XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para personas adultas

Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 4

Unidad didáctica 4

Estadística y probabilidad

Índice

1. Introducción

1.1 Descripción

En esta unidad podemos distinguir dos bloques, un primer bloque dedicado a la estadística y otro a la probabilidad.

- De módulos anteriores conocemos aspectos básicos sobre la estadística, las distintas fases de un estudio estadístico, las muestras y la representatividad de estas sobre las poblaciones, algunos parámetros de posición y dispersión que nos proporcionan importante información de las muestras y de las poblaciones, diferentes formas de representación gráfica de los estudios estadísticos, etc. En este módulo profundizaremos un poco más sobre todos estos aspectos y estudiaremos algunos más que también son necesarios en cualquier estudio estadístico básico.
- En el segundo bloque estudiaremos conceptos relacionados con el azar y la probabilidad, la relación entre la frecuencia y la probabilidad de un suceso y la regla de Laplace, que nos permitirá fácilmente calcular dicha probabilidad.

1.2 Conocimientos previos

Esta unidad se basa en conocimientos previos de los módulos anteriores. Aunque se hará un pequeño recordatorio mediante ejemplos de esos conceptos, sería muy útil repasar ciertos conceptos básicos como:

- Medidas de posición: media, moda, mediana. Cálculo, interpretación y propiedades.
- Medidas de dispersión: varianza y desviación típica.
- Diferentes gráficos estadísticos: diagrama de barras, histograma y diagrama de sectores.

1.3 Criterios de evaluación

- Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación y fuentes públicas oficiales (IGE, INE, etc.).
- Estimar la posibilidad de que se produzca un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, e identificando los elementos asociados al experimento.

2. Secuencia de contenidos y actividades

2.1 Estadística

2.1.1 Utilidad de la estadística

En la actualidad la estadística se entiende como un método en la toma de decisiones, de ahí la importancia en multitud de estudios científicos de todas las ramas del saber:

- ¿Cómo decidir si un nuevo producto comercial tendrá éxito?
- ¿Influye el IPC en la tasa de desempleo?
- ¿Qué diría un sociólogo sobre la intención del voto después de analizar una encuesta?
- A partir de un estudio sobre el crecimiento de la población de un país, ¿podrá un experto en geografía humana calcular la población del año 2050?
- ¿Cuáles serán las necesidades escolares de un país para los próximos cinco años?

Muchas de estas preguntas tienen su respuesta gracias a la estadística, ya que a través de procedimientos de inferencia estadística se puede responder a las cuestiones formuladas con un margen de error prefijado; esto evidentemente ya sale fuera de los contenidos a estudiar en esta unidad.

Divisiones de la estadística

Estadística descriptiva o deductiva

Trata del recuento, la ordenación y la clasificación de los datos obtenidos de las observaciones. Se construyen tablas y se representan en gráficos que permiten simplificar en gran medida la complejidad de los datos que intervienen en la distribución. En base a los datos, se obtienen los parámetros estadísticos que caracterizan la distribución. Esta parte de la estadística se limita a realizar deducciones directamente a partir de los datos y los parámetros obtenidos.

Estadística inferencial o inductiva

Formula y resuelve el problema de establecer previsiones y deducciones generales sobre una población a partir de los resultados obtenidos de una muestra. Utiliza los resultados obtenidos mediante la estadística descriptiva y se apoya fuertemente en el cálculo de probabilidades.

2.1.2 Conceptos previos

Antes de exponer los conocimientos previos presentaremos una actividad resuelta.

Actividad resuelta

El ayuntamiento de una localidad necesita conocer los hábitos en el tiempo libre de la gente joven, con edades comprendidas entre los 12 y los 17 años, para saber qué actividades puede proponer.

- Definimos **población** como el conjunto de todos los elementos sobre el que se va a realizar el estudio estadístico.

En esta actividad, la población sería la totalidad de los jóvenes de la localidad con edades comprendidas entre los 12 y 17 años.

- **Individuo** es cada elemento de la población o muestra.

En nuestro ejemplo, un individuo es una persona joven de la localidad con una edad comprendida entre 12 y 17 años.

- **Muestra** es la parte de la población que vamos a estudiar para poder sacar después conclusiones sobre toda la población.

En nuestra actividad, la muestra será el grupo de gente joven comprendida entre los 12 y los 17 años a quien se le haga la encuesta.

- Las propiedades o características que estudiaremos reciben el nombre de **variables estadísticas** y pueden clasificarse así:
  - **Cualitativas**, cuando los valores sobre los que preguntamos no se pueden expresar con números; son cualidades como, por ejemplo, el color de los ojos, el color del pelo...
  - **Cuantitativas**, cando los valores sobre los que preguntamos se expresan con números. De estas distinguiremos dos:
  - **Discretas,** cando solo podemos escoger entre un número finito de valores, por ejemplo, el número de hijos o hijas que tiene una pareja: solo podemos escoger entre 0, 1, 2, 3..., hasta un número finito.
  - **Continuas,** cuando la variable puede tomar infinitos valores, por ejemplo, el peso. En el peso podríamos distinguir entre 75,2 y 72,205 y, por lo tanto, serían infinitos valores.

Actividades propuestas

S1. Indique el tipo de variable estadística y razone, en cada caso, si sería mejor analizar una muestra o directamente estudiar toda la población.

- El sexo de los habitantes de una ciudad.
- La nacionalidad de las personas que viven en su país.
- El dinero gastado por sus hermanos en un día.
- El peso de todos sus amigos y amigas.
- El color de los ojos de su familia directa (abuelos, tíos, primos, hermanos e hijos).
- Velocidad a la que pasan los coches por una calle.
- El número de hijos de todos sus primos.

S2. Se va realizar un estudio estadístico sobre el gasto que hacen las personas que van a un determinado negocio. De las 12 358 personas que visitaron el negocio se escogieron 120 y, de ahí, se extienden las conclusiones a toda la población. Identifique: variable estadística, población, muestra, tamaño muestral e individuo.

2.1.3 Fases y tareas de un estudio estadístico

Todo estudio estadístico consta de una serie de fases y tareas bien diferenciadas:

- Definición de la población y de la característica que vamos a estudiar.

En esta fase tenemos que fijar la población a estudiar, la característica, qué y cómo vamos recoger los datos, etc.

- Selección de la muestra.

Necesitamos establecer el tamaño de la muestra.

- Recogida de datos.

Debemos diseñar el cuestionario para realizar la recogida dos datos.

- Organización y representación gráfica.

Estudiaremos los datos recogidos, haremos tablas de frecuencias, gráficas para visualizar mejor los datos, etc.

- Obtención de conclusiones.

Obtendremos ciertos parámetros estadísticos que nos ayudarán a resumir la información. Junto con la estadística inferencial, que hemos comentado en un apartado anterior, podríamos sacar conclusiones y extrapolarlas al resto de la población. Los aspectos relacionados con la inferencia estadística exceden los contenidos del módulo IV y, por lo tanto, non los estudiaremos.

2.1.4 Tablas de frecuencias

Una vez recogidos los datos hay que tabularlos, es decir, confeccionar una tabla para organizarlos. Esto se consigue con una tabla de frecuencias; podemos utilizar diferentes tipos de frecuencias:

- Frecuencia absoluta, f_i: número de veces que aparece en la muestra.
- Frecuencia relativa, h_i: cociente entre el número de veces que aparece en la muestra y el número total de datos, *N*.
- Frecuencia absoluta acumulada, F_i: suma de todas las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que el valor escogido.
- Frecuencia relativa acumulada, H_i: suma de todas las frecuencias relativas de los valores menores o iguales que el valor escogido.

Debemos tener en cuenta si la variable que vamos estudiar es discreta o continua.

Actividades resueltas

Queremos hacer un estudio entre los habitantes de una localidad para conocer el número de veces que van al cine al mes. Solo nos interesa saberlo para los que son mayores de 4 años. De los 2500 habitantes de la localidad, sabemos que 2000 son mayores de 4 años. Se les preguntó el número de veces que van al cine en un mes y las respuestas fueron las siguientes:

01210	20111	10010	31111	01011
11210	21101	11110	11112	11111

Se pide:

- ¿Cuál es la población de estudio?
- ¿Qué variable tenemos que estudiar?
- ¿Qué tipo de variable es?
- Construya la tabla de frecuencias.
- ¿Qué porcentaje de individuos van como mucho una vez al cine al mes?

Soluciones:

- Las 2000 personas del pueblo que son mayores de 4 años.
- El número de veces que van al cine en el mes.
- Variable cuantitativa discreta.

- Efectuaremos un recuento de los datos ordenándolos en una tabla de frecuencias.
- Se trata de una variable aleatoria discreta, con valor mínimo igual a 0 y valor máximo 3, por lo que deberíamos poner todos los valores intermedios y su frecuencia absoluta, si hubiese algún valor que tuviese una frecuencia absoluta igual a cero, también habría que ponerla.

Veces que asisten al cine x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0	11	11	0,22	0,22
1	33	44	0,66	0,88
2	5	49	0,10	0,98
3	1	50	0,02	1
	50		1	

- Un 88 %.

Queremos realizar un estudio sobre la altura de los hombres mayores de edad de una determinada ciudad. Se les preguntó sobre su altura en cm a 32 personas que cumplían ese requisito y los datos fueron los siguientes:

161	171	167	172	170	170	165	169
170	169	172	162	169	166	174	178
167	169	168	176	169	162	168	167
175	168	164	179	172	167	170	173

Se pide:

- ¿Cuál es la población de estudio?
- ¿Qué variable tenemos que estudiar?
- ¿Qué tipo de variable es?
- Construya la tabla de frecuencias.

Soluciones:

- Los hombres con mayoría de edad.
- La altura en cm.
- Variable cuantitativa continua.
- Efectuaremos un recuento de los datos ordenándolos en una tabla de frecuencias.

Ante la dificultad de hacer un recuento de cada valor de la variable, haremos un recuento de los datos agrupándolos en intervalos de cinco cm de altura (**clases**). Elaboraremos una tabla en la que se muestren los puntos medios, llamados **marcas de clase**, y todas las frecuencias que ya explicamos. Conviene que el número de clases non sea excesivo y que todas tengan la misma longitud.

Existen diferentes métodos de escoger el número de intervalos; teniendo en cuenta la variable y los datos que obtenemos de las encuestas, no deberíamos de tener menos de 4-5 intervalos ni más de 10.

Longitud en cm Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
$160 \leq x < 165$	162,5	4	4	0,125	0,125
$165 \leq x < 170$	167,5	14	18	0,4375	0,5625
$10 \leq x < 175$	172,5	10	28	0,3125	0,875
$175 \leq x < 180$	177,5	4	32	0,125	1
		32		1	

Actividades propuestas

S3. Se está realizando un control de caries en personas de menos de 3 años. Para eso, se contabiliza el número de piezas de chocolate que comen al día y se obtienen los siguientes resultados:

0	2	1	3	0	1	5	0	1	1
2	1	4	1	0	1	2	2	3	1

Construya la tabla de frecuencias.

S4. En una fábrica se realiza un estudio sobre el espesor, en mm, de un cierto tipo de tornillo. Seleccionamos una muestra de tamaño 25 y obtenemos los siguientes valores: 7,8; 8,2; 7,6; 10,5; 7,4; 8,3; 9,2; 11,3; 7,1; 8,5; 10,2; 9,3; 9,9; 8,7; 8,6; 7,2; 9,9; 8,6; 10,9; 7,9; 11,9; 8,8; 9,2; 8,1; 10,5. Haga 5 intervalos de longitud 1 mm comenzando el primer intervalo en 7 mm. Construya la tabla de frecuencias.

S5. Construya la tabla de frecuencias con el color de pelo de 24 persona escogidas al azar cuyos resultados de la encuesta fueron los siguientes: (N = negro; L = castaño; R = pelirrojo).

N	L	R	L	L	L	L	R	R	N	N	N
N	L	L	L	L	L	N	N	N	N	N	R

2.1.5 Gráficos estadísticos

Los gráficos estadísticos ayudan a organizar e interpretar de una manera más visual los datos recogidos. Existen diferentes gráficos estadísticos:

- Diagramas de barras.

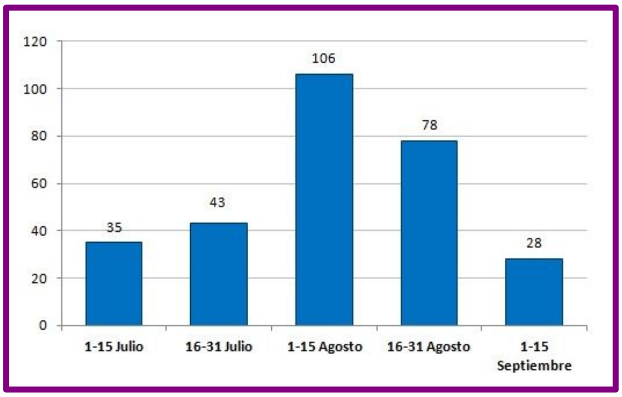
Se utilizan para representar tablas de frecuencias correspondientes a variables cuantitativas discretas. Por eso las barras son estrechas y se sitúan sobre los valores puntuales de la variable. También se pueden utilizar para representar variables cualitativas.

Actividad resuelta

Construya el diagrama de barras asociado a los siguientes datos:

El diagrama de barras siguiente está basado en los resultados de una encuesta realizada a 290 trabajadores de una empresa sobre la preferencia para disfrutar de sus vacaciones. Los datos están expresados en la tabla y el diagrama de barras se muestra a la derecha:

Período	Trabajadores
1.ª quincena julio	35
2.ª quincena julio	43
1.ª quincena agosto	78
2.ª quincena agosto	106
1.ª quincena septiembre	28



- Histograma.

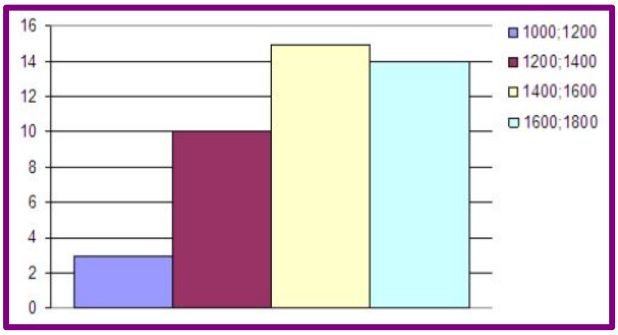
Se utiliza para distribuciones de variable continua. Por eso se usan rectángulos tan anchos como los intervalos.

Actividad resuelta

Construya el histograma asociado a los siguientes datos:

La tabla muestra los pesos en gramos de 42 pollos del mercado y representaremos los datos mediante un histograma.

Peso (g)	Número de pollos
$1000 \le x < 1200$	3
$1200 \le x < 1400$	10
$1400 \le x < 1600$	15
$1600 \le x < 1800$	14

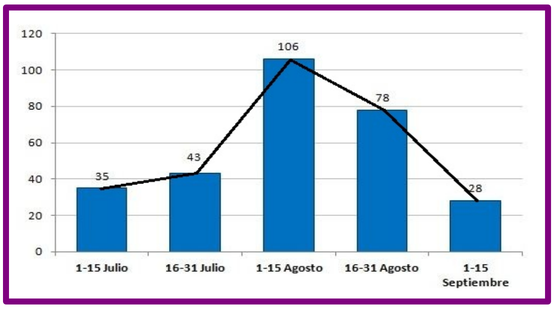


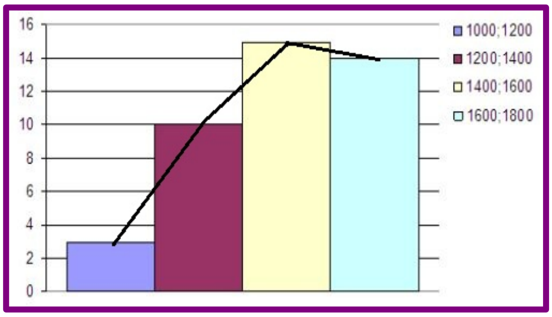
- Polígono de frecuencias.

Se construyen uniendo los puntos medios de los rectángulos, bien de las barras de los diagramas, bien de los rectángulos de los histogramas.

Actividad resuelta

Construya los dos polígonos de frecuencias de las actividades anteriores.





- Diagrama de sectores.

El círculo se divide en tantos sectores como datos tenga la variable, siendo su amplitud proporcional a su frecuencia.

Actividad resuelta

Construya el diagrama de sectores asociado a los siguientes datos: en una clase de 30 estudiantes, 12 juegan al baloncesto, 3 practican natación, 9 juegan al fútbol y el resto no practica ningún deporte.

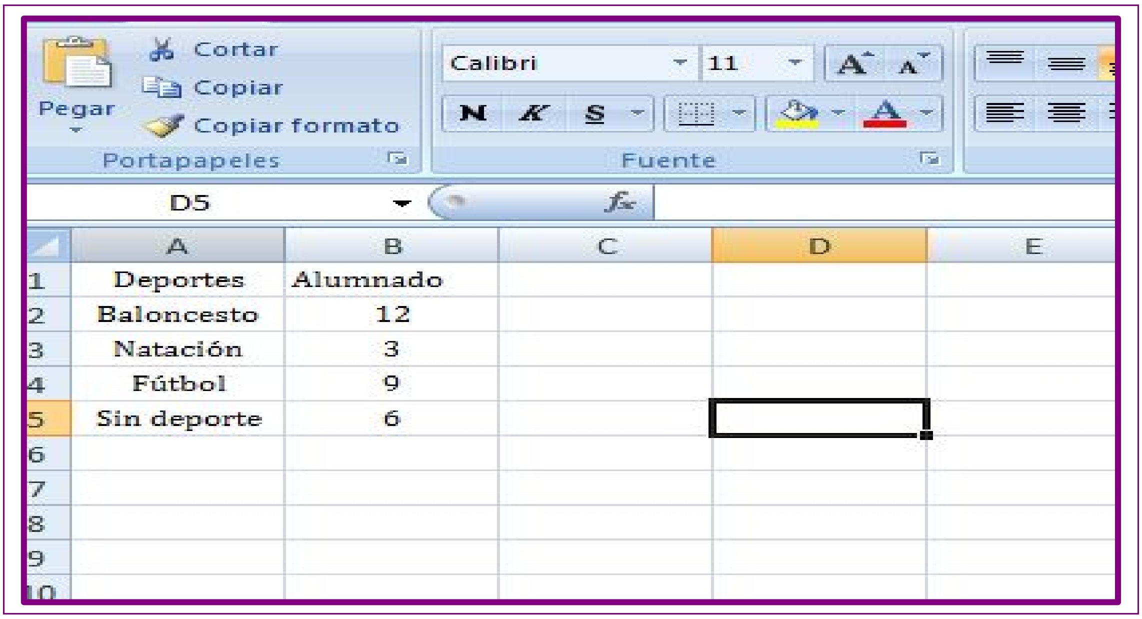
Exponemos la tabla de frecuencias y el diagrama de sectores.

Deportes	Alumnado
Baloncesto	12
Natación	3
Fútbol	9
Sin deporte	6

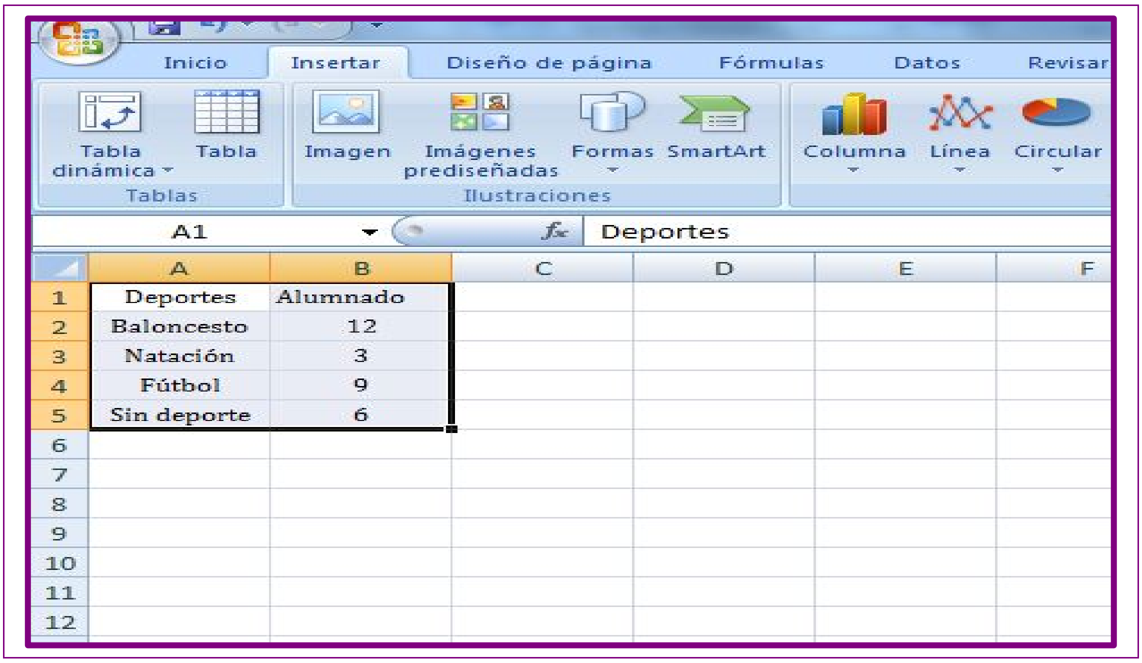
Uso del Excel para la realización de un gráfico

Basándonos en los datos del ejercicio anterior, veremos lo sencillo que es hacer un diagrama de barras utilizando la hoja de cálculo Excel. Utilizaremos el paquete Office del año 2007 o superior.

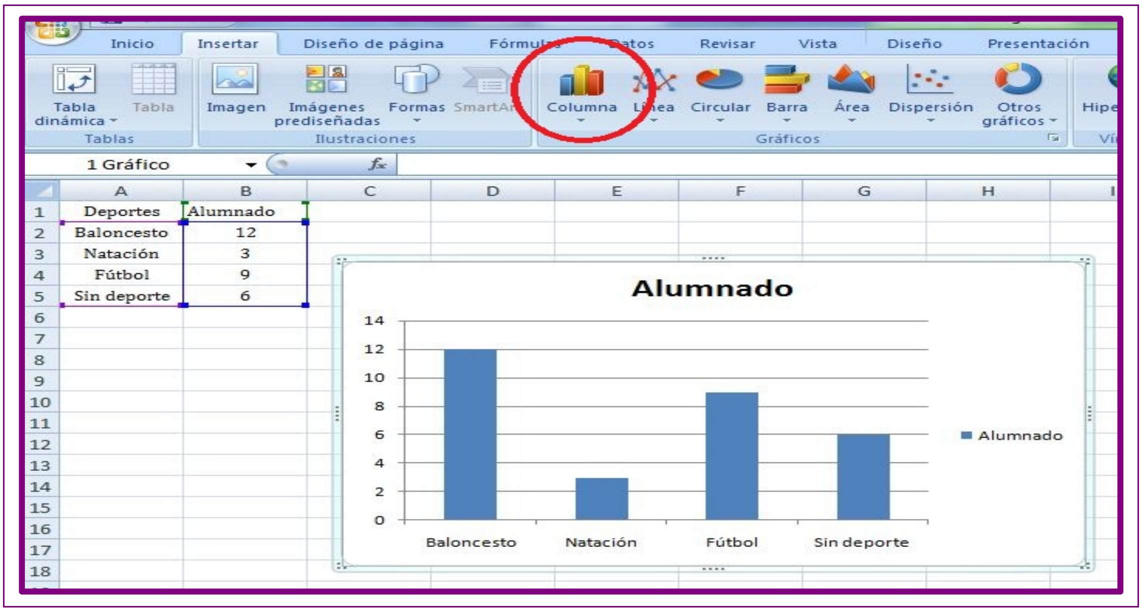
- Paso 1: escribimos los datos tal y como los tenemos dispuestos en la tabla de frecuencias absolutas.



- Paso 2: seleccionamos todos los datos, o sea, desde A1 hasta B5, y seleccionamos en la parte superior la pestaña de insertar.



– Paso 3: seleccionamos el gráfico columna y ya nos aparecerá el diagrama de barras correspondiente a estos datos.



No profundizaremos más sobre como cambiar diversos elementos de cada uno de los gráficos que nos proporciona Excel ni tampoco en los diferentes tipos de gráficas, puesto que no es la finalidad de esta unidad.

Actividad propuesta

S6. La frecuencia con que va al cine por semana la gente joven que vive en un pueblo viene dada por la siguiente tabla.

Veces que van al cine	Número de personas
Nunca	152
Una vez	183
Dos veces	122
Tres o más veces	43

Realice un diagrama de barras, un diagrama de sectores y el polígono de frecuencias.

2.1.6 Parámetros estadísticos. Cálculo y significado

Después de obtener los datos de una distribución, necesitamos sintetizar la información para su posterior análisis. Para eso, obtendremos los parámetros estadísticos que serán de tres tipos: de centralización, de posición y de dispersión.

Parámetros de centralización

Los parámetros de centralización nos indican alrededor de qué valor (centro) se distribuyen los datos; son la media aritmética, la moda, y la mediana.

- La **media aritmética**, $\bar{x}$, es el cociente de la suma de todos los datos multiplicada por su frecuencia entre el número total de datos.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{N}, siendo\ N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

En caso de que la variable sea continua, x_i será la marca de clase.

- La **moda**, Mo, es el dato que tiene mayor frecuencia. Si la variable fuese continua, hablaremos de **intervalo modal**. Pueden existir varios valores o intervalos con mayor frecuencia, por lo tanto, pueden existir varias modas o intervalos modales.
- La **mediana**, Me, es el valor que ocupa la posición central de los datos después de ordenarlos y si el número de datos es impar; si fuese par, la media de los dos valores centrales. Si la variable fuese continua, hablaremos de **intervalo mediano**.

Actividad resuelta

Calcule los parámetros de centralización de las distribuciones expuestas anteriormente.

Variable cuantitativa discreta (a)

Veces que comen una pieza de chocolate x_i	f_i	F_i
0	4	4
1	8	12
2	4	16
3	2	18
4	1	19
5	1	20
	20	

Variable cuantitativa continua (b)

Longitud en mm Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	F_i
$7 \leq x < 8$	7,5	6	6
$8 \leq x < 9$	8,5	8	14
$9 \leq x < 10$	9,5	5	19
$10 \leq x < 11$	10,5	4	23
$11 \leq x < 12$	11,5	2	25
		25	

Variable cualitativa (c)

Color del pelo x_i	f_i	F_i
N	10	10
L	10	20
N	4	24
	24	

Incorporamos la columna de las frecuencias absolutas acumuladas, porque esta nos proporciona una manera muy sencilla de calcular la mediana o intervalo modal.

Calculemos los parámetros estadísticos en cada una de ellas:

a) Variable cuantitativa discreta.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{N} = \frac{4 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{20} = \frac{31}{20} = 1{,}55$$

$$Mo = 1$$

$Me = 1$, ya que es la primera frecuencia acumulada mayor que 10, la mitad de los 20 individuos de la muestra.

Como la moda y la mediana son 1 y la media 1,55, podemos decir que el grupo de niños y niñas que comen más de una pieza de chocolate es mayor que los que comen menos de 1. Los datos se distribuyen alrededor del 1.

b) Variable cuantitativa continúa.

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{N} = \frac{6 \cdot 7{,}5 + 8 \cdot 8{,}5 + 5 \cdot 9{,}5 + 4 \cdot 10{,}5 + 2 \cdot 11{,}5}{25} = \frac{225{,}5}{25} = 9{,}02$
Intervalo modal $[8,9) \rightarrow Mo = 8{,}5$
Intervalo mediano $[8,9) \rightarrow Me = 8{,}5$ Ya que es la primera frecuencia acumulada mayor que 12,5 (la mitad de los 25 individuos).

Las conclusiones son idénticas al ejemplo anterior; dado que la moda y la mediana son 8,5 mm y la media es 9,02 mm, podemos decir que el espesor de los tornillos mayores de 8,5 mm es mayor que los de grosor menor a 8,5 mm.

c) Variable cualitativa.

En este tipo de variable solo existe la $Mo = L\ y\ N$. En este caso existen dos modas.

Actividad propuesta

S7. Calcule los parámetros de centralización para estas tres tablas de frecuencias:

x_i	1	2	3	4	5
f_i	2	4	8	5	2

Clases	$[0,10)$	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$
f_i	12	9	6	2	1

Opinión	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Muy malo
f_i	58	158	45	32	15

Medidas de posición

Los parámetros de posición son valores de una variable que informan del lugar que ocupa un dato dentro del conjunto ordenado de valores. Evidentemente, la variable tiene que ser cuantitativa. Podemos distinguir dos grupos importantes:

- Los cuartiles, Q_1, Q_2 y Q_3. Son las medidas que dividen el conjunto de datos ordenados en 4 partes iguales.
- Los percentiles, P_k. Son las medidas que dejan detrás el k % de los datos ordenados.

Solo estudiaremos en este módulo los grupo de los cuartiles, Q_1, Q_2 y Q_3.

Actividad resuelta

Calcule las medidas de posición de las siguientes distribuciones:

Variable cuantitativa discreta (a)

Veces que comen una pieza de chocolate x_i	f_i	F_i
0	4	4
1	8	12
2	4	16
3	2	18
4	1	19
5	1	20
	20	

Variable cuantitativa continua (b)

Longitud en mm Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	F_i
$7 \leq x < 8$	7,5	6	6
$8 \leq x < 9$	8,5	8	14
$9 \leq x < 10$	9,5	5	19
$10 \leq x < 11$	10,5	4	23
$11 \leq x < 12$	11,5	2	25
		25	

a) Variable discreta.

Calculamos el 25 % del número total de datos: 20 · 0,25 = 5

Así, Q_1 tiene 5 datos menores que él y el resto mayores. Fijémonos en la columna de las frecuencias absolutas acumuladas, el primer número mayor o igual a 5 es 12, por lo tanto, $Q_1 = 1$. Siguiendo este razonamiento, obtenemos:

El 50 % de 20 es 10. Fijándonos en la columna de las frecuencias acumuladas, el primer número mayor o igual a 10 es 12, por lo tanto, $Q_2 = 1$.

El 75 % de 20 es 15. Volvemos fijarnos en la columna de las frecuencias acumuladas, el primer número mayor o igual a 15 es 16, por lo tanto, $Q_3 = 2$.

b) Variable continúa.

Razonamos igual que en la variable anterior, fijándonos en la columna de las frecuencias acumuladas.

El 25 % de 25 es 6,25, el primer número mayor o igual a 6,25 es 14, frecuencia acumulada correspondiente al intervalo $[8, 9)$. Por lo tanto, $Q_1 = 8{,}5$.

El 50 % de 25 es 12,5, el primer número mayor o igual a 12,5 es 14, frecuencia acumulada correspondiente al intervalo $[8, 9)$. Por lo tanto, $Q_2 = 8{,}5$.

El 75 % de 25 es 18,75, el primer número mayor o igual a 18,5 es 19, frecuencia acumulada correspondiente al intervalo $[9, 10)$. Por lo tanto, $Q_3 = 9{,}5$.

Actividad propuesta

S8. Calcule los cuartiles para estas dos tablas de frecuencias:

x_i	1	2	3	4	5
f_i	2	4	8	5	2

Clases	$[0,10)$	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$
f_i	12	9	6	2	1

Medidas de dispersión

Muestran el grado de agrupamiento alrededor de la media. Si los parámetros de dispersión son grandes, significa que los datos están muy dispersos. Si fuesen pequeños, significaría que están alrededor de la media. Estudiaremos los siguientes:

- Recorrido o rango.

Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable. $R = Máx - Mín$.

- Desviación media.

Es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones, con respecto a la media, de cada dato.

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N}, siendo\ N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

- Varianza.

Es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de cada valor con respecto a la media.

$$var = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot {x_i}^2}{N} - \bar{x}^2, siendo\ N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

- Desviación típica.

La raíz cuadrada positiva de la varianza, $\sigma = \sqrt{var}$.

- Coeficiente de variación.

Cociente entre la desviación típica y la media, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$.

Actividad resuelta

Calcule las medidas de dispersión de las siguientes distribuciones:

Variable cuantitativa discreta (a)

Veces que comen una pieza de chocolate x_i	f_i	F_i
0	4	4
1	8	12
2	4	16
3	2	18
4	1	19
5	1	20
	20	

Variable cuantitativa continua (b)

Longitud en mm Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	F_i
$7 \leq x < 8$	7,5	6	6
$8 \leq x < 9$	8,5	8	14
$9 \leq x < 10$	9,5	5	19
$10 \leq x < 11$	10,5	4	23
$11 \leq x < 12$	11,5	2	25
		25	

a) Variable discreta.

Añadimos algunas columnas necesarias para el cálculo de los parámetros de dispersión.

Veces que comen una pieza de chocolate x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot {x_i}^2$
0	4	0	6,2	0
1	8	8	4,4	8
2	4	8	1,8	16
3	2	6	2,9	18
4	1	4	2,45	16
5	1	5	3,45	25
	20	31	21,2	83

Los parámetros de dispersión son:

- $R = Máx - Mín = 5 - 0 = 5$
- $DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{21,2}{20} = 1,06$
- $var = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot {x_i}^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{83}{20} - 1,55^2 = 1,75$
- $\sigma = \sqrt{var} = \sqrt{1,75} = 1,32$
- $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,32}{1,55} = 0,8529 \rightarrow 85,29\ \%$

Ya estudiamos el significado de los parámetros de centralización de este mismo ejemplo. Podemos decir que, puesto que el coeficiente de variación es 85,29 %, los datos están bastante dispersos, es decir, separados de la media.

b) Variable continúa.

Igual que en el apartado a) de este ejemplo, Añadimos algunas columnas necesarias para el cálculo de los parámetros de dispersión.

Longitud en mm Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot {x_i}^2$
$7 \leq x < 8$	7,5	6	45	9,12	337,5
$8 \leq x < 9$	8,5	8	68	4,16	578
$9 \leq x < 10$	9,5	5	47,5	2,4	451,25
$10 \leq x < 11$	10,5	4	42	5,92	441
$11 \leq x < 12$	11,5	2	23	4,96	264,5
		25	225,5	26,56	2.072,25

Los parámetros de dispersión son:

- $R = Máx - Mín = 12 - 7 = 5$
- $DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x}\rvert}{N} = \frac{26,56}{25} = 1,06$
- $var = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot {x_i}^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{2072,25}{25} - 9,02^2 = 1,53$
- $\sigma = \sqrt{var} = \sqrt{1,53} = 1,24$
- $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,24}{9,02} = 0,1371 \rightarrow 13,71\ \%$

Ya estudiamos el significado de los parámetros de centralización de este mismo ejemplo. Podemos decir que, puesto que el coeficiente de variación es 13,71 %, los datos están relativamente agrupados alrededor de la media.

Actividades propuestas

S9. Calcule los parámetros de dispersión para estas dos tablas de frecuencias:

x_i	1	2	3	4	5
f_i	2	4	8	5	2

Clases	$[0, 10)$	$[10, 20)$	$[20, 30)$	$[30, 40)$	$[40, 50)$
f_i	12	9	6	2	1

S10. Las notas obtenidas en el tribunal número 1 del concurso oposición para obtener una plaza en un determinado ayuntamiento fueron las siguientes:

Notas x_i	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	6	34	25	56	29	10	30	10

Realice las siguientes tareas:

- Dibuje el diagrama de barras y el polígono de frecuencias asociado.
- ¿Qué tanto por ciento de los opositores obtuvo menos de un 6?
- ¿Qué tanto por ciento de los opositores obtuvo entre un 5 y un 10, ambos incluidos?
- Calcule los parámetros de centralización.
- Calcule los cuartiles.
- Calcule los parámetros de dispersión estudiados en la unidad.

S11. Se realiza un estudio sobre el número de centros que colaboran en un determinado proyecto europeo en distintas comunidades autónomas. Los datos aparecen recogidos en la siguiente tabla:

Comunidad autónoma	Nº de centros
Cataluña	30
Asturias	27
Madrid	43
Andalucía	25
Galicia	40
Navarra	15

Realice las siguientes tareas:

- Dibuje el diagrama de barras y el de sectores asociados a estos datos.
- Calcule la moda.

S12. En el hospital materno infantil de A Coruña tomaron datos del peso, en kg, al nacer de 50 niños y niñas. Los datos son los que aparecen en la siguiente tabla:

2,8	3,2	3,8	2,5	2,7	3,7	1,9	2,6	3,5	2,3
3	2,6	1,8	3,3	2,9	2,1	3,4	2,8	3,1	3,9
2,9	3,5	3	3,1	2,2	3,4	2,5	1,9	3	2,9
2,4	3,4	2	2,6	3,1	2,3	3,5	2,9	3	2,7
2,9	2,8	2,7	3,1	3	3,1	2,8	2,6	2,9	3,3

- Construya una tabla de frecuencias con los datos agrupados en 6 intervalos de tamaño 0,4 kg.
- Dibuje el histograma y el polígono de frecuencias asociado.
- ¿Qué tanto por ciento de niños y niñas pesaron menos 2,8 kg?
- Calcule los parámetros de centralización.
- Calcule los cuartiles.
- Calcule los parámetros de dispersión.

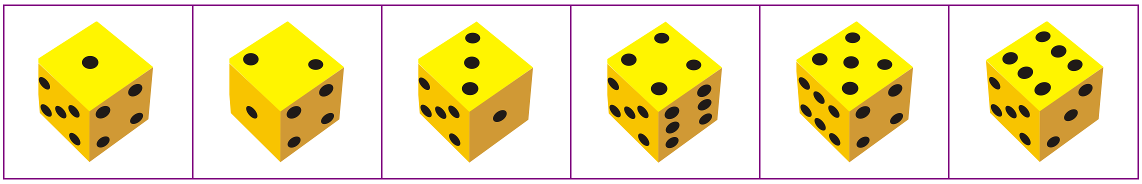
2.2 Probabilidad

2.2.1 Experimentos aleatorios. Sucesos

En nuestra vida diaria nos encontramos muchas veces con acontecimientos de los que no podemos predecir si ocurrirán o no o cuál será el resultado. Dependen del azar. Por ejemplo, lanzar un dado, jugar a la Bonoloto, lanzar una moneda al aire y prever el resultado al caer, si lloverá mañana, si ganará el Deportivo la liga, etc.

Definimos **experimento aleatorio** como aquel experimento en el que no se puede predecir el resultado antes de realizarlo en cada experiencia particular, por ejemplo, si lanzamos un dado, no sabemos si va a salir el 1, es una posibilidad y no tenemos la certeza de que salga ese resultado en especial.

Para estudiar el azar y sus propiedades, realizaremos experimentos aleatorios y analizaremos diferentes situaciones. Tomemos como ejemplo el lanzamiento de un dado. Los posibles resultados del lanzamiento de un dado serian:



Al conjunto de todos los posibles resultados le llamaremos **espacio muestral** y lo identificaremos de la siguiente manera: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Todos los subconjuntos de un espacio muestral se llaman sucesos, por ejemplo, el suceso "lanzar un dado y obtener un número par" podemos representarlo por $A = \{2, 4, 6\}$, el suceso "lanzar un dado y obtener un múltiplo de 3" podríamos representarlo por $\mathrm{B} = \{3, 6\}$.

Dentro de los grupos de los sucesos hay algunos que tienen un nombre especial:

- Suceso elemental: cada uno de los resultados posibles de un experimento.
- Suceso compuesto: el suceso formado por dos o más elementos del espacio muestral.
- Suceso seguro: el suceso que siempre se verifica.
- Suceso imposible: el que no se realiza nunca.
- Suceso contrario: si A es un suceso, le llamaremos $\bar{A}$ al suceso contrario, y este se verificará cuando no se verifique A.

Actividad resuelta

Observe el experimento aleatorio que consiste en lanzar al aire dos monedas distintas y anotar el resultado. Halle el espacio muestral, E, los sucesos A = "obtener dos caras", B = "obtener cara y cruz", C = "obtener cruz y cara", D = "obtener dos cruces", F = "obtener resultados distintos", un suceso seguro, un suceso imposible y el suceso contrario de A.

- El espacio muestral es $E = \{cc, cx, xc, xx\}$.
- Sucesos elementales: $A = \{cc\}$, $B = \{cx\}$, $C = \{xc\}$ y $D = \{xx\}$.
- Suceso compuesto: "obtener resultados distintos" $F = \{cx, xc\}$.
- Suceso seguro: el suceso E es seguro, puesto que siempre al lanzar dos monedas obtenemos alguno de esos resultados.
- Suceso imposible: "obtener tres caras".
- Suceso contrario: si $A = \{cc, xx\}$, entonces $\overline{A} = \{cx, xc\}$.

- Llamamos unión de dos sucesos A y B al suceso formado por todos los sucesos elementales que hay en A y B, y lo escribimos por $A \cup B$.
- Llamamos intersección de dos sucesos A y B al suceso formado por todos los sucesos elementales comunes que hay en A y B, y lo escribimos por $A \cap B$.

Actividad resuelta

Considere el experimento aleatorio "*lanzar un dado y anotar su puntuación*", consideramos estos dos sucesos:

A = "obtener resultado par"	B = "obtener un resultado múltiplo de 3"

Halle el espacio muestral, *E*, los sucesos *A* y *B*, $A \cup B$ y $A \cap B$

Partimos, por lo tanto, de que $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3, 6\}$

- $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$
- $A \cap B = \{6\}$

Actividades resueltas

S13. Determine si estos experimentos son aleatorios o no.

- Extraer una carta de una baraja española.
- Hallar el color del coche que pase primero después de las 00.00 horas de un día.
- Medir la altura de sus padres.

– Hallar cuántos partidos ganará el Deportivo este año en la liga.

– Calentar el agua a 100 ºC y ver que sucede.

S14. Escriba el espacio muestral y exponga un ejemplo de un suceso elemental, compuesto, otro de uno seguro y otro de uno imposible del experimento *“sacar una bola y observar el color”* de una urna donde hay una bola blanca, una negra y dos rojas.

S15. En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Sacamos una bola y anotamos su número. Realice las siguientes tareas:

– Halle el espacio muestral.

– Describa A, $B, \overline{A}, \overline{B}, A \cup B$, $A \cap B$, siendo

A = “obtener un número par”	B = “obtener un número mayor que 5”

2.2.2 Probabilidad y frecuencia

A medida que vamos repitiendo un gran número de veces un determinado experimento aleatorio, las frecuencias relativas de un determinado suceso se van aproximando a un número. Ese número es el que llamamos la **probabilidad de un suceso**. Esta propiedad es lo que se conoce como ley de los grandes números. Por lo tanto, podemos definir la probabilidad de un suceso *A*, $P(A)$, como el número comprendido entre 0 y 1 que designa el grado de confianza que podemos tener en que se realice *A*.

– Si $P(A)$ está cerca de cero, el suceso será de realización poco probable.

– Si $P(A)$ está cerca de uno, el suceso será de realización muy probable.

Veamos todo esto que acabamos de explicar con dos ejemplos:

Se lanza 1000 veces una moneda y 1000 veces una chincheta. Los resultados son los siguientes:

<table>
<tr><th>Moneda</th><th>Chincheta</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td></td><td>f</td><td>h</td></tr>
<tr><td>C</td><td>483</td><td>0,483</td></tr>
<tr><td>X</td><td>517</td><td>0,517</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>1000</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>f</td><td>h</td></tr>
<tr><td></td><td>327</td><td>0,327</td></tr>
<tr><td></td><td>673</td><td>0,673</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>1000</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Observemos que, en el caso de la moneda, las frecuencias relativas de la cara y de la cruz son próximas a 0,5. El valor de la frecuencia relativa es muy próximo al valor de la probabilidad, es más, la ley de los grandes números afirma que, a medida que fuésemos aumentando el número de repeticiones del experimento, cada vez estaría más próxima a 0,5. Entonces podemos afirmar que $P(C) = 0{,}5$ y $P(X) = 0{,}5$.

Para calcular la probabilidad del suceso “chincheta cae hacía arriba” y “chincheta cae hacía abajo” deberíamos de seguir repitiendo el proceso aumentando el número de repeticiones y así podríamos calcular esas probabilidades. Lo que sí sabemos es que:

P()≈0,327	P()≈0,673

2.2.3 Ley de Laplace para el cálculo de la probabilidad

Cuando estamos ante un experimento aleatorio en el que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de salir, decimos que son equiprobables. Sería el caso del lanzamiento de un dado, todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

Si calculamos el espacio muestral y estamos ante un espacio de sucesos equiprobables, en esta situación la *regla de Laplace* dice lo siguiente:

$$P(A) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{nº\ de\ casos\ posibles.}, siendo\ A\ un\ suceso.$$

Actividades resueltas

En el armario tengo 5 camisas blancas, 3 camisas negras y 1 roja. Si cierro los ojos y escojo una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

$$P(blanca) = \frac{5}{9}$$

Si lanzamos un dado y observamos el número de la cara superior, ¿cuál será la probabilidad del suceso A = “salir par”?

Puesto que el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A = \{2, 4, 6\}$, podemos decir que

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

En una rifa se vendieron 1000 papeletas numeradas del 1 al 1000. ¿Cuál es la probabilidad de que me toque si compré siete papeletas?

Las papeletas favorables serán los 7 números que compré y el total de casos posibles las 1000 papeletas. Por lo tanto,

$$P(premio) = \frac{7}{1000} = 0{,}007$$

Actividades propuestas

S16. Un videoclub automático estropeado reparte al azar las películas entre los clientes. Si tiene 30 infantiles, 125 de acción, 200 dramas y 94 comedias. ¿Cuál es la probabilidad de que la película sea comedia? ¿Y de que no sea drama?

S17. Consideremos un experimento que consiste en lanzar un dado en forma de dodecaedro con las caras enumeradas del 1 al 12. Calcule las probabilidades siguientes:

- Sacar un 3.
- Sacar un múltiplo de 3.
- No sacar un múltiplo de 3.
- Sacar un número negativo.
- Sacar un número menor de 20.

S18. Lanzamos dos dados y sumamos sus puntuaciones. Puede realizar un cuadro de doble entrada para no olvidar ningún resultado.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 2?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 1? ¿Cómo se llama este suceso?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor que 6? ¿Cuál es el suceso contrario? ¿Y su probabilidad?

S19. Lanzamos 3 veces una moneda y apuntamos los resultados. Describa:

- Espacio muestral.
- A = "la última moneda es cara".
- B = "la primera moneda es cruz".
- Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.
- Calcule la probabilidad de los sucesos de los apartados b), c) y d).

S20. En una bolsa hay 5 bolas blancas, 4 negras y 3 rojas. Calcule la probabilidad de que, escogida al azar, una bola sea:

- Blanca o negra.
- Que no sea ni blanca ni negra.
- Que no sea roja.

2.2.4 Sucesos compuestos. Diagramas de árbol

Los sucesos elementales que forman un suceso compuesto pueden depender o no de otros. Imaginemos una bolsa con bolas de distintos colores.

- Realizamos el experimento de sacar una bola y anotar el color, devolverla a la bolsa, volver a sacar otra bola y anotar el color.

En este experimento la segunda extracción no depende del color de la bola que haya sacado en primer lugar, en este caso los sucesos "sacar bola y anotar el color en la primera extracción" y "sacar bola y anotar el color en la segunda extracción" son independientes.

- Si, por el contrario, realizamos la primera extracción y no devolvemos la bola, el resultado de la segunda extracción dependerá del resultado de la primera, en este caso son sucesos dependientes.

Tanto si los sucesos elementales (S_1, S_2, S_3...) que conforman un suceso compuesto son independientes como si son dependientes, acontece que:

$$P(S_1\, y\, S_2\, y\, S_3 \ldots.) = P(S_1)\cdot P(S_2)\cdot P(S_3)\cdot \ldots$$

Basta tener en cuenta que, cuando son dependientes, al calcular $P(S_2)$ habrá que tener en cuenta el suceso anterior S_1; cuando calcule $P(S_3)$ habrá que tener en cuenta los sucesos S_1 y S_2, y así sucesivamente.

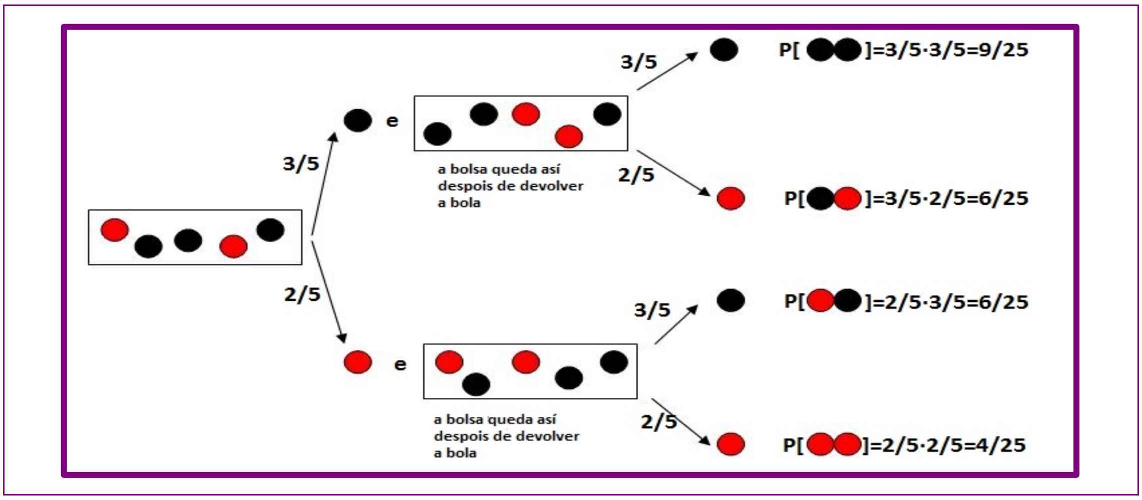
Actividad resuelta

Calculemos la probabilidad $P(1V\ y\ 2V)$, siendo *1V = "color rojo en la 1ª extracción"* y *2V = "color rojo en la 2ª extracción"*, en una bolsa donde hay 3 bolas negras y 2 rojas.

- Realicemos el experimento devolviendo la bola. Acontece que:

$$P(1V\ y\ 2V) = P(1V\ )\cdot P(2V) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Para esto podemos ayudarnos de este diagrama de árbol, que nos permitirá visualizar mejor el proceso del cálculo de probabilidades de sucesos compuestos.

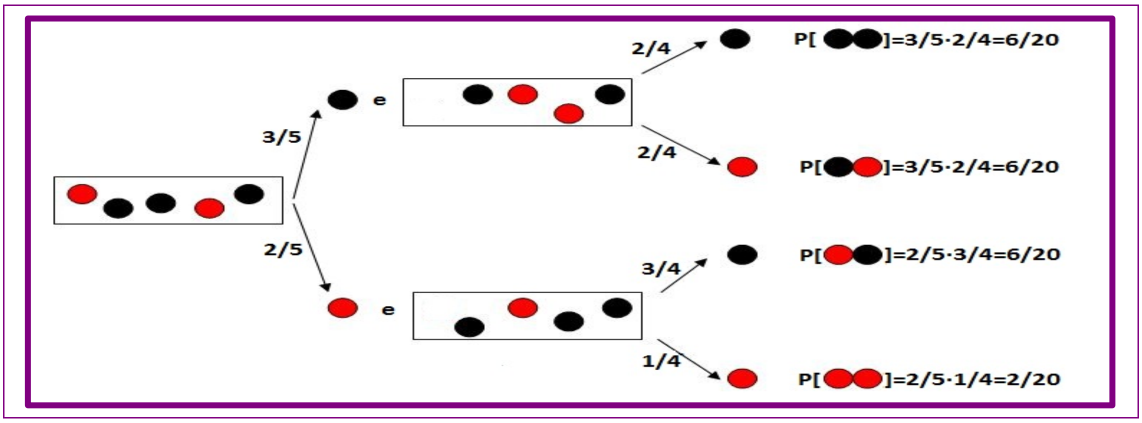


Calcule la misma probabilidad, pero devolviendo la bola después de realizar la primera extracción.

Si, por el contrario, no devolvemos la bola después de realizar la primera extracción, queda:

$$P(1V\ y\ 2V) = P(1V\ ) \cdot P(2V) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

Podemos ayudarnos del siguiente diagrama de árbol:



Observando el diagrama de árbol podríamos resolver preguntas más complejas, por ejemplo:

Calcule la probabilidad de que las bolas sean del mismo color en el caso anterior, donde no devolvemos la primera bola.

$$P(mismo\ color) = P(1V\ y\ 2V) + P(1N\ y\ 2N) = P(1V\ ) \cdot P(2V) + P(1N) \cdot P(2N)$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{8}{20}$$

Actividades propuestas

S21. Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcule la probabilidad de que sean dos caballos en los siguientes casos:

– Después de ver la primera carta, la devolvemos a la baraja.

– Sin devolver la primera carta.

S22. En un colegio hay 270 niñas y 230 niños. Sabiendo que solo 70 niñas y 60 niños utilizan gafas, calcule:

– La probabilidad de que, elegido uno de ellos al azar, sea niño y utilice gafas.

– La probabilidad de que, elegido una de ellas al azar, sea niña y no utilice gafas.

S23. Se lanza un dado. Si sale múltiplo de 3, lanzamos una moneda; si sale otro número, extraemos una bola de una bolsa donde hay 2 bolas blancas y una negra. Calcule:

– Probabilidad de que sea múltiplo de 3 y cara.

– Probabilidad de que no sea múltiplo de 3 y bola negra.

S24. Tenemos en un cajón 5 calcetines negros y 3 blancos. Si sacamos 2 de ellos sin ver, responda las siguientes preguntas:

– ¿Cuál es la probabilidad de que sean los dos negros?

– ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

S25. En una clase hay 15 niñas y 10 niños. Si hay que elegir un delegado y un subdelegado y no se pueden repetir los cargos, responda:

– Calcule la probabilidad de que la delegada sea niña y el subdelegado niño.

– Calcule la probabilidad de que sean los dos puestos cubiertos por niños.

3. Actividades finales

S26. En una determinada escuela de primaria se quiere saber cuál es el deporte más practicado por su alumnado para planificar las actividades extraescolares del siguiente curso. Se realiza una encuesta a 10 estudiantes de cada curso. Con dicha información, identifique la población, la muestra y la variable estadística.

S27. Un fabricante de tornillos quiere hacer un control de calidad. Para esto toma uno de cada cien y analiza:

- Si está bien fabricado o presenta algún problema.
- Su longitud.
- El número de pasos de rosca.

Con dicha información, identifique la población, la muestra y las variables estadísticas.

S28. Se hace un estudio en una localidad de 750 habitantes sobre el grupo sanguíneo que posee cada persona para conocer si una determinada enfermedad está relacionada con el mismo o no; para eso escogemos un grupo de 25 personas y analizamos su sangre. Los resultados son los siguientes:

A	A	B	B	A
A	O	O	AB	A
A	B	O	A	B
A	AB	A	A	B
A	O	O	AB	A

- ¿Cuál es la población de estudio? ¿Y la muestra?
- ¿Qué tipo de variable es?
- Construya la tabla de frecuencias.
- Para visualizar estos datos, elabore un diagrama de barras y un diagrama de sectores.
- ¿Cuál es la *Mo*?

S29. Queremos analizar si un determinado dado cúbico está equilibrado o no, porque los resultados nos parecen un poco extraños. Para eso lanzamos el dado 1000 veces y obtenemos los siguientes resultados:

Resultados x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	148	142	133	155	297	125

- Haga una tabla de frecuencias y un diagrama de barras.
- ¿Con estos resultados podemos deducir si el dado está o no está equilibrado?

S30. Hacemos un estudio sobre la cantidad de libros que leen en un semestre un determinado grupo de adolescentes. Los resultados son los siguientes:

Núm. libros x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	5	7	10	23	24	15	12	4

- Construya la tabla de frecuencias completa donde aparezcan las absolutas, las relativas y las respectivas acumuladas.
- Dibuje el diagrama de barras y el polígono de frecuencias asociado.
- Calcule los parámetros de centralización.
- Halle los cuartiles, P_{15} y P_{85}.
- Calcule los parámetros de dispersión e interprete el resultado del *CV*.

S31. En una explotación ganadera hacen un estudio sobre la cantidad de vacas que entran cada hora a una estación ordeñadora y los resultados son los siguientes:

Núm. de vacas x_i	1	2	3	4	5
f_i	1	3	14	6	1

- Calcule la tabla de frecuencias completa donde aparezcan las absolutas, las relativas y las respectivas acumuladas.
- Dibuje el diagrama de barras y el polígono de frecuencias asociado.
- Calcule los parámetros de centralización.
- Halle los cuartiles, P_{20} y P_{80}.
- Calcule los parámetros de dispersión.

S32. En una determinada aula de módulo IV de ESA presencial preguntamos cuantas horas de estudio dedican a la semana y los resultados son los siguientes:

14	1	13	11	10	14	14	4	3	6
9	10	8	1	5	2	7	12	13	6
2	8	9	10	2	2	11	12	8	7

- Calcule la tabla de frecuencias completa donde aparezcan las absolutas, las relativas y las respectivas acumuladas. Además, añada las columnas necesarias para calcular los diferentes parámetros que nos piden en apartados posteriores.
- Dibuje el histograma y el polígono de frecuencias asociado.
- Calcule los parámetros de centralización.
- Halle los cuartiles, P_{15} y P_{60}.
- Calcule los parámetros de dispersión.

S33. Hacemos un estudio sobre el peso de un determinado grupo de niños y niñas de 3 años afectados por una determinada enfermedad y obtenemos los siguientes resultados:

Peso (kg)	$[6,7)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,10)$	$[10,11)$
Número de niños/as	3	8	10	2	2

- Calcule la tabla de frecuencias completa donde aparezcan las absolutas, las relativas y las respectivas acumuladas. Además, añada las columnas necesarias para calcular los diferentes parámetros que nos piden en apartados posteriores.
- Dibuje el histograma y el polígono de frecuencias asociado.
- Calcule los parámetros de centralización.
- Halle los cuartiles, P_{15} y P_{60}.
- Calcule los parámetros de dispersión.
- ¿Nos proporciona alguna información el *CV*?

S34. El dinero, en euros, del que dispone un grupo de jóvenes de 12 años para salir el sábado es:

Dinero (€)	$[0,5)$	$[5,10)$	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$
Número de jóvenes	13	9	6	2	1

- Calcule la tabla de frecuencias completa donde aparezcan las absolutas, las relativas y las respectivas acumuladas. Además, añada las columnas necesarias para calcular los diferentes parámetros que nos piden en apartados posteriores.
- Dibuje el histograma y el polígono de frecuencias asociado.
- Calcule los parámetros de centralización.
- Halle los cuartiles, P_{35} y P_{90}.
- Calcule los parámetros de dispersión.

S35. Responda a las siguientes preguntas:

- En un equipo de baloncesto disponen para jugar de dos tipos de pantalones (negros o blancos) y de tres camisetas (negras, blancas y azules). ¿De cuántas maneras distintas pueden vestirse?
- Tiramos una moneda, si sale cara, sacamos una bola de una urna A que contiene una bola blanca y otra negra; si sale cruz, sacamos una bola de una urna B que contiene una bola blanca, otra negra y otra azul. Escriba todos los posibles resultados.

S36. En un bombo de lotería hay 10 bolas enumeradas del 0 al 9. Extraemos una al azar y anotamos el número obtenido, que será la terminación del número ganador. Considere los siguientes sucesos: $A = "obtener\ un\ número\ impar"$ y $B = "obtener\ un\ número\ superior\ a\ 5"$.

- Describa A, $B, \overline{A}, \overline{B}, A \cup B$, $A \cap B$.
- Calcule las probabilidades de los sucesos anteriores.

S37. Lanzamos dos dados y sumamos los resultados obtenidos. Calcule:

- La probabilidad de obtener una suma de 4.
- La probabilidad de obtener una suma superior a 9.
- La probabilidad de obtener una suma inferior a 5.

S38. Si lanzamos simultáneamente dos monedas al aire, calcule la probabilidad de:

- Obtener dos cruces.
- Obtener cara en una moneda y cruz en otra moneda.

S39. Lanzamos un dado cúbico dos veces y anotamos los resultados, calcule la probabilidad de:

- Obtener dos 3.
- Obtener dos números distintos de 3.

S40. Lanzamos dos veces una moneda truncada, con probabilidad de salir cara de 0,4, y anotamos los resultados. Calcule:

- La probabilidad de obtener dos cruces.
- La probabilidad de obtener por lo menos una cara.
- ¿Hay algún tipo de relación entre los dos resultados anteriores?

S41. En un partido de fútbol de infantiles los turnos de penaltis son de 3 lanzamientos. Un equipo tiene tres lanzadores muy buenos, meten 9 de cada 10 penaltis que lanzan. Calcule:

- La probabilidad de que metan los tres lanzamientos.
- La probabilidad de que fallen dos de ellos.
- La probabilidad de que alguno de ellos falle en el disparo.

4. Solucionario

4.1 Actividades propuestas

Estamos utilizando para la resolución de los problemas un redondeo a dos cifras decimales.

S1.

- *El sexo de los habitantes de una ciudad: variable aleatoria cualitativa. Es conveniente estudiar dicha variable en una muestra.*
- *La nacionalidad de las personas que viven en su país: variable aleatoria cualitativa. Sería mejor estudiar esta variable en la muestra.*
- *El dinero gastado por sus hermanos en un día: variable aleatoria cuantitativa continua. Se podría estudiar toda la población*
- *El peso de todos sus amigos y amigas: variable aleatoria cuantitativa continua. Se podría estudiar toda la población.*
- *El color de los ojos de su familia directa (abuelos, tíos, primos, hermanos e hijos): variable aleatoria cualitativa. Se puede estudiar toda la población.*
- *Velocidad a la que pasan los coches por una calle: variable aleatoria cuantitativa discreta. Aquí tendríamos que distinguir si pasan pocos coches (y en este caso estudiamos toda la población) o si, por el contrario, pasan muchos coches, con lo cual sería mejor opción estudiar una muestra de las velocidades a la que pasan los coches.*
- *El número de hijos de todos sus primos: variable aleatoria cuantitativa discreta. Se podría estudiar toda la población.*

S2.

Variable estadística	*Gasto que hacen las personas que van a un negocio.*
Población	*12 358 personas que visitaron el negocio.*
Muestra y tamaño muestral	*Las 120 personas elegidas.*
Individuo	*Cada una de las 120 personas elegidas.*

S3.

Veces que comen una pieza de chocolate x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0	4	4	0,2	0,2
1	8	12	0,4	0,6
2	4	16	0,2	0,8
3	2	18	0,1	0,9
4	1	19	0,05	0,95
5	1	20	0,05	1
	20			

S4.

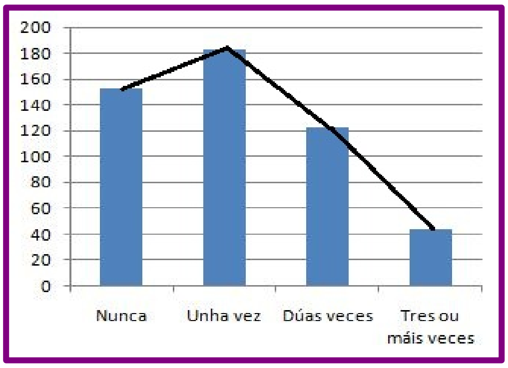
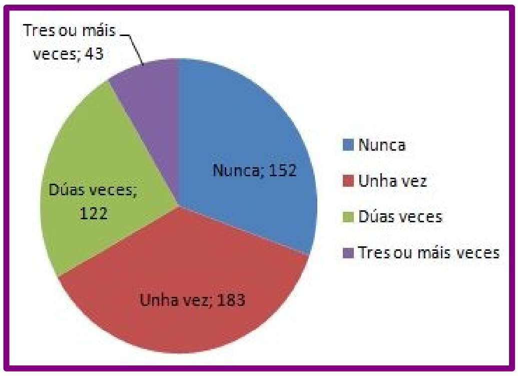
Longitud en mm Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
$7 \leq x < 8$	7,5	6	6	0,24	0,24
$8 \leq x < 9$	8,5	8	14	0,32	0,56
$9 \leq x < 10$	9,5	5	19	0,2	0,76
$10 \leq x < 11$	10,5	4	23	0,16	0,92
$11 \leq x < 12$	11,5	2	25	0,08	1
		25		1	

S5.

Color del pelo x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
N	10	10	0,4167	0,4167
L	10	20	0,4167	0,8333
N	4	24	0,1667	1
	24		1	

En las frecuencias relativas, absolutas y acumuladas los aparentes errores en las sumas son debidos al redondeo y, la mayor parte de las veces, afectarán a la cuarta cifra decimal. Esto es debido a que los cálculos están hechos con hojas de cálculo y cuando parece que deberíamos de sumar 0,4167 + 0,4167 = 0,8334 la hoja de cálculo suma 0,41666… + 0,41666… = 0,833333… y, por lo tanto, presenta como resultado 0,8333.

S6.

Diagrama de barras y polígono de frecuencias	Diagrama de sectores
	

S7.

- *En la primera tabla obtenemos* $\bar{x} = 3{,}05$; $Mo = 3$ *y* $Me = 3$.
- *En la segunda tabla obtenemos* $\bar{x} = 15{,}33$; *intervalo modal* $[0, 10) \rightarrow Mo = 5$ *e intervalo mediano* $[10, 20) \rightarrow Me = 15$.
- *En la tercera tabla* $Mo = Bo$.

S8. *Ampliemos con las frecuencias acumuladas las dos tablas*

x_i	1	2	3	4	5
f_i	2	4	8	5	2
F_i	2	6	14	19	21

Clases	$[0,10)$	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$
f_i	12	9	6	2	1
F_i	12	21	27	29	30

En el primer caso:

- *25 % de 21 es 5,25. Por lo tanto,* $Q_1 = 2$.
- *50 % de 21 es 10,5. Por lo tanto,* $Q_2 = 3$.
- *75 % de 21 es 15,75. Por lo tanto,* $Q_3 = 4$.

En el segundo caso:

- *25 % de 30 es 7,5. Por lo tanto,* $Q_1 = 5$.
- *50 % de 30 es 15. Por lo tanto,* $Q_2 = 15$.
- *75 % de 30 es 22,5. Por lo tanto,* $Q_3 = 25$.

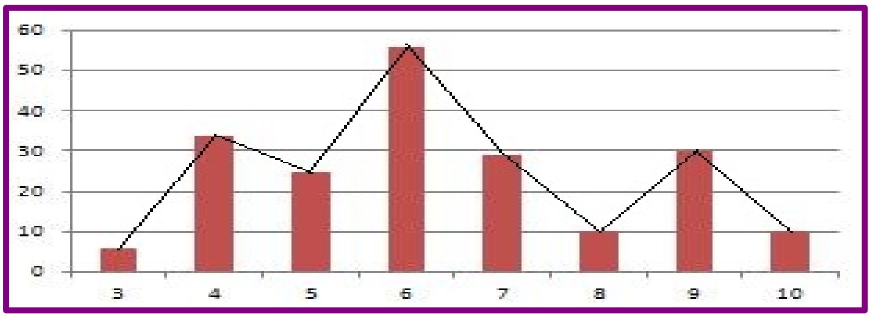
S9. *En el primero caso:*

- $R = 4$.
- $DM = 0{,}83$.
- $var = 1{,}19$.
- $\sigma = 1{,}09$.
- $CV = 0{,}3577 \rightarrow 35{,}77\ \%$.

En el segundo caso:

- $R = 50$.
- $DM = 8{,}47$.
- $var = 116{,}56$.
- $\sigma = 10{,}80$.
- $CV = 0{,}7041 \rightarrow 70{,}41\ \%$.

S10. Las soluciones son las siguientes:



– *32,5 %.*

– *80 %.*

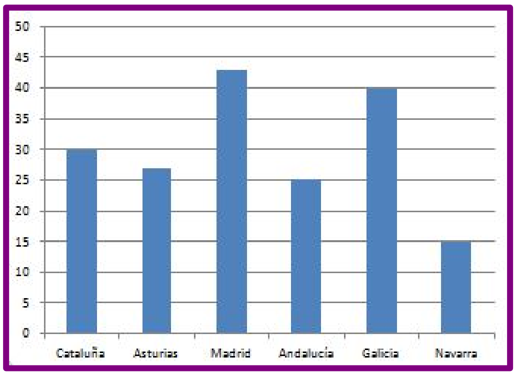
– $\bar{x} = 6{,}34$; $Mo = 6$ y $Me = 6$.

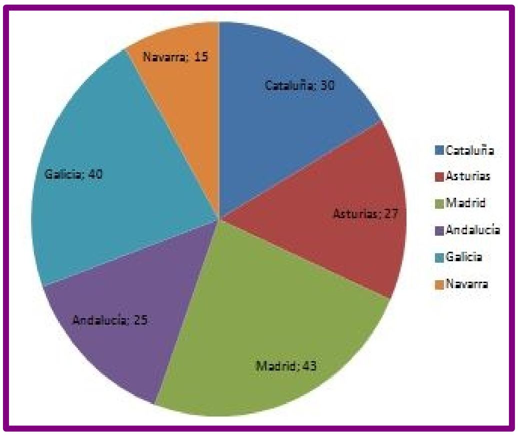
– $Q_1 = 5, Q_2 = 6$ y $Q_3 = 7{,}5$.

– $R = 7,\ DM = 1{,}52,\ var = 3{,}45,\ \sigma = 1{,}86$ y $CV = 29{,}32, \rightarrow 29{,}32\ \%$.

Puesto que CV = 29,32 %, los datos están separados de la media.

S11. Las soluciones son las siguientes:

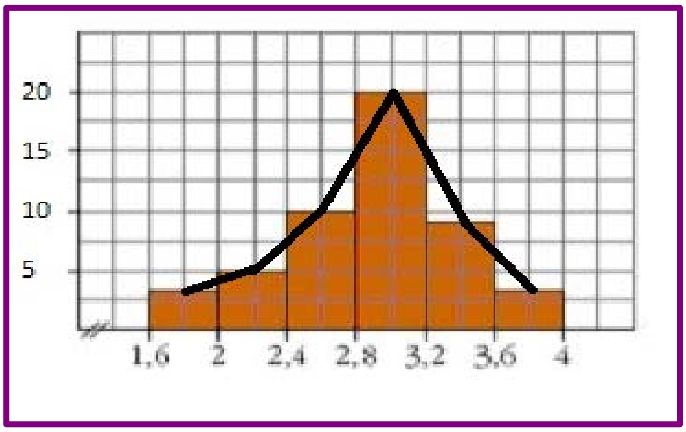




– $Mo = Madrid$.

S12. Las soluciones son las siguientes:

x_i	f_i
1,8	3
2,2	5
2,6	10
3	20
3,4	9
3,8	3
	50



– *36 %.*

– $\bar{x} = 2{,}89$; $Mo = 3$ y $Me = 3$.

– $Q_1 = 2{,}6,\ Q_2 = 3$ y $Q_3 = 3$.

– $R = 2{,}4,\ DM = 0{,}38,\ var = 0{,}24,\ \sigma = 0{,}49$ y $CV = 0{,}1686 \rightarrow 16{,}86\ \%$.

Debido a que el CV = 16,86 %, los datos están relativamente agrupados alrededor de la media.

S13.

Experimento aleatorio	Experimento aleatorio	No es experimento aleatorio
Experimento aleatorio	No es experimento aleatorio	

S14. *Si llamamos Bl = "sacar bola blanca", Ne = "sacar bola negra" y Ro = "sacar bola roja", entonces:*

Espacio muestral $E = \{Bl, Ne, Ro, Ro\}$	
Suceso elemental $A = \{Bl\}$	Suceso compuesto $B = \{Bl, Ne\}$
$C = \{sacar\ bola\ redonda\}$	$E = \{obtener\ el\ número\ 1\}$

S15. *Los resultados son:*

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$	
$A = \{2,4,6,8,10\}$	$B = \{6,7,8,9,10\}$
$\bar{A} = \{1,3,5,7,9\}$	$\bar{B} = \{1,2,3,4,5\}$
$A \cup B = \{2,4,6,7,8,9,10\}$	$A \cap B = \{6,8,10\}$

S16. *Si definimos I = "obtener película infantil", A = "obtener película acción", D = "obtener película drama" y C = "obtener película comedia", entonces:*

$$P(C) = \frac{94}{449} = 0{,}2094$$

$$P(\overline{D}) = \frac{249}{449} = 0{,}5546$$

S17. *Definimos los sucesos 3 = "sacar un 3", M3 = "sacar múltiplo de 3", N = "sacar número negativo" y A = "sacar un número menor que 20", entonces:*

- $P(3) = \frac{1}{12} = 0{,}0833.$
- $P(M3) = \frac{4}{12} = 0{,}3333.$
- $P(\overline{M3}) = \frac{8}{12} = 0{,}6667.$
- $P(N) = \frac{0}{12} = 0.$ *Suceso imposible.*
- $P(A) = \frac{12}{12} = 1$. *Suceso seguro.*

S18. *Utilizaremos lo que se llama en estadística tabla de contingencia, que sirve para expresar los diferentes valores de dos o más variables, en este caso los diferentes resultados de cada uno de los dados. En las celdas interiores situaremos las sumas de los valores de cada dado.*

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Definimos los sucesos + 2 = "sumen 2", + 1 = "sumen 1", y < 6 = "sumen menos de 6", entonces:

– $P(+2) = \frac{1}{36} = 0{,}0278$, *como puede observar:*

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

– $P(+1) = \frac{0}{36} = 0$. Es imposible que sumen 1, es un suceso imposible.

– $P(< 6) = \frac{10}{36} = 0{,}2778$, como puede observar:

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

– $P(\overline{< 6}) = \frac{26}{36} = 0{,}7222$, *como puede observar en la tabla anterior. En este caso habría que contar los que quedan fuera del triángulo de lados rojos.*

S19. *Las soluciones son:*

– $E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$

– $A = \{CCC, CXC, XCC, XXC\}$

– $B = \{XCC, XCX, XXC, XXX\}$

– $A \cup B = \{CCC, CXC, XCC, XXC, XCX, XXX\}$

– $A \cap B = \{XCC, XXC\}$

– $P(A) = \frac{4}{8} = 0{,}5$; $P(B) = \frac{4}{8} = 0{,}5$; $P(A \cup B) = \frac{6}{8} = 0{,}75$ *y* $P(A \cap B) = \frac{2}{8} = 0{,}25$

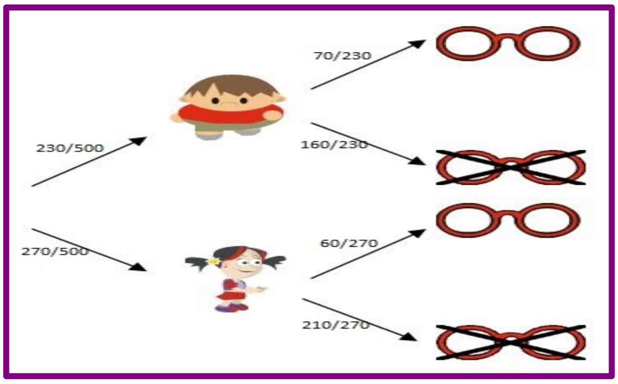
S20. *Definimos los intervalos B = “sacar bola blanca”, N = “sacar bola negra” y R = “sacar bola roja”, entonces:*

- $P(B\ o\ N) = P(B) + P(N) = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = 0{,}75$
- $P(\bar{B}\ y\ \bar{N}) = P(R) = \frac{3}{12} = 0{,}25$
- $P(\bar{R}) = \frac{9}{12} = 0{,}75$

S21. *Definimos los sucesos 1C = “sacar caballo en la primera extracción” y 2C = “sacar caballo en la segunda extracción”, entonces:*

- $P(1C, 2C) = P(1C) \cdot P(2C) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{16}{1600} = 0{,}01$. *En la segunda extracción hay las mismas posibilidades, porque la baraja se encuentra exactamente igual que en la primera extracción. Son sucesos independientes.*
- $P(1C, 2C) = P(1C) \cdot P(2C) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1560} = 0{,}0076$. *En la segunda extracción solo quedan 3 caballos y 39 cartas en la baraja, ya que no devolvemos el primer caballo. Son sucesos dependientes.*

S22. *Definimos H = “sea niño”, M = “sea niña” y L = “usar gafas”. Si observamos el siguiente diagrama de árbol:*



- $\mathrm{P(H\ y\ L) = P(H) \cdot P(L)} = \frac{230}{500} \cdot \frac{70}{230} = \frac{70}{500} = 0{,}14$. *En la probabilidad de usar gafas tenemos que tener en cuenta que es del grupo de los niños. Los sucesos son dependientes.*
- $P(M\ e\ \bar{L}) = P(H) \cdot P(\bar{L}) = \frac{270}{500} \cdot \frac{60}{270} = \frac{60}{500} = 0{,}12$. *En la probabilidad de usar gafas tenemos que tener en cuenta que es del grupo de las niñas. Los sucesos son dependientes.*

S23. *Definimos los sucesos M3 = “salir múltiplo de 3”, C = “salir cara” y N = “salir bola color negra”, entonces:*

- $P(M3\ y\ C) = P(M3) \cdot P(C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$
- $P(\overline{M3}\ y\ N) = P(\overline{M3}) \cdot P(N) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{18} = 0{,}2222$

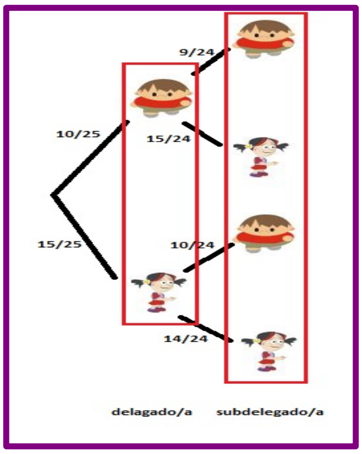
S24. *Definimos los sucesos, 1N = "escoger 1.º negro", 2N = "escoger 2.º negro", 1B = "escoger 1.º blanco" y 2B = "escoger 2.º blanco". Hacemos un diagrama de árbol que nos ayude a comprender el problema:*

– $P(1N \text{ y } 2N) = P(1N) \cdot P(2N) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = 0{,}3571$

– $P(\text{mismo color}) = P(1N \text{ y } 2B) + P(1B \text{ y } 2N) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = 0{,}5357$

Son sucesos dependientes, porque, cuando escogemos la segunda vez, el número de calcetines cambia, por lo tanto, debemos tener esto en cuenta a la hora de poner la probabilidad en la segunda selección.

S25. *Definimos los sucesos, DH = "salir elegido como delegado un niño", DM = "salir elegido como delegada una niña" y SH = "salir elegido un niño como subdelegado". Hacemos un diagrama de árbol que nos ayude a interpretar el problema.*



– $P(DM \text{ y } SH) = P(DM) \cdot P(SH) = \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{150}{600} = 0{,}25$

– $P(DH \text{ y } SH) = P(DH) \cdot P(SH) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{90}{600} = 0{,}15$

Una vez que elegimos un delegado, la elección de subdelegado está condicionada por la anterior, por lo tanto, son sucesos dependientes y esto lo debemos tener en cuenta a la hora de poner las probabilidades de los subdelegados, el número de niños y niñas es distinto.

4.2 Actividades finales

S26. *La solución es la siguiente:*

- *Población: todo el alumnado de la escuela de primaria.*
- *Muestra: 10 estudiantes elegidos al azar de cada curso.*
- *Variable: deporte que practican; se trata de una variable estadística cualitativa.*

S27. *La solución es la siguiente:*

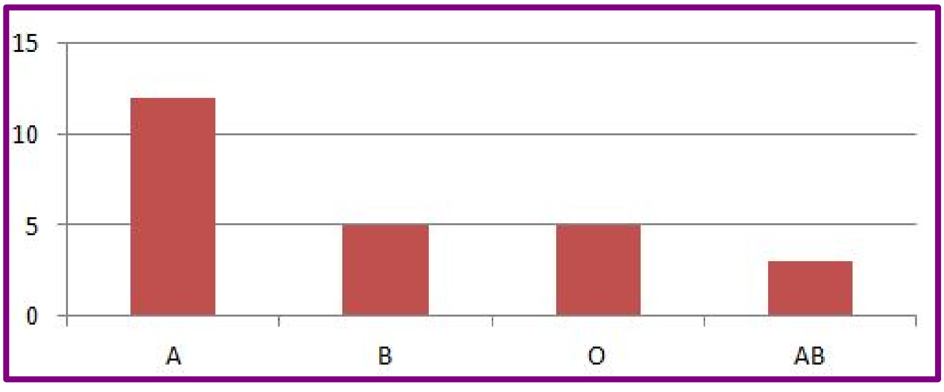
- *Población: todos los tornillos fabricados por este fabricante.*
- *Muestra: 1 de cada 100 tornillos elegidos al azar.*
- *En este caso hay 3 variables: si el tornillo está bien o mal fabricado sería una variable cualitativa, la longitud se trataría de una variable cuantitativa continua y el número de pasos de rosca se trataría de una variable cuantitativa discreta.*

S28.

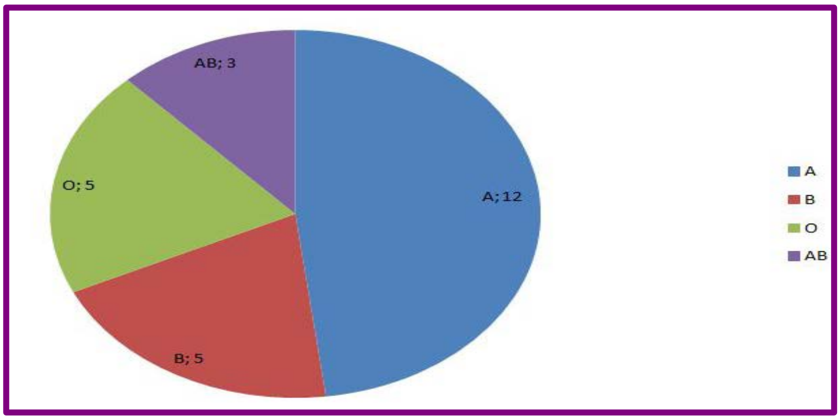
- *La población a estudiar son las 750 personas que viven en esa localidad y la muestra las 25 elegidas para realizar el estudio.*
- *Se trata de una variable cualitativa.*

Grupo sanguíneo x_i	f_i
A	12
B	5
O	5
AB	3
	25

- *El diagrama de barras es:*



– *El diagrama de sectores es el siguiente:*

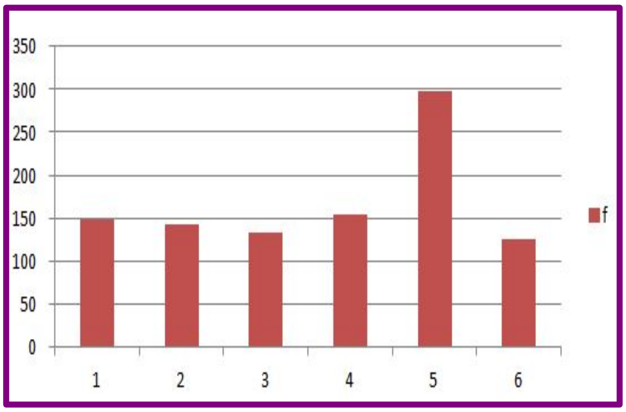


– *Mo = A.*

S29.

– *Haremos solamente una tabla de valores con las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas para analizar las porcentajes*.

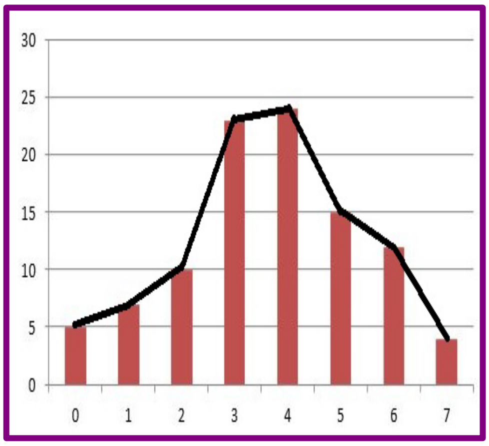
Resultados x_i	f_i	h_i
1	148	0,148
2	142	0,142
3	133	0,133
4	155	0,155
5	297	0,297
6	125	0,125
	1000	1



– *Podemos observar que el número 5 sale con una proporción de un 29,7 % cuando, con un número alto de lanzamientos, para cada valor deberíamos obtener aproximadamente unos porcentajes alrededor del* $\frac{100}{6} \approx 16{,}67\ \%$. *Con estos resultados podríamos pensar que el dado no está equilibrado.*

S30.

Núm. de libros que leen al semestre x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0	5	5	0,05	0,05
1	7	12	0,07	0,12
2	10	22	0,10	0,22
3	23	45	0,23	0,45
4	24	69	0,24	0,69
5	15	84	0,15	0,84
6	12	96	0,12	0,96
7	4	100	0,04	1
	100		1	



$\bar{x} = 3{,}67$	$Mo = 4$	$Me = 4$

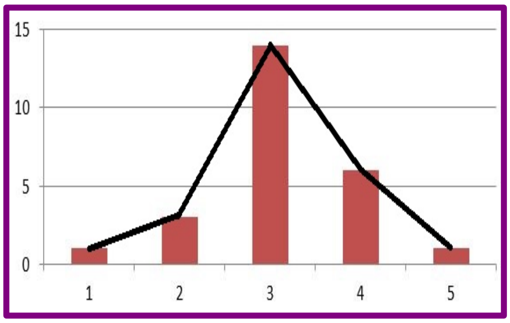
$Q_1 = P_{25} = 3$	$Q_2 = P_{50} = 4$	$Q_3 = P_{75} = 5$	$P_{15} = 2$	$P_{85} = 6$

$R = 7$	$DM = 1{,}38$	$var = 2{,}94$	$\sigma = 1{,}71$	$CV = 0{,}4673$

Puesto que el CV es de un 46,73 %, podemos decir que los datos no están muy agrupados alrededor de la media.

S31.

Núm. de vacas x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1	1	1	0,04	0,04
2	3	4	0,12	0,16
3	14	18	0,56	0,72
4	6	24	0,24	0,96
5	1	25	0,04	1
	25		1	



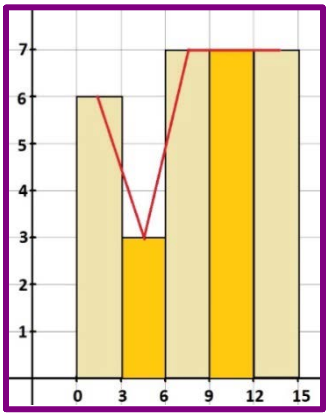
$\bar{x} = 3{,}12$	$Mo = 3$	$Me = 3$

$Q_1 = P_{25} = 3$	$Q_2 = P_{50} = 3$	$Q_3 = P_{75} = 4$	$P_{20} = 3$	$P_{80} = 4$

$R = 4$	$DM = 0{,}57$	$var = 0{,}67$	$\sigma = 0{,}82$	$CV = 0{,}2615$

S32.

Número de horas Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot {x_i}^2$
$0 \leq x < 3$	1,5	6	0,20	6	0,20	9	39,6	13,5
$3 \leq x < 6$	4,5	3	0,10	9	0,30	13,5	10,8	60,75
$6 \leq x < 9$	7,5	7	0,2333	16	0,5333	52,5	4,2	393,75
$9 \leq x < 12$	10,5	7	0,2333	23	0,7667	73,5	16,8	771,75
$12 \leq x < 15$	13,5	7	0,2333	30	1	94,5	37,8	1275,75
		30	1			243	109,2	2515,5



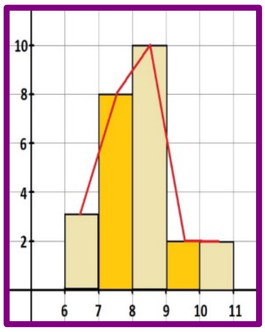
$\bar{x} = 8{,}1$	$Mo = 7{,}5\ 10{,}5\ e\ 13{,}5$	$Me = 7{,}5$

$Q_1 = P_{25} = 4{,}5$	$Q_2 = P_{50} = 7{,}5$	$Q_3 = P_{75} = 10{,}5$	$P_{15} = 1{,}5$	$P_{60} = 10{,}5$

$R = 15$	$DM = 3{,}64$	$var = 18{,}24$	$\sigma = 4{,}27$	$CV = 0{,}5273$

S33.

Peso (kg) Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot {x_i}^2$
$6 \leq x < 7$	6,5	3	0,12	3	0,12	19,5	5,04	126,75
$7 \leq x < 8$	7,5	8	0,32	11	0,44	60	5,44	450
$8 \leq x < 9$	8,5	10	0,40	21	0,84	85	3,2	722,5
$9 \leq x < 10$	9,5	2	0,08	23	0,92	19	2,64	180,5
$10 \leq x < 11$	10,5	2	0,08	25	1	21	4,64	220,5
		25	1			204,5	20,96	1700,25



$\bar{x} = 8{,}18$	$Mo = 8{,}5$	$Me = 8{,}5$

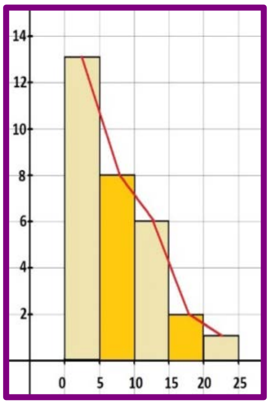
$Q_1 = 7{,}5$	$Q_2 = 8{,}5$	$Q_3 = 8{,}5$

$R = 5$	$DM = 0{,}84$	$var = 1{,}10$	$\sigma = 1{,}05$	$CV = 0{,}1281$

– *El CV es de un 12,81 % y eso significa que los datos están agrupados relativamente alrededor de la media.*

S34.

Dinero (€) Intervalos o clases	Marca de clase x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot {x_i}^2$
$0 \leq x < 5$	2,5	13	0,4333	13	0,4333	32,5	65	81,25
$5 \leq x < 10$	7,5	8	0,2667	21	0,70	60	0	450
$10 \leq x < 15$	12,5	6	0,20	27	0,90	75	30	937,5
$15 \leq x < 20$	17,5	2	0,0667	29	0,9667	35	20	612,5
$20 \leq x < 25$	22,5	1	0,0333	30	1	22,5	15	506,25
		30	1			225	130	2587,5

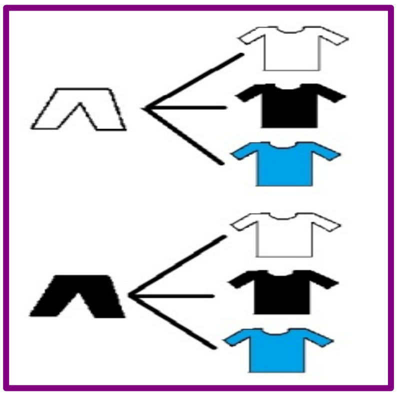


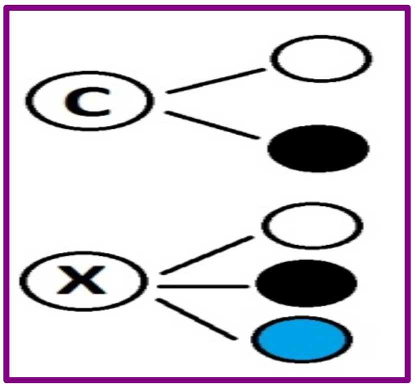
$\bar{x} = 7{,}5$	$Mo = 2{,}5$	$Me = 7{,}5$

$Q_1 = 2{,}5$	$Q_2 = 7{,}5$	$Q_3 = 12{,}5$	$P_{35} = 2{,}5$	$P_{95} = 17{,}5$

$R = 25$	$DM = 4{,}33$	$var = 30$	$\sigma = 5{,}48$	$CV = 0{,}7303$

S35.





S36.

- $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{6,7,8,9\}, \bar{A} = \{0,2,4,6,8\} \bar{B} = \{0,1,2,3,4,5\}$ $A \cup B = \{1,3,5,6,7,8,9\}$, $A \cap B = \{7,9\}$.
- $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{4}{10}$, $P(\bar{A}) = \frac{5}{10}$, $P(\bar{B}) = \frac{6}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$.

S37. Las probabilidades pueden observarse en los siguientes gráficos:

	Dado 1					
Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

	Dado 1					
Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

	Dado 1					
Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- $P(obtener\ suma\ de\ 4) = \frac{3}{36}$.
- $P(obtener\ suma\ superior\ a\ 9) = \frac{6}{36}$.
- $P(obtener\ suma\ inferior\ a\ 5) = \frac{6}{36}$.

S38.

- $P(1X\ y\ 2X) = \frac{1}{4}$.
- $P(C\ y\ X) = P(1C\ y\ 2X) + P(1X\ y\ 2C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

S39. Observando estás tablas podemos responder fácilmente.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3			X			
4						
5						
6						

	1	2	3	4	5	6
1	X	X		X	X	X
2	X	X		X	X	X
3						
4	X	X		X	X	X
5	X	X		X	X	X
6	X	X		X	X	X

- $P(3\ y\ 3) = \frac{1}{36}$.
- $P(no\ 3\ y\ no\ 3) = 36$.

S40.

- $P(1X\ y\ 2X) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$.
- $P(por\ lo\ menos\ 1\ cara) = P(1C\ y2C) + P(1C\ y2X) + P(1X\ y2C) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}64$.
- $La\ relación\ existente\ es\ la\ siguiente: P(por\ lo\ menos\ 1\ cara) = 1 - P(obtener\ dos\ cruces)$.

S41. *Definimos G = "meter gol" y F = "fallar el penalti"*

- $P(1G\ y\ 2G\ y\ 3G) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}729$.
- $P(fallen\ 2\ de\ ellos) =$
  $P(1G\ y\ 2F\ y\ 3F) + P(1F\ y\ 2G\ y\ 3F) + P(1F\ y\ 2F\ y\ 3G) = 0{,}27$.
- $P(algún\ fallo\ en\ el\ disparo) = 1 - P(1G\ y\ 2G\ y\ 3G) = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$.

5. Glosario

C	▪ Coeficiente de variación	Cociente entre las desviaciones típicas y la media aritmética.
D	▪ Desviación media	Es la media de los valores absolutos de las desviaciones de cada dato.
	▪ Desviación típica	Raíz cuadrada de la varianza.
E	▪ Estadística	Ciencia de las matemáticas que se encarga de recoger y ordenar datos referidos a fenómenos para después analizarlos e interpretarlos.
	▪ Espacio muestral	Conjunto de todos los sucesos elementales.
	▪ Experimento aleatorio	Aquel experimento del que no se puede predecir el resultado.
F	▪ Frecuencia absoluta	Número de veces que aparece un determinado valor en la muestra.
	▪ Frecuencia relativa	Cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.
	▪ Frecuencia absoluta/relativa acumulada	Suma de todas las frecuencia absolutas/relativas de los valores menores o iguales que él.
G	▪ Gráfico estadístico	Permite organizar e interpretar los datos obtenidos en un estudio estadístico de una manera más visual.
I	▪ Individuo	Cada uno de los elementos de la población.
M	▪ Media aritmética	Cociente entre la suma de todos los datos multiplicados por sus frecuencias y el número total de individuos de la muestra.
	▪ Mediana	Valor que ocupa la posición central después de ordenarlos.
	▪ Moda	Valor de mayor frecuencia.
	▪ Muestra	Parte de la población sobre la que realizamos un estudio estadístico.
P	▪ Población	Conjunto de elementos sobre los que se realiza un estudio estadístico.
	▪ Probabilidad de un suceso	Número comprendido entre 0 y 1 que indica la facilidad con la que un suceso puede ocurrir.
Q	▪ Cuartiles	Medidas que dividen el conjunto de los valores ordenados en cuatro partes iguales.
R	▪ Rango	Diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable.
S	▪ Suceso contrario de *A*	Aquel que está formado por los sucesos elementales que no están en *A*.
	▪ Suceso compuesto	Aquel que está formado por varios sucesos elementales.
	▪ Suceso elemental	Cada uno de los posibles resultados de un experimento.
V	▪ Variables cualitativas	Aquellas cuyos valores son cualidades.
	▪ Variables cuantitativas	Aquellas cuyos valores son números.
	▪ Variable estadística	Cada una de las propiedades o características que estudiamos en un estudio estadístico.
	▪ Varianza	Es la media de los cuadrados de las desviaciones.

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- Matemáticas. Enseñanzas aplicadas. Serie Soluciona. 4.º ESO. Editorial Santillana.
- Matemáticas. Enseñanzas académicas. Serie Resuelve. 4.º ESO. Editorial Santillana.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4.º ESO. Editorial Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4.º ESO. Editorial Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4.º de la ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4.º de la ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.

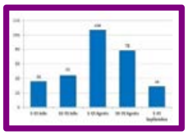
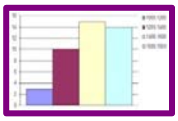
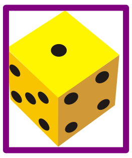
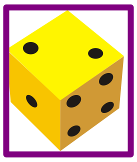
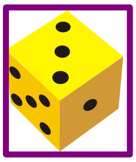
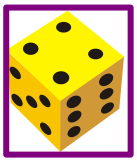
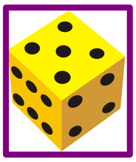
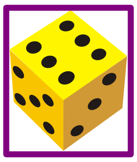
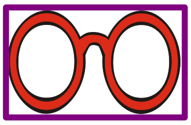
Enlaces de Internet

En estos enlaces puede encontrar trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://www.universoformulas.com/
- http://www.vitutor.com/
- http://www.apuntesmareaverde.org.es/
- http://educalab.es/recursos
- https://esorecursosdematematicas.blogspot.com.es/

7. Anexo. Licencia de recursos

Licencias de recursos utilizados en esta unidad didáctica

RECURSO (1)	DATOS DEL RECURSO (1)	RECURSO (2)	DATOS DEL RECURSO (2)
 RECURSO 1	▪ Procedencia: http://www.universoformulas.com/	 RECURSO 2	▪ Procedencia: http://www.vitutor.com/
 RECURSO 3	▪ Procedencia: http://www.vitutor.com/	 RECURSO 4	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/
 RECURSO 5	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/	 RECURSO 6	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/
 RECURSO 7	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/	 RECURSO 8	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/
 RECURSO 9	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/	 RECURSO 10	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/
 RECURSO 11	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/	 RECURSO 12	▪ Autoría: Félix Vallés Calvo ▪ Licencia: uso no comercial ▪ Procedencia: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/