdot\pi$	$5{,}2\hat{3}$	$\frac{-6}{2}$

2.2 Intervalos e semirrectas. Diferentes formas de expresión

2.2.1 Intervalos

- Chamaremos **intervalo aberto de extremos a e b** ao conxunto de números que hai entre a e b sen contar estes extremos. Existen diferentes formas de representar este intervalo:
  - Mediante parénteses: (a, b)
  - Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: a < x < b\}$
  - Mediante a súa representación gráfica 

Actividade resolta

Exprese o intervalo aberto de extremos 3 e 4 das diferentes formas estudadas.

Intervalo aberto de extremos 3 e 4. Podemos representalo deste xeito:

- Mediante parénteses: $(3{,}4)$
- Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: 3 < x < 4\}$
- Mediante a súa representación gráfica 

- Chamaremos **intervalo pechado de extremos a e b** ao conxunto de números que hai entre a e b contando estes extremos. Existen diferentes formas de representar este intervalo:

– Mediante parénteses: $[a, b]$

– Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$

– Mediante a súa representación gráfica 

Actividade resolta

Exprese o intervalo pechado de extremos 5 e 10 das diferentes formas estudadas.

Intervalo pechado de extremos 5 e 10. Podemos representalo deste xeito:

– Mediante parénteses: $[5{,}10]$

– Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: 5 \leq x \leq 10\}$

– Mediante a súa representación gráfica 

- **Intervalos semiabertos ou semipechados**. Estes intervalos son unha mestura dos dous anteriores.

Actividades resoltas

Exprese o intervalo aberto pola esquerda e pechado pola dereita de extremos 3 e 4 e o intervalo pechado pola esquerda e aberto pola dereita de extremos 5 e 10 das diferentes formas estudadas.

Intervalo aberto pola esquerda e pechado pola dereita de extremos 3 e 4. Podemos representalo deste xeito:

– Mediante parénteses: $(3{,}4]$

– Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: 3 < x \leq 4\}$

– Mediante a súa representación gráfica 

Intervalo pechado pola esquerda e aberto pola dereita de extremos 5 e 10. Podemos representalo deste xeito:

– Mediante parénteses: $[5, 10)$

– Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: 5 \leq x < 10\}$

– Mediante a súa representación gráfica 

2.2.2 Semirrectas

Acontece moitas veces que o conxunto que imos estudar non está acoutado por un dos seus extremos. Este é o caso das que chamamos semirrectas.

Actividade resolta

Dadas as seguintes semirrectas, intente expresalas das outras dúas formas coñecidas se só coñecemos unha das súas expresións.

$(-\infty, -5)$	$\{x \epsilon \mathbb{R}: x < -5\}$	
$[-5, +\infty)$	$\{x \epsilon \mathbb{R}: x \geq -5\}$	
$(3, +\infty)$	$\{x \epsilon \mathbb{R}: x > 3\}$	
$(-\infty, 0]$	$\{x \epsilon \mathbb{R}: x \leq 0\}$	

Actividades propostas

S3. Represente graficamente na recta real e en modo de desigualdades os seguintes intervalos:

$[-5,6]$	$(-1,5)$	$[-6,1)$
$(0, 6]$	$(-\infty, 2]$	$(0, +\infty)$

S4. Represente graficamente na recta real e exprese como intervalo ou semirrectas estas desigualdades:

$-1 \leq x \leq 3$	$3 < x$	$x \leq -1$
$2 \leq x < 6$	$-3 < x < 7$	$x \geq 4$

S5. Exprese como intervalo ou semirrecta e como desigualdades cada un destes conxuntos representados:

2.3 Potencias

2.3.1 Potencias de expoñente natural e enteiro

- Dado un número real *a*, e *n* un número natural, a potencia de base *a* e expoñente *n* $a^n = a \cdot a \cdot \dots \dots \cdot a.a,$ *n* veces.
- Dado un número real *a*, e *n* un número natural, $a^{-n} = 1/a^n$

Actividades resoltas

Utilice as definicións anteriores para desenvolver as potencias 2^4 e $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$.

- $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$

Utilice as definicións anteriores para desenvolver as potencias 3^{-2} e $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$.

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

- Recordemos neste apartado as propiedades das potencias.
  - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Exemplo: $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$
  - $a^m : a^n = a^{m-n}$. Exemplo: $2^7 : 2^9 = 2^{-2}$
  - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Exemplo: $(5^2)^3 = 5^6$
  - $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$. Exemplo: $(2 \cdot 5)^3 = 2^2 \cdot 5^3$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$. Exemplo $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$

Actividades propostas

S6. Exprese como potencia de expoñente negativo.

$\frac{1}{3^4}$	$\frac{4}{4^5}$
$-\frac{5}{5^8}$	$\frac{7}{7^6}$
$\frac{2^5}{2^9}$	$\frac{3}{3^6}$

S7. Opere e simplifique.

$(-3)^2 \cdot 3^3 : (-3)^{-2}$	$(-5)^2 \cdot 5^{-1} : 5^2$	$2^5 \cdot 2^{-1} : (-2)^3$
$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$
$\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{3}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{3}$

S8. Exprese o resultado como unha única potencia.

$\left[\frac{2^5}{2^{-2}}\right]^2$	$\left[\frac{3^{-3}}{3^4}\right]^3$	$\left[\frac{2^3}{4}\right]^{-2}$
$[2^{-3} \cdot 8^2]^{-2}$	$[9^{-1} \cdot (-3)^2]^{-1}$	$[(-5)^4 \cdot 25^{-2}]^3$
$\frac{9^2 \cdot 3^{-2}}{3^3}$	$\frac{8^{-1} \cdot 2^2}{4^{-1}}$	$\frac{9^2 \cdot 3^2}{27^{-1} : 3^{-2}}$

S9. Simplifique.

$\frac{3^3 \cdot 5^2}{25 \cdot 9^{-1}}$	$\frac{2^2 \cdot 3^2}{8^{-2} \cdot 9^{-2}}$	$\frac{9^2 \cdot 25^2}{5^5 \cdot 27^2}$
$\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{25^{-1} \cdot 9^{-2}}$	$\frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 25^2}{5^{-4} \cdot 27 \cdot 4^{-1}}$	$\frac{9^3 \cdot 6^{-2}}{10^1 \cdot 18^2}$
$\frac{2^2 \cdot 6^{-2}}{18^{-1}}$	$\frac{10^2 \cdot 6^2}{5^{-2} \cdot 9^{-3}}$	$\frac{3^{-2} \cdot 6^2}{12^2}$

2.3.2 Potencias de expoñente racional

Definimos potencia de base *a* e expoñente fraccionario $\frac{m}{n}$ como: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

As propiedades citadas no punto anterior son válidas para as potencias de expoñentes fraccionarios.

Actividade resolta

Calcule $4^{1/2}$ utilizando a definición anterior.

$$4^{1/2} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$$

Actividades propostas

S10. Escriba estes radicais en forma de expoñente fraccionario.

$\sqrt[3]{3^2}$	$\sqrt[5]{(-5)^3}$	$\sqrt[4]{5^{12}}$
$\sqrt{(-7)^6}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[6]{(-3)^2}$

S11. Escriba estas potencias de expoñente fraccionario como radicais.

$2^{3/4}$	$5^{-3/2}$	$(-2)^{-1/3}$
$(-3)^{4/3}$	$(-1)^{-2/5}$	$3^{-3/2}$

2.3.3 Radicais

Defínese a *raíz n-ésima* dun número *a*, como o número *b* que verifica a igualdade $b^n = a$, polo tanto $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$

Actividades resoltas

- $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^4 = 16$
- $\sqrt[4]{16^3} = 16^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{12/4} = 2^3 = 8$

- Sacar factores fóra da raíz:

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2}\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Actividade proposta

S12. Extraia factores fóra das raíces.

$\sqrt{12}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{32}$
$\sqrt{75}$	$\sqrt{54}$	$\sqrt{24}$
$\sqrt{72}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{48}$

2.3.4 Operacións básicas con radicais

- Suma e resta.

Para poder sumar ou restar radicais, os índices das raíces e os radicandos (interior da raíz) deben ser iguais.

Actividade resolta

Realice a seguinte suma de radicais.

$25\sqrt{3} - \sqrt{108} = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -1\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

- Multiplicación e división.

Para multiplicar ou dividir debemos convertelos primeiro en radicais de igual índice para poder multiplicar ou dividir os radicandos.

Actividades resoltas

Realice os seguintes produtos e cocientes de radicais.

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}$
- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{8}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{27}{8}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \dfrac{2^{2/3}}{2^{3/6}} = \dfrac{2^{4/6}}{2^{3/6}} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

Actividades propostas

S13. Realice as seguintes operacións.

$3\sqrt{2} - 2\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{50}$	$2\sqrt{20} - \sqrt{45} - 6\sqrt{5}$
$3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{27} - \sqrt{75}$	$3\sqrt{12} - 2\sqrt{32} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{2}$
$3\sqrt{24} - 2\sqrt{54}$	$-3\sqrt{32} + 2\sqrt{18} + \sqrt{2}$
$\sqrt{12} - \sqrt{20} + 2\sqrt{27} - \sqrt{45}$	$-2\sqrt{8} - 3\sqrt{27} + \sqrt{18} - 2\sqrt{12}$

S14. Realice as seguintes operacións.

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[2]{2}}$
$\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{2}}$	$\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[4]{3}}$
$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[6]{5}$	$\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[10]{3}$

2.4 Porcentaxes

Unha porcentaxe, *a%*, relaciona mediante unha proporción, un total e unha das súas partes.

Actividade resolta

O 30% dos 6900 habitantes dunha vila dedícase á hostalaría ou vive indirectamente dela. Cantos son?

$$\frac{100}{6900} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{6900 \cdot 30}{100} = 2070\ habitantes$$

2.4.1 Porcentaxes e número índice

Toda porcentaxe pode expresarse como un número decimal que chamaremos *número índice*.

No exercicio anterior, o 30% pódese expresar do seguinte xeito:

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}30$$

Para calcular unha % dun total basta multiplicar este número polo total. No problema anterior bastaría facer $0{,}30 \cdot 6900 = 2070$ habitantes.

- Poderiamos ter que resolver o problema á inversa, coñecidos a parte e o tanto por cento, ter que calcular o total.

Actividades resoltas

Se levamos gastado 2500 € dun orzamento e iso supón só un 35% deste, poderiamos saber de cantos € é o orzamento?

Chamemos *x* á cantidade en € do orzamento:

$$0{,}35 \cdot x = 2500 \ \rightarrow x = \frac{2500}{0{,}35} = 7142{,}86\ €$$

- Poderiamos ter que calcular o tanto por cento, coñecidos o total e a parte.

Se dos 6900 habitantes dunha vila, 2070 deles dedícanse á hostalaría, que % da poboación se dedica a este sector?

Chamemos *x* ao número decimal que representa o tanto por cento:

$$x \cdot 6900 = 2700 \ \rightarrow x = \frac{2070}{6900} = 0{,}30 \rightarrow 0{,}30 \cdot 100 = 30\%\ da\ poboación$$

Actividades propostas

S15. Dos 2900 aspirantes nunha oposición, aprobaron só o 7%. Cantas persoas aprobaron?

S16. Dous irmáns compran unha consola de videoxogos, o maior paga un 75% do valor. Se a consola custou 250 €. Canto paga o irmán máis pequeno?

S17. Un traballador ten un salario de 1800 €. Se lle reteñen un 20% de IRPF, cal é o seu salario neto?

S18. Se dos 2500 € que temos aforrados gastamos 750 € en comprar un televisor, que % do aforrado gastamos?

S19. Dos 32 alumnos e alumnas que hai nunha clase de bacharelato só van 21 a unha excursión, que % do total do alumnado da clase foi á excursión?

S20. Se compramos un ordenador por 650 € e decidimos aumentarlle a memoria RAM e gastamos 125 €, que porcentaxe do gasto efectuado supón esa nova memoria?

S21. Celébrase un concerto nunha sala de festas e asisten 4800 persoas e iso supón o 80% da capacidade total da sala. Cal é o aforo total desa sala?

S22. Un pantano que se encontra ao 20% da súa capacidade ten actualmente 800 hm^3 de auga. Cal é a capacidade máxima dese pantano?

2.4.2 Aumentos e diminucións porcentuais

- Aumentar unha cantidade un x% equivale a calcular o (100+x)% de dita cantidade, polo tanto basta multiplicar a cantidade inicial por $\frac{100+x}{100}$ da dita cantidade.
- Diminuír unha cantidade un x% equivale a calcular o (100-x)% de dita cantidade, polo tanto basta multiplicar a cantidade inicial por $\frac{100-x}{100}$ da dita cantidade.

Actividades resoltas

Por levar 5 anos alugando o mesmo piso, o dono fainos un desconto dun 15% dos 500 € que pagabamos anteriormente. Canto deberemos pagar a partir de agora?

Se o alugamento diminúe un 15%, o prezo final será dun (100-15)% do prezo inicial.

Polo tanto:

$$0{,}85 \cdot 500 = 425\ €$$

O prezo do alugamento será de 425 €.

Se o prezo dunha televisión en decembro é 1200 €, e xusto a principio de ano sobe un 12%, cal é actualmente o prezo do televisor?

Se o prezo aumenta un 12%, o prezo final será dun (100+12)% do prezo final. Polo tanto:

$$1{,}12 \cdot 1200 = 1344\ €$$

Actividades propostas

S23. Se o nivel de vida subiu un 12% e o soldo medio está arredor dos 1100 €, canto debería subir o soldo este ano para que non nos afectase esa suba?

S24. Nun negocio de motos compran unha marca determinada de motos por un valor de 1200 € e despois sóbenlle un 15% a ese valor. Cal é o prezo de venda de cada moto?

S25. A un apicultor diminúelle a produción de mel nun 12,75% debido ao tempo con respecto ao ano pasado. Se este ano recolleu 1600 kg de mel, cantos kg recolleu o ano pasado?

S26. Por un artigo que estaba rebaixado un 12,25% pagamos 30,25€. Canto custaba antes da rebaixa?

S27. Estímase que coa entrada en vigor da lei do tabaco, nunha determinada empresa baixou o número de fumadores nun 80%. Se actualmente só fuman 120 traballadores, cantos traballadores fumadores conformaban o persoal da empresa?

S28. Dos 1155 € que gastamos nun ordenador dedicamos 210,79 € ao monitor. Que porcentaxe do gasto dedicamos á compra do monitor?

S29. Unha vila ten 6757 habitantes e hai dous anos só tiña 6502. Que tanto por cento aumentou a poboación nestes dous anos?

S30. Unha placa base para un ordenador custaba o ano pasado 425 €. Vendéronnola este ano por 387,25 €. Que tanto por cento baixou?

2.4.3 Porcentaxes sucesivas

Baseándonos nos dous exemplos anteriores podemos concluír que para aumentar ou diminuír unha cantidade un $x_1\%, x_2\%, x_3\%, \ldots, x_n\%$, debemos multiplicar a cantidade por $\left(\frac{100\pm x_1}{100}\cdot\frac{100\pm x_2}{100}\cdot\frac{100\pm x_3}{100}\cdot \ldots \cdot\frac{100\pm x_n}{100}\right)$

Actividade resolta

O prezo dunha viaxe sen IVE (21%) é de 550 € e fannos un desconto dun 25% por sermos clientes habituais. Cal é o prezo final da viaxe? Que porcentaxe do prezo inicial imos pagar?

IVE dun 21% → 100%+21%=121%→Multiplicamos a cantidade por 1,21

Desconto dun 25%→100%-25%=75%→Multiplicamos a cantidade por 0,75

É dicir, o prezo da viaxe será de $1{,}21 \cdot 0{,}75 \cdot 550 = 499{,}13$ €

A porcentaxe do prezo inicial será:

$$1{,}21 \cdot 0{,}75 = 0{,}9075 \to 0{,}9075 \cdot 100 = 90{,}75\%$$

Polo tanto só pagamos un 90,75% do prezo da viaxe ou o que é o mesmo rebaixáronnos un $100\% - 90{,}75\% = 9{,}25\%$

Actividades propostas

S31. O prezo dunhas accións dunha determinada marca comezan en bolsa cun valor de 55 € por acción pero ao longo do día sofren unha baixada dun 7% para despois remontar un 12%. Cal é o prezo da acción ao final do día?

S32. Un artigo que custaba 345 € sofre dúas baixadas ao final da temporada, a primeira dun 25% e a seguinte dun 20%. Canto vale ese artigo ao final de temporada? Que % baixou dende o seu prezo inicial?

S33. Cal é o prezo dun coche cuxo valor en exposición é de 24500 € se sabemos que se lle aumentou o valor un 21% de IVE e ten unha marxe de beneficio dun 15%?

S34. Se a un determinado produto lle aplicamos 3 subas consecutivas dun 20%, que % estamos subindo en realidade?

S35. Unha empresa factura en novembro 250.450 €, en decembro sobe a facturación un 85% e en xaneiro baixa un 45%. Cal será a facturación ao final de xaneiro? Con respecto ao mes de novembro, que % subiu a facturación?

S36. Un violín que custa 1800 € sobe un 50%. Despois baixa un 50%. Calcula o prezo final e a porcentaxe que sobe ou baixa.

S37. Un determinado xoguete vale 35 €. Nas festas do Nadal sobe un 20% e unha vez que pasan as ditas festas baixa un 15%. Calcule o prezo final e a porcentaxe da suba ou baixada.

S38. O prezo dun móbil sen IVE é de 370 €. Rebáixanme un 21%, se despois aplicamos o 21% de IVE, cal será o prezo final do móbil? En porcentaxes, que aconteceu?

2.4.4 Interese simple e interese composto

- O **interese simple**, *I*, é o beneficio que orixina unha cantidade de diñeiro, chamado capital, *C*, nun período de tempo expresado en anos, *t*, a un rédito determinado, *r*.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Actividade resolta

Depósítanse 1500 € nun banco durante 3 anos a un rédito dun 2,5% anual a interese simple. Cal é o beneficio que se obtén ao final do período?

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \xrightarrow{C=1500;r=2,5;t=3} I = \frac{1500 \cdot 2,5 \cdot 3}{100} = 112,50 \text{ €}$$

Logo ao final dos 3 anos recibiremos $1500 + 112,5 = 1612,50$ €

- O **interese composto**, *I*, é o beneficio que se obtén se, ao final de cada período de investimento, o beneficio anterior non se retira. O que acontece é que se engade ao capital inicial e reinvístese.

  O capital final, C_f, que se obtén ao investir un capital inicial, C_i, a un rédito, *r*, durante un tempo expresado en anos, *t*, cun interese composto é:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

O interese composto ou beneficio obtido é: $I = C_f - C_i$

NOTA: Habitualmente falamos dun 3% de interese cando deberiamos falar dun rédito dun 3%.

Actividade resolta

Calcula o capital obtido ao depositar a interese composto 5200 € nun banco que nos ofrece un 2,5% anual durante 3 anos.

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow{C_i=5200; r=2,5; t=3} C_f = 5200 \cdot \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^3 = 5599,83\ €$$

Ao final dos 3 anos poderemos retirar 5599,83 €.

- Algunhas veces acontece que os intereses se acumulan mensualmente, trimestralmente ou semestralmente. Entón na fórmula anterior hai que engadir un factor de corrección *k,* que indica o número de veces que acontece iso no ano.

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\right)^{k \cdot t}$$

Actividade resolta

Co enunciado anterior, engadimos que os intereses se acumulan trimestralmente.

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\right)^{k \cdot t} \xrightarrow{C=5200; r=2,5; t=3; k=4} C_f = 5200 \cdot \left(1 + \frac{2,5}{4 \cdot 100}\right)^{4 \cdot 3} = 5603,69\ €$$

Actividades propostas

S39. Dúas persoas invisten 12500 € durante 3 anos a un rédito dun 2,5%. Se a primeira o fai a interese composto e a segunda a interese simple, cal é o beneficio de cada unha?

S40. Calcule o capital inicial que, depositado a un rédito do 3,6% durante 5 anos a un interese simple, xera 490 €.

S41. Pedimos un préstamo de 9500 € e pagamos 11250 € nun pagamento único ao cabo de 3 anos. Sabendo que é un interese simple, calcule o rédito do préstamo.

S42. Canto tempo hai que manter 3000 € nun depósito a interese simple cun rédito do 3% para obter uns intereses de 450 €?

S43. Un investidor coloca 125000 € durante 6 anos ao 3,8% anual se os períodos de capitalización son cuadrimestrais. En canto se transformaría ese capital se o interese fose composto?

S44. Cal debe ser o capital que temos que investir a un interese composto durante 2 anos ao 3,5 % para que produza un capital final de 2500 €?

S45. Unha cantidade de cartos investidos a un interese composto durante 3 anos ao 5%, produce 250 €. Cal foi a cantidade investida?

S46. Calcule o rédito ao que se deberá prestar un capital para que despois de 50 anos os intereses sexan iguais ao capital prestado a un interese simple.

S47. Cantos anos hai que ter un capital de 8500 € a un rédito do 3,75% para que produza un interese de 2868,75 € a un interese simple?

S48. Cal deberá ser a cantidade de diñeiro que temos que investir a un interese composto durante 2 anos ao 4% para que produza uns intereses de 100 €?

2.5 Polinomios. Operacións

2.5.1 Terminoloxía básica

Faremos un pequeno repaso sobre a terminoloxía e as operacións básicas dos polinomios.

Observe a seguinte expresión $P(x) = 2x^5 - \sqrt{5}x^3 + \frac{2}{3}x - \pi$

- A dita expresión chámase polinomio e está formado por catro monomios $2x^5$, $-\sqrt{5}x^3$, $\frac{2}{3}x$ e $-\pi$.
- A variable é *x*. Poden existir polinomios con dúas variables, pero estes non serán os que estudemos neste módulo.
- Os números que acompañan as variables chámanse coeficientes. **Neste ámbito só traballaremos con coeficientes enteiros**.
- Cada monomio ten un grao, que será o grao da variable. O grao do polinomio será o maior de todos os graos de todos os monomios que forman o polinomio. Neste caso sería 5.
- Chamaremos monomios semellantes aos que teñen igual grao.

2.5.2 Operacións básicas entre polinomios

- Suma e resta de polinomios.

Para sumar e restar polinomios, súmanse ou réstanse os monomios semellantes e se deixa indicada a suma ou resta dos monomios que non o son.

Actividade resolta

Se son $P(x) = 2x^5 - x^3 + 2x - 1$ e $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3$. Calcule a suma e a resta destes polinomios.

- $P(x) + Q(x) = 2x^5 + (-1 + 2)x^3 - x^2 + (2 - 2)x + (-1 - 3) = 2x^5 + x^3 - x^2 - 4$
- $P(x) - Q(x) = 2x^5 + (-1 - 2)x^3 - (-x^2) + (2 + 2)x + (-1 + 3) = 2x^5 - 3x^3 + 4x + x^2 + 2$

- Produto de polinomios.

Para multiplicar dous polinomios, multiplícanse todos os monomios do primeiro polinomio por todos os monomios do segundo polinomio e despois realizamos as sumas e restas pertinentes cos monomios resultantes.

Actividade resolta

Se son $P(x) = 2x^2 + 2x - 1$ e $Q(x) = 2x^3 - 3$. Calcule o produto destes polinomios.

$$P(x) \cdot Q(x) = 2x^2 \cdot 2x^3 + 2x^2 \cdot (-3) + 2x \cdot 2x^3 + 2x \cdot (-3) - 1 \cdot 2x^3 - 1 \cdot (-3)$$
$$= 4x^5 - 6x^2 + 4x^4 - 6x - 2x^3 + 3 = 4x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 6x + 3$$

Actividade proposta

S49. Dados os seguintes polinomios:

$A(x) = 2x^2 - x - 1$	$B(x) = x^2 - 1$	$C(x) = 2x - 1$

Efectúe as seguintes operacións:

$A(x) - 2B(x) + C(x)$	$A(x) - 2x \cdot B(x) + x^2 \cdot C(x)$
$2x \cdot A(x) - B(x) \cdot C(x)$	$3x \cdot A(x) - x^3 \cdot C(x)$
$A^2(x) - x^2B(x)$	$4B^2(x) - x^2C^2(x)$

2.5.3 División por un polinomio x-a. Regra de Ruffini

Non estudaremos aquí como se dividen dous polinomios calquera. Dedicarémonos só á división dun polinomio por outro do tipo *x-a.* Este procedemento de división en particular chámase **Regra de Ruffini**.

Verémolo mediante un exemplo:

- Calcule $(x^3 + 4x^2 - 5): (x - 3)$

Para realizar a seguinte división utilizaremos a Regra de Ruffini:

Escribimos os coeficientes de todos os termos do dividendo, ordenados de maior grao ata o termo independente, tendo en conta que se non existe un termo temos que poñer cero.	$\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 4 & 0 & -5 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$
Á esquerda, colocamos o termo independente do divisor, cambiámolo de signo (xa comprenderemos o motivo disto no apartado de raíces dun polinomio) e baixamos o primeiro coeficiente do dividendo.	$\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 4 & 0 & -5 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$
Unha vez colocados deste xeito, multiplicamos o 3 polo 1 e colocámolo debaixo do 4. Sumamos o 4 ao resultado desta multiplicación.	$\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 4 & 0 & -5 \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & 7 & & \end{array}$
Agora repetimos o proceso, multiplicamos o 3 polo 7, colocámolo debaixo do 0 e volvemos sumar	$\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 4 & 0 & -5 \\ 3 & & 3 & 21 & \\ \hline & 1 & 7 & 21 & \end{array}$
Repetimos o proceso ata o final.	$\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 4 & 0 & -5 \\ 3 & & 3 & 21 & 63 \\ \hline & 1 & 7 & 21 & 58 \end{array}$

Chegado este momento podemos afirmar que:

$$(x^3 + 4x^2 - 5): (x - 3) = (x^2 + 7x + 21) + 58$$

Actividade resolta

Calcule $(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3):(x-1)$

Ao realizar o proceso anterior, ou sexa, ao aplicar a regra de Ruffini, obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & & 5 & 2 & 4 & -3 \\ \hline & 5 & 2 & 4 & -3 & \boxed{0} \leftarrow \\ & x^3 & x^2 & x & 1 & \end{array}$$

Polo que acontece que:

$$(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3):(x-1) = 5x^3 + 2x^2 + 4x - 3$$

Ou o que é o mesmo:

$$(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3) = (x-1) \cdot (5x^3 + 2x^2 + 4x - 3)$$

Actividade proposta

S50. Realice as seguintes divisións e indique cales son o cociente e o resto.

$(5x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1):(x-1)$	$(x^4 - 2x^2 - 2x - 3):(x+1)$
$(2x^4 + 2x^2 + 1):(x+2)$	$(5x^4 - x^3 + 1):(x-2)$

2.5.4 Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en escribilo como produto de varios polinomios, de maneira que, cada un deles, teña o menor grao posible.

Para factorizar polinomios podemos utilizar diversos métodos:

- Mediante a regra de Ruffini.

Factoricemos o seguinte polinomio $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 9x + 6$.

Posto que queremos encontrar un resto 0, os números que imos probar teñen que estar sempre entre os divisores do termo independente, neste caso do 6. Polo tanto os posibles candidatos que cómpre probar serían $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \; e \; \pm 6$.

	2	0	-3	4	-9	6
1		2	2	-1	3	-6
	2	2	-1	3	-6	0
	2	2	-1	3	-6	
1		2	4	3	6	
	2	4	3	6	0	
	2	4	3	6		
-2		-4	0	-6		
	2	0	3	0		

Co cal podemos concluír que:

$$2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 9\text{x} + 6 = (\text{x} - 1) \cdot (\text{x} - 1) \cdot (\text{x} + 2) \cdot (2x^2 + 3)$$

A $x = 1; x = 1$ e $x = -2$, cumpren que $P(1) = 0$ e $P(-2) = 0$

Estes valores *a* que cumpren $P(a) = 0$ reciben o nome de **raíces dun polinomio**. Polo de agora, mediante o método de Ruffini só calcularemos as raíces enteiras.

- Sacando o factor común.

Cando nun polinomio hai un factor que se repite en todos os seus termos, podemos extraer ese factor común.

Actividade resolta

Extraia os factores comúns.

- $-3x^3 + 4x^2 - 9\text{x} = \text{x} \cdot (-3x^2 + 4\text{x} - 9)$
- $2x^5 - 3x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot (2x^3 - 3\text{x} + 4)$

- Usando as igualdades notables.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2 - b^2$$

- Se tivésemos que factorizar o polinomio $x^2 + 8x + 16$ sabemos que se pode descompoñer directamente en $(x + 4) \cdot (x + 4)$
- Se temos que factorizar o polinomio $16x^4 - 25$. Poderiamos usar a terceira das igualdades e poderiamos expresar ese polinomio en $(4x^2 - 5) \cdot (4x^2 + 5)$

Actividade proposta

S51. Factorice os seguintes polinomios utilizando, cando proceda, os métodos explicados anteriormente. Indique as raíces enteiras dos polinomios.

$x^3 + 2x^2 - x - 2$	$x^4 + x^3 - x^2 - x$
$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$	$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$
$2x^3 + x^2 - x$	$4x^4 + 4x^3 - x^2 - x$
$4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$	$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$
$4x^4 + 16x^3 + 21x^2 + 9x$	

2.5.5 Fraccións alxébricas

Unha fracción alxébrica, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, é unha fracción que ten por denominador un polinomio.

Simplificación de fraccións alxébricas

Dúas fraccións alxébricas, $\frac{A(x)}{B(x)}$ e $\frac{C(x)}{D(x)}$ son equivalentes cando:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \rightarrow A(x) \cdot D(x) = B(x) \cdot D(x)$$

Para simplificar fraccións alxébricas utilizaremos cando conveña calquera dos tres métodos para factorizar os polinomios e poder eliminar factores comúns.

Actividade resolta

Simplifique a seguinte fracción alxébrica $\frac{x^3+3x^2+2x}{x^3+2x^2+x}$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^3 + 2x^2 + x} \xrightarrow{Sacamos\ factor\ común} \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x(x^2 + 2x + 1)}$$

Factorizamos o numerador, co cal temos $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

O denominador é unha igualdade notable, polo tanto $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{x(x + 1)(x + 2)}{x(x + 1)(x + 1)} = \frac{x + 2}{x + 1}$$

Operacións con fraccións alxébricas

As operacións entre fraccións alxébricas fanse exactamente igual que fariamos entre fraccións de números, tendo en conta que:

- Antes de comezar, se podemos, deberiamos simplificar todas e cada unha das fraccións alxébricas.
- Calcular un mínimo común múltiplo, para realizar unha suma ou resta de fraccións alxébricas, require un proceso previo de factorización de polinomios para escoller os factores comúns e non comúns elevados ao maior expoñente.
- Realizar unha multiplicación ou división entre fraccións de números é algo simple pero cando falamos de fraccións alxébricas temos que multiplicar polinomios.

Actividade resolta

Realice a seguinte operación entre fraccións alxébricas $\frac{x^2+\mathrm{x}}{x^3+2x^2+\mathrm{x}} - \frac{x^2+\mathrm{x}}{x^3-\mathrm{x}}$

Se factorizamos todos os polinomios e eliminamos os factores comúns, a operación que debemos realizar simplifícase moito:

$$\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x+1)} - \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x-1)} =$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}$$

Actividade proposta

S52. Efectúe as seguintes operacións e simplifique o resultado.

$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+2} - \frac{x^2-1}{x^2+2\mathrm{x}}$	$\frac{2\mathrm{x}-4}{\mathrm{x}+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-2\mathrm{x}}$
$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1} - \frac{x^2}{x^2-1}$	$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1} - \frac{x^2-9}{x^2+\mathrm{x}}$
$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1} - \frac{x^2}{x^2+2\mathrm{x}+1}$	$\frac{1}{\mathrm{x}-1} - \frac{x^2}{x^2-1} + \frac{1}{\mathrm{x}+1}$

2.6 Resolución de ecuacións sinxelas de grao superior a dous e sistemas de ecuacións

En módulos anteriores vimos como se resolve unha ecuación de segundo grao, lembraremos aquí só a fórmula coa que podemos resolver todas as ecuacións deste tipo.

Unha ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ resólvese mediante a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Actividade resolta

Resolva $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} = \begin{cases} \mathrm{x} = 2 \\ \mathrm{x} = {}^{6}/_{4} = {}^{3}/_{2} \end{cases}$$

Resolución de ecuacións sinxelas de grao superior a dous

Se temos que resolver ecuacións de grao maior ou igual que tres, deberiamos utilizar calquera dos tres métodos expostos para factorizar o polinomio e despois igualar a cero cada un dos polinomios resultantes da factorización.

Actividades resoltas

Resolva a seguinte ecuación $4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0$

$$Sacando\ factor\ común\ obtemos\ x(4x^3 - 4x^3 - x + 1) = 0$$

$$Probamos\ co\ 1\ na\ regra\ de\ Ruffini\ e\ obtemos\ x(x-1)(4x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$Decatámonos\ que\ 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)(2x-1)$$

Polo tanto, a ecuación inicial queda:

$$x(x-1)(2x-1)(2x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva a seguinte ecuación $6x^4 - 11x^3 + 6x^2 - x = 0$

$$Sacando\ factor\ común\ obtemos\ x(6x^3 - 11x^3 + 6x - 1) = 0$$

$$Probamos\ co\ 1\ \ na\ regra\ de\ Ruffini\ e\ obtemos\ x(x-1)(6x^2 - 5x + 1) = 0$$

Polo tanto, a ecuación inicial queda:

$$x(x-1)(6x^2-5x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 6x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Actividade proposta

S53. Resolva as seguintes ecuacións tendo en conta o traballo realizado no exercicio 51.

$x^3 + 2x^2 - \mathrm{x} - 2 = 0$	$x^4 + x^3 - x^2 - \mathrm{x} = 0$
$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2\mathrm{x} = 0$	$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + \mathrm{x} = 0$
$2x^3 + x^2 - \mathrm{x} = 0$	$4x^4 + 4x^3 - x^2 - \mathrm{x} = 0$
$4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4\mathrm{x} - 1 = 0$	$4x^3 + 8x^2 + 5\mathrm{x} + 1 = 0$
$4x^4 + 16x^3 + 21x^2 + 9\mathrm{x} = 0$	

Sistemas de ecuacións lineais e outros sistemas non lineais

Faremos un repaso dos tres métodos de resolución de sistemas de ecuacións lineais, mediante un exemplo dun xeito non exhaustivo xa que isto quedou estudado no módulo 3.

Actividade resolta

Resolva o seguinte sistema de ecuacións lineais $\left.\begin{matrix} x + 3y = -2 \\ 3x - y = 4 \end{matrix}\right\}$

- Método de substitución.

  Despexamos *x* na primeira ecuación e substituímolo na segunda.

$$\left.\begin{matrix} x + 3y = -2 \\ 3x - y = 4 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x=-2-3y} 3(-2-3y) - y = 4 \rightarrow -6 - 9y - y = 4$$

$$\rightarrow -10y = 10 \rightarrow y = -1$$

$$x = -2 - 3y \xrightarrow{y=-1} x = -2 - 3 \cdot (-1) = 1$$

A solución é $x = 1$ e $y = -1$

- Método de igualación.

  Despexamos *x* nas dúas ecuacións e igualamos.

$$\left.\begin{aligned} x+3y&=-2 \\ 3x-y&=4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x&=-2-3y \\ x&=\frac{4+y}{3} \end{aligned}\right\} \rightarrow -2-3y=\frac{4+y}{3} \rightarrow \frac{-6-9y}{3}=\frac{4+y}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow -6-9y=4+y \rightarrow -10y=10 \rightarrow y=-1$$

$$x=-2-3y \xrightarrow{y=-1} x=-2-3\cdot(-1)=1$$

  A solución é $x=1$ e $y=-1$

- Método de redución.

Igualamos coeficientes nalgunha das incógnitas e restamos a ecuacións.

$$\left.\begin{aligned} x+3y&=-2 \\ 3x-y&=4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot 3\ a\ primeira\ ecuación} \left.\begin{aligned} 3x+9y&=-6 \\ 3x-y&=4 \end{aligned}\right\} \rightarrow 10y=-10 \rightarrow y=-1$$

$$x=-2-3y \xrightarrow{y=-1} x=-2-3\cdot(-1)=1$$

  A solución é $x=1$ e $y=-1$

- Cando o sistema non é lineal, utilizaremos o método de substitución para resolvelo.

Actividade resolta

Resolve o seguinte sistema $\left.\begin{aligned} y&=2x \\ x\cdot y&=50 \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} y&=2x \\ x\cdot y&=50 \end{aligned}\right\} \rightarrow x\cdot 2x=50 \rightarrow 2x^2=50 \rightarrow x^2=25 \rightarrow x=\pm 5$$

  As solucións son:

$$\begin{cases} Para\ x=5 \ \rightarrow y=10 \\ Para\ x=-5 \ \rightarrow y=-10 \end{cases}$$

Actividades propostas

S54. Resolva estes sistemas de ecuacións polo método de substitución.

$\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$	$\begin{cases} -x+3y=-4 \\ 5x+y=4 \end{cases}$
$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x-2y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

S55. Resolva polo método de redución.

$\begin{cases}3x-5y=-26\\4x+10y=32\end{cases}$	$\begin{cases}2x+3y=7\\5x+y=-2\end{cases}$	$\begin{cases}4x+3y=-3\\3x+2y=-3\end{cases}$
$\begin{cases}2x-5y=-2\\3x+2y=1\end{cases}$	$\begin{cases}-3x+2y=3\\4x+3y=3\end{cases}$	$\begin{cases}3x-2y=1\\5x+3y=2\end{cases}$

S56. Resolva polo método de igualación.

$\begin{cases}x-2y=-1\\x+3y=-6\end{cases}$	$\begin{cases}6x-y=5\\4x-y=1\end{cases}$	$\begin{cases}x-y=2\\3x-y=5\end{cases}$

S57. Resolva estes sistemas de ecuacións non lineais.

$\begin{cases}x^2-y^2=3\\x^2+y^2=5\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+y^2=2\\x-y=0\end{cases}$	$\begin{cases}x\cdot y=1\\x+y=2\end{cases}$
$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x+y=7\end{cases}$	$\begin{cases}y^2-8x=0\\2x-y=8\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-y^2=16\\3x-5y=0\end{cases}$

Resolución de problemas cotiáns usando ecuacións e sistemas de ecuacións

Calquera problema que nos poida xurdir na nosa vida cotiá podería resolverse tendo en conta dúas cuestións:

- Identificar perfectamente quen é a incógnita ou incógnitas
- Presentar a ecuación ou sistemas de ecuacións.

Actividade resolta

A área dun terreo rectangular é $72\,m^2$. Se o terreo mide o dobre de longo que de ancho, cales son as súas dimensións?

Para resolver este tipo de problemas, como dixemos anteriormente, é importante;

- Identificar as incógnitas.

  Chamamos *x* á lonxitude do ancho e *y* á lonxitude do longo.
- Presentamos o sistema de ecuacións.

$$\left.\begin{matrix}y=2x\\x\cdot y=72\end{matrix}\right\}\rightarrow x\cdot 2x=72\rightarrow 2x^2=72\rightarrow x^2=36\rightarrow x=\pm 6$$

  A solución é $x=6\,m$ posto que unha lonxitude non pode ser negativa. Polo tanto, o longo mide $y=12\,m$.

Actividades propostas

S58. Nunha tenda hai dous tipos de xoguetes. Os do tipo A que utilizan 2 pilas e os do tipo B, que utilizan 5 pilas. Se en total hai 30 xoguetes e 120 pilas, cantos xoguetes hai de cada tipo?

S59. Pola mestura de 5 kg de pintura verde e 3 kg de pintura branca paguei 69 €. Calcule o prezo dun kg de pintura branca e de pintura verde se sabemos que se mesturase un kg de cada unha o prezo da mestura sería 15 €.

S60. Nun garaxe hai 30 vehículos entre coches e motos. Se en total hai 100 rodas, cantos coches e motos hai?

S61. Un rectángulo ten un perímetro de 172 metros. Se o longo é 22 metros maior que o ancho, cales son as dimensións do rectángulo?

S62. Calcule dous números que se diferencian en 2 unidades e a suma dos seus cadrados é 580. Cales son os números?

S63. Uns amigos alugan unha furgoneta por 490 € para faceren unha viaxe. A última hora apúntanse dous máis e así devólvenlle 28 € a cada un dos outros. Cantos foron á excursión e canto pagou cada un?

S64. Un comerciante quere vender por 60000 € unha partida de ordenadores que ten no seu almacén. Dous deles están deteriorados e decide subir 50 € o prezo dos restantes, para obter os mesmos ingresos. Cantos ordenadores tiña e cal era o prezo de cada un deles?

S65. Un xardín rectangular ten unha área de 900 m^2 e esta arrodeado por un paseo de 5 m de longo cuxa área é de 850 m^2. Cales son as dimensións do xardín?

3. Actividades finais

S66. Clasifique estes números en naturais, enteiros, racionais ou irracionais. Cando for posible, expréseos en forma de fracción.

$\frac{12}{4}$	$1,2$	$\frac{2}{6}$	$0,\hat{6}$	$3,\hat{9}$
$1,\widehat{23}$	$1,234567\ldots$	$\sqrt{9}$	$\frac{-25}{5}$	$4,\hat{9}$

S67. Os seguintes intervalos están expresados mediante desigualdades ou con parénteses-corchetes, expréseos doutro xeito en cada caso:

$(0,3]$	$0 \leq x \leq 2$	$-1 \leq x < 3$
$[-1,1)$	$(2,5)$	$(-3,0]$
$-1 < x < 4$	$x \geq -2$	$[0,1)$

S68. Exprese o resultado como unha única potencia.

$\left[\frac{3^2}{3^{-1}}\right]^3$	$[(-3)^4 \cdot 9^{-2}]^3$	$\left[\frac{3^2}{9}\right]^{-1}$
$[2^{-4} \cdot 4^3]^{-1}$	$\left[\frac{5^{-2}}{5^3}\right]^{-1}$	$\frac{5^2}{25^{-1}: 5^2}$

S69. Simplifique:

$\frac{5^3 \cdot 2^2}{8 \cdot 5^{-1}}$	$\frac{3^2 \cdot 2^{-2}}{9^{-2} \cdot 8^{-2}}$	$\frac{3^2 \cdot 5^2}{25^{-2} \cdot 27}$
$\frac{2^3 \cdot 3^{-3} \cdot 5^2}{5^{-1} \cdot 9 \cdot 4^{-2}}$	$\frac{2^2 \cdot 9^{-2} \cdot 25^2}{5^{-1} \cdot 27^{-1}}$	$\frac{8^2 \cdot 9^2 \cdot 5^2}{25^{-1} \cdot 3^{-2}}$

S70. Simplifique:

$2\sqrt{12} - \sqrt{32} - \sqrt{75} - 3\sqrt{2}$	$\sqrt{12} + \sqrt{3} - \sqrt{27} - 4\sqrt{75}$
$-\sqrt{8} - \sqrt{27} + 2\sqrt{18} - \sqrt{12}$	$\sqrt{32} - \sqrt{18} + 3\sqrt{2}$
$4\sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 6\sqrt{5}$	$5\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$

S71. Realice as seguintes operacións:

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{3}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{3}}$
$\dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[8]{2}}$	$\dfrac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{5}}$

S72. O prezo dunha vivenda era hai dous anos de 152000 €. O prezo sufriu nestes dous anos unha baixa dun 5,25% o primeiro ano e unha subida dun 3,12% o segundo ano. Cal é o prezo actual da vivenda? Que % subiu ou baixou o prezo nestes dous anos?

S73. Paguei 16,29 € por unha camisa que me rebaixaron un 12% e un 5% sucesivamente. Cal era o prezo inicial da camisa?

S74. Un panadeiro vende a barra de pan actualmente a 1,60 €, estímase que o prezo da fariña subirá un 2% durante 3 anos consecutivos e iso afectará de igual xeito sobre o prezo do pan. Cal será o prezo da barra ao final deses 3 anos?

S75. Calcule a canto ascende o interese simple dun capital de 25000 € investido durante 4 anos a un rédito dun 6%.

S76. Calcule o interese simple dun capital de 30000 € investido durante 90 días a un rédito dun 4%.

S77. Ao cabo dun ano, un banco ingresa nunha conta de aforro un interese simple de 1800 € a un rédito do 2%. Calcule o capital da conta.

S78. Deposítase un capital de 15000 € a un interese composto do 2,50% durante 3 anos. Calcule o capital final se o período de capitalización é anual.

S79. Cos datos do exercicio anterior calcule o capital final se o período de capitalización é mensual.

S80. Resolva as seguintes ecuacións realizando primeiramente unha factorización dos polinomios utilizando, cando proceda, os métodos explicados nesta unidade.

$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = 0$	$2x^4 + 3x^3 - x = 0$
$4x^4 + 4x^3 - x^2 - x = 0$	$2x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x = 0$
$3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x = 0$	$3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

S81. Efectúe as seguintes operacións e simplifique o resultado.

$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1}-\frac{x^2-1}{x^2+\mathrm{x}}$	$\frac{1}{\mathrm{x}+1}-\frac{\mathrm{x}-1}{x^2+2\mathrm{x}+1}$
$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+2}-\frac{x^2}{x^2-4}$	$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+1}\cdot\frac{x^2-9}{x^2+3\mathrm{x}}$

S82. Nun exame tipo test, as preguntas correctas suman un punto e as incorrectas restan medio punto. En total hai 100 preguntas e hai que contestalas todas. Se a cualificación dun alumno foi 8,05 sobre 10, calcule o número de preguntas que contestou correcta e incorrectamente.

S83. Auméntase o lado dunha baldosa cadrada en 3 cm e a súa área queda multiplicada por 4. Que lado tiña a baldosa?

S84. Cunha corda de 34 metros pódese debuxar un rectángulo (non pode sobrar corda) cuxa diagonal mide 13 metros. Calcule canto mide a base e a altura do dito rectángulo.

S85. Resolva os seguintes sistemas de ecuacións non lineais:

$\begin{cases} x\cdot y=12 \\ x+y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ x+y=17 \end{cases}$
$\begin{cases} y^2=x \\ x-y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} y^2=x \\ y=6-x \end{cases}$

4. Solucionario

4.1 Solucións das actividades propostas

S1.

0,5	$1{,}1\hat{6}$	0,125	$0,\widehat{36}$
1,2	0,0525	$0,\hat{3}$	5,32
2	$1,\hat{6}$	5	$0,\hat{6}$

S2.

$\mathbb{N}$	$\frac{2125}{100} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\frac{26}{99} \in \mathbb{Q}$	$\frac{297}{90} \in \mathbb{Q}$
$\frac{303}{99} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Z}$	$\frac{225}{9} = 25 \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\frac{471}{90} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$

S3.

$-5 \leq x \leq 6$	$-1 < x < 5$	$-6 \leq x < 1$
$0 < x \leq 6$	$x \leq 2$	$0 < x$

S4.

$[-1,3]$	$(3,+\infty)$	$(-\infty,-1]$
$[2,6)$	$(-3,7)$	$[4,+\infty)$

S5.

$[1,6)$	$[-5,+\infty)$
$(-\infty,-9)$	$(-8,-4)$

$1 \leq x < 6$	$-5 \leq x$
$x < -9$	$-8 < x < -4$

S6.

3^{-4}	4^{-4}
-5^{-7}	7^{-5}
2^{-4}	3^{-5}

S7.

3^7	5^{-1}	2^1
$\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$
$\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{0} = 1$

S8.

2^{14}	3^{-21}	2^{-2}
2^{-6}	$3^0 = 1$	$5^0 = 1$
3^{-1}	2^1	3^7

S9.

3^5	$2^8 \cdot 3^6$	$3^{-2} \cdot 5^{-1}$
$2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4$	$2^4 \cdot 5^8$	$2^{-5} \cdot 5^{-1}$
2	$2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^4$	$3^{-2} \cdot 2^{-2}$

S10.

$3^{2/3}$	$(-5)^{3/5}$	5^3
$(-7)^{6/2} = (-5)^3$	$2^{3/4}$	$(-3)^{1/3}$

S11.

$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^3}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{(-2)}}$
$\sqrt[3]{(-3)^4}$	$\sqrt[5]{(-1)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{3^3}}$

S12.

$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$
$5\sqrt{3}$	$3\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$
$6\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$

S13.

$8\sqrt{2}$	$-5\sqrt{5}$
$-3\sqrt{3}$	$-3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$
$12\sqrt{6}$	$7\sqrt{2}$
$8\sqrt{3}-5\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}-13\sqrt{3}$

S14.

$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[6]{\frac{25}{8}}$
$\sqrt[6]{\frac{5}{2}}$	$\sqrt[20]{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[3]{5}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$

S15. *203 aspirantes.*

S16. *62,5 €.*

S17. *1440 €.*

S18. *30%.*

S19. *65,63 %.*

S20. *16,13 %.*

S21. *6000 persoas.*

S22. *4000* hm^3*.*

S23. *1232 €.*

S24. *1380 kg.*

S25. *1833,81 kg.*

S26. *34,47 €.*

S27. *600 fumadores.*

S28. *18,25%.*

S29. *Aumentou un 3,92%.*

S30. *Baixou un 8,88 %.*

S31. *57,29 €.*

S32. *207 €. Baixa un 40%.*

S33. *17606,90 €.*

S34. *Sobe un 72,80%.*

S35. *254832,88 €. Sobe un 1,75%.*

S36. *1350 €. Baixa un 25%.*

S37. *35,70 €. Sobe un 2%.*

S38. *Vale 353,68 €. O prezo baixa un 4,41%.*

S39. *A un interese simple 937,5 € e a un interese composto 961,13 €.*

S40. *Un capital de 2500 €.*

S41. *Un 6,14%.*

S42. *Durante 5 anos.*

S43. *156786 €.*

S44. *Un capital inicial de 2333,78 €.*

S45. *1586,04 €.*

S46. $C = \frac{C \cdot r \cdot 50}{100} \xrightarrow{eliminamos\ C} r = \frac{100}{50} = 2\%.$

S47. *9 anos.*

S48. $C_i + 100 = C_i \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 \rightarrow 100 = 0{,}0816 \cdot C_i \rightarrow C_i = 1225{,}49$ €.

S49.

x	$x^2 + x - 1$
$2x^3 - x^2 - 1$	$-2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x$
$3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1$	$4x^3 - 9x^2 + 4$

S50.

$C(x) = 5x^3 + 4x^2 + 6x + 4\ \text{ e }\ R = 5$	$C(x) = x^3 - x^2 - x - 1\ \text{ e }\ R = -2$
$C(x) = 2x^3 - 4x^2 + 10x - 20\ \text{ e }\ R = 41$	$C(x) = 5x^3 + 9x^2 + 18x + 36\ \text{ e }\ R = 73$

S51.

$(x+1)(x+1)(x+2)$	$x(x+1)(x+1)(x-1)$
$x(x-1)(x+1)(x+2)$	$x(x+1)(x+1)(2x+1)$
$x(x+1)(2x-1)$	$x(x+1)(2x+1)(2x-1)$
$(x-1)(x+1)(2x+1)(2x+1)$	$(x-1)(2x+1)(2x+1)$
$x(x+1)(2x+3)(2x+3)$	

S52.

$\frac{1}{x^2 + 2x}$	$\frac{2x - 2}{x}$
$\frac{-x}{x^2 - 1}$	$\frac{9}{x^2 + x}$
$\frac{x}{x^2 + 2x + 1}$	$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

S53.

$x = -1; x = -1\ e\ x = -2$	$x = 0; x = -1; x = -1\ e\ x = 1$
$x = 0; x = 1; x = -1\ e\ x = -2$	$x = 0; x = -1; x = -1\ e\ x = \frac{-1}{2}$
$x = 0; x = -1\ e\ x = \frac{1}{2}$	$x = 0; x = -1; x = \frac{-1}{2}\ e\ x = \frac{1}{2}$
$x = 1; x = -1; x = \frac{-1}{2}\ e\ x = \frac{-1}{2}$	$x = 1; x = \frac{-1}{2}\ e\ x = \frac{-1}{2}$
$x = 0; x = -1; x = \frac{-3}{2}\ e\ x = \frac{-3}{2}$	

S54.

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 9/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$
$\begin{cases} x = 4/9 \\ y = 1/9 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

S55.

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$
$\begin{cases} x = 1/19 \\ y = 8/19 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -3/17 \\ y = 21/17 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 7/19 \\ y = 1/19 \end{cases}$

S56.

$\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3/2 \\ y = -1/2 \end{cases}$

S57.

$\begin{cases} x = 2, y = 1 \\ x = -2, y = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = -1, y = -1 \end{cases}$	$x = 1, y = 1$
$\begin{cases} x = 3, \quad y = 4 \\ x = 4, \quad y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 8, \quad y = 8 \\ x = 2, \quad y = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5, \quad y = 3 \\ x = -5, \quad y = -3 \end{cases}$

S58. *Se chamamos a* $\begin{cases} x = número\ de\ xoguetes\ do\ tipo\ A \\ y = número\ de\ xoguetes\ do\ tipo\ B \end{cases}$*, a solución é 10 xoguetes do tipo A e 20 do tipo B.*

S59. *Se chamamos a* $\begin{cases} x = prezo\ do\ kg\ de\ pintura\ verde \\ y = prezo\ do\ kg\ de\ pintura\ branca \end{cases}$*, a solución é 12 € o kg de pintura verde e 3 € o kg da branca.*

S60. *Se chamamos a* $\begin{cases} x = número\ de\ coches \\ y = número\ de\ motos \end{cases}$*, a solución é 20 coches e 10 motos.*

S61. *Se chamamos a* $\begin{cases} x = lonxitude\ do\ largo \\ y = lonxitude\ do\ ancho \end{cases}$*, a solución é 54 m de longo por 32 m de ancho.*

S62. *Se chamamos a* $\begin{cases} x = número\ maior \\ y = número\ menor \end{cases}$*, a solución é 16 para o primeiro número e 14 para o segundo.*

S63. *Se chamamos a* $\begin{cases} x = número\ de\ amigos\ que\ foron\ á\ excursión \\ y = €\ que\ pagou\ cada\ amigo \end{cases}$*, a solución é 7 amigos e cada un deles pagou 70 €.*

S64. *Se chamamos a* $\begin{cases} x = núm\ de\ ordenadores \\ y = prezo\ inicial\ de\ cada\ ordenador \end{cases}$*, a solución é 50 ordenadores e cada un deles pagou 1200 €.*

S65. *Se chamamos a x e y ás dimensións do xardín, a solución é un rectángulo de dimensións 60 m e 15 m.*

4.2 Soluciόns das actividades finais

S66.

$\mathbf{3} \in \mathbb{N}$	$\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{10}} \in \mathbb{Q}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \in \mathbb{Q}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \in \mathbb{Q}$	$\mathbf{4} \in \mathbb{N}$
$\frac{\mathbf{122}}{\mathbf{99}} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbf{3} \in \mathbb{N}$	$-\mathbf{5} \in \mathbb{Z}$	$\mathbf{5} \in \mathbb{N}$

S67.

$0 < x \leq 3$	$[0,2]$	$[-1,3)$
$-1 \leq x < 1$	$2 < x < 5$	$-3 < x \leq 0$
$(-1,4)$	$[-2,+\infty)$	$0 \leq x < 1$

S68.

3^9	$3^0 = 1$	$3^0 = 1$
2^{-2}	5^5	5^6

S69.

$5^4 \cdot 2^{-1}$	$3^6 \cdot 2^4$	$3^{-1} \cdot 5^6$
$2^7 \cdot 3^{-5} \cdot 5^3$	$2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5^5$	$2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^4$

S70.

$-7\sqrt{2} - \sqrt{3}$	$-20\sqrt{3}$
$4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$

S71.

$\sqrt[10]{3^3}$	$\sqrt[6]{\frac{25}{3}}$
$\sqrt[8]{50}$	$\sqrt[15]{\frac{1}{25}}$

S72. *O prezo é de 148513,42 €. Baixou un 2,29%.*

S73. *Custaba 17,63 €.*

S74. *1,70 €.*

S75. *6000 €.*

S76. *295,89 €.*

S77. *90000 €.*

S78. *16557,19 €.*

S79. *16575,84 €.*

S80.

$x=-1; x=-1; x=0 \ e \ x=1$	$x=-1; x=-1; x=0 \ e \ x=\frac{1}{2}$
$x=-1; x=\frac{-1}{2}; x=0 \ e \ x=\frac{1}{2}$	$x=-1; x=-1; x=0 \ e \ x=\frac{3}{2}$
$x=-1; x=0; x=1 \ e \ x=\frac{2}{3}$	$x=-1; x=0; x=\frac{2}{3} \ e \ x=2$

S81.

$\frac{1}{x^2+\mathrm{x}}$	$\frac{2}{(\mathrm{x}+1)^2}$
$\frac{-2x}{x^2-4}$	$\frac{\mathrm{x}-3}{\mathrm{x}+1}$

S82. *Chamamos a* $\begin{cases} x = número\ de\ respostas\ correctas \\ y = número\ de\ respostas\ incorrectas \end{cases}$, *a solución é 87 correctas e 13 incorrectas.*

S83. *Chamamos a* $\begin{cases} x = \text{lonxitude do lado do cadrado pequeno} \\ y = \text{lonxitude do lado do cadrado grande} \end{cases}$, *a solución é* $x = 3\ cm$.

S84. *Chamamos a* $\begin{cases} x = \text{lonxitude da base do rectángulo} \\ y = \text{lonxitude da altura do rectángulo} \end{cases}$, *a solución é* $\begin{cases} x = 12\ m,\ \ y = 5\ m \\ x = 5\ m,\ \ y = 12\ m \end{cases}$

S85.

$\begin{cases} x=4, y=3 \\ x=3, y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=5, y=12 \\ x=12, y=5 \end{cases}$
$\begin{cases} x=1, y=-1 \\ x=4, y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=4, y=2 \\ x=9, y=-3 \end{cases}$

5. Glosario

F	▪ Factorización dun polinomio	Consiste en expresalo como produto de polinomios do menor grao posible.
	▪ Fracción alxébrica	A toda expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$,se son *P(x)* e *Q(x)* polinomios.
I	▪ Interese composto	Beneficio que se obtén se, ao final de cada período de investimento, o beneficio anterior non se retira.
	▪ Interese simple	Beneficio que orixina unha cantidade de diñeiro, nun tempo determinado, a un rédito determinado.
	▪ Intervalo	Intervalo de extremos *a* e *b* ao conxunto dos números comprendidos entre *a* e *b*.
	▪ Irracionais	Todos aqueles números que non poden expresarse como $\frac{a}{b}$, se son a e b enteiros.
M	▪ Monomio	Expresión alxébrica na que as únicas operacións entre as variables (x, y….) que aparecen son a multiplicación e o expoñente natural.
P	▪ Polinomio	Expresión alxébrica formada pola suma ou a resta de varios monomios.
R	▪ Racionais	Todos aqueles números que poden expresarse como $\frac{a}{b}$, se son *a* e *b* enteiros.
	▪ Raíz dun polinomio	Son os únicos valores *a* que cumpren que *P(a)=0*
	▪ Raíz n-ésima	Chámase raíz n-ésima dun número *a* outro número *b* que cumpre que $b^n = a$
	▪ Reais	Conxunto dos números racionais e irracionais.
	▪ Rédito	Rendemento xerado por un capital expresado en %.
S	▪ Sistema de ecuacións lineais	Son todos aqueles que, despois de simplificar, poden expresarse como $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, se son *a, b, c, a´, b´* e *c´* números reais.

6. Bibliografía e recursos

Bibliografía

- Matemáticas Enseñanzas aplicadas. Serie Soluciona. 4º ESO. Editorial Santillana.
- Matemáticas Enseñanzas académicas. Serie Resuelve. 4º ESO. Editorial Santillana.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4ª Eso. Editorial Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4ª Eso. Editorial Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4º de la ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de la ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.

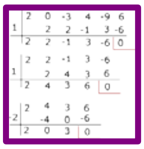
Ligazóns de Internet

Nestas ligazóns pode atopar trucos e información que pode consultar para mellorar a súa práctica.

- http://www.ematematicas.net/
- http://www.apuntesmareaverde.org.es/
- http://profesor10demates.blogspot.com.es/
- http://historiaybiografias.com/archivos_varios2/ruffini.swf
- http://es.numberempire.com/factoringcalculator.php
- http://www.minimath.net/index_es.htm
- http://lasmatematicas.eu/
- http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus/
- http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/quadratic/
- http://educalab.es/recursos

7. Anexo. Licenza de recursos

Licenzas de recursos utilizadas nesta unidade didáctica

RECURSO	DATOS DO RECURSO
 RECURSO 1	▪ Procedencia: http://www.ematematicas.net/