XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para persoas adultas

Ámbito científico tecnolóxico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 3

Unidade didáctica 1

Números e álxebra

Índice

1. Introdución

1.1 Descrición da unidade didáctica

Nesta unidade estudaremos a relación entre os números racionais e os números decimais, chegando ata as expresións radicais e as súas operacións.

Estudaremos, ademais, as expresións alxébricas e as operacións con elas, as ecuacións de segundo grao, así como os sistemas de ecuacións lineais de dúas ecuacións con dúas incógnitas, para finalizar coa resolución de problemas da vida cotiá mediante a utilización destas potentes ferramentas matemáticas.

1.2 Coñecementos previos

Para traballar con esta unidade é necesario recordar os conceptos e operacións estudados nos módulos anteriores, en especial:

- Cales son os números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q}$. Operacións combinadas cos números naturais, enteiros e racionais. Potencias de base 10.
- A linguaxe alxébrica e a tradución de expresións da linguaxe cotiá á alxébrica e viceversa.
- A resolución de ecuacións de primeiro grao cunha incógnita.

1.3 Criterios de avaliación

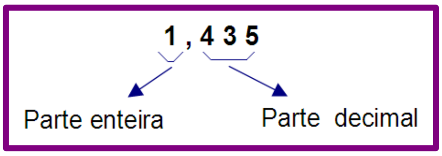
- Utilizar as propiedades dos números racionais, as raíces e outros números radicais para operar con eles, empregando a forma de cálculo e notación adecuada, para resolver problemas da vida cotiá e presentar os resultados coa precisión requirida.
- Utilizar a linguaxe alxébrica para expresar unha propiedade ou relación dada mediante un enunciado, extraendo a información relevante e transformándoa.
- Resolver problemas da vida cotiá nos que se precise a formulación e a resolución de ecuacións de primeiro e segundo grao, así como sistemas lineais de dúas ecuacións con dúas incógnitas, aplicando técnicas de manipulación alxébricas, gráficas ou recursos tecnolóxicos e valorar e contrastar os resultados obtidos.

2. Secuencia de contidos e actividades

2.1 Números racionais

2.1.1 Transformación de fraccións en decimais. Números decimais exactos e periódicos

Os números decimais teñen dúas partes separadas por unha coma:



Ao acharmos o cociente entre numerador e denominador dunha fracción, se a división non é exacta, obtemos un número decimal.

Todas as fraccións equivalentes representan o mesmo número decimal.

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=0{,}666\ldots=0{,}\widehat{6} \qquad \frac{5}{8}=\frac{10}{16}=\frac{15}{24}=0{,}625$$

Os números decimais que se obteñen dunha fracción ao dividir o numerador entre o denominador (sempre que non dea exacta) poden ser de dous tipos: **números decimais exactos** ou **números decimais periódicos**.

Os **números decimais exactos** son aqueles que teñen un número finito de decimais. Vexamos que número decimal corresponde a catro quintos.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}8 \end{array}$$

Correspóndelle o número decimal exacto 0, 8.

Os **números decimais periódicos** están formados por un numero ilimitado de cifras decimais.

$$\frac{50}{11}=4{,}545\ldots=4,\widehat{54} \qquad \frac{16}{15}=1{,}06666\ldots=1{,}0\widehat{6}$$

Reciben o nome de período as cifras que se repiten indefinidamente.

En función de como sexa a parte decimal, os números periódicos poden ser:

- **Periódicos puros**: a súa parte decimal é toda periódica.
- **Periódicos mixtos**: a súa parte decimal está formada por unha parte non periódica seguida doutra parte periódica.

Actividades resoltas

Obteña a expresión decimal correspondente ás seguintes fraccións, e indique de que tipo son:

$\frac{132}{11}$	= 12, que non é un número decimal.
$\frac{5}{9}$	$= 0{,}55555\ldots = 0{,}\hat{5}$, que é un número decimal periódico puro.
$\frac{128}{15}$	$= 8{,}53333\ldots = 8{,}5\hat{3}$, que é un número decimal periódico mixto.
$\frac{48}{5}$	= 9,6, que é un número decimal exacto.

Actividade proposta

S1. Calcule a expresión decimal de cada unha das seguintes fraccións e indique se ditas expresións decimais son exactas, periódicas puras ou periódicas mixtas.

Fracción	Expresión decimal	Tipo de decimal
$\frac{3}{4}$		
$\frac{11}{3}$		
$\frac{11}{15}$		
$\frac{3}{25}$		
$\frac{121}{6}$		
$\frac{17}{330}$		
$\frac{500}{9}$		
$\frac{73}{2}$		

2.1.2 Transformación de decimais en fraccións

Acabamos de ver como se transforma unha fracción nun número decimal, pero... como se fai o proceso inverso? É dicir, como transformamos un número decimal nunha fracción?

En primeiro lugar cómpre sinalar que non todos os números decimais se poden transformar en fracción. Para saber que números decimais se poden transformar en fracción e cales non, debemos revisar o que xa aprendemos nesta unidade.

Os números decimais dos que temos falado ata agora son os números decimais exactos e os números decimais periódicos (puros ou mixtos). Isto é así porque **os únicos números decimais que se poden transformar en fracción son os números decimais exactos e os números decimais periódicos (tanto os puros coma os mixtos)**.

Hai números decimais que non son nin exactos nin periódicos, como por exemplo o número:

7,12112111211112111112111111211111112...

Este número non pode ser transformado nunha fracción. Os números que non poden ser transformados en fraccións teñen todos un número infinito de cifras decimais e non son periódicos. Estes números chámanse **números irracionais** e falaremos deles no apartado 2.2. desta unidade.

Agora veremos a forma de pasar os números decimais a fracción. Esta fracción chámase **fracción xeratriz**. A forma de transformalos depende do tipo de número decimal de que se trate. Así, haberá un método para transformar en fracción os números decimais exactos, outro para os periódicos puros e outro diferente para os periódicos mixtos.

Transformación en fracción dun número decimal exacto

O numerador da fracción xeratriz é o número decimal sen a coma e o denominador é o 1 seguido de tantos ceros como cifras ten a parte decimal do número.

Actividades resoltas

Transforme en fraccións os seguintes números decimais exactos:

$\mathbf{0,8}$	Ten unha única cifra decimal, polo que a fracción que lle corresponde é $\frac{8}{10}$, que pode ser simplificada e obtemos $\frac{4}{5}$.
$\mathbf{2,25}$	Ten dúas cifras decimais, polo que a fracción que lle corresponde é $\frac{225}{100}$, que pode ser simplificada e obtemos $\frac{9}{4}$.
$\mathbf{0,875}$	Ten tres cifras decimais, polo que a fracción que lle corresponde é $\frac{875}{1000}$, que pode ser simplificada e obtemos $\frac{7}{8}$.
$\mathbf{7}$	Non ten cifras decimais, polo que a fracción que lle corresponde é $\frac{7}{1}$.

Transformación en fracción dun número decimal periódico puro

Para pasar a forma de fracción un número periódico puro debemos contar cantas cifras ten a parte periódica do número. Así, $1,\hat{2}$ é un número periódico puro e o período está formado por unha única cifra decimal. Chamámoslle *A* ao número decimal:

$$A = 1,\hat{2} = 1{,}222 \ldots.$$

Agora multiplicamos o número pola unidade seguida de tantos ceros coma cifras ten a parte periódica do número. Como neste caso a parte periódica de $1,\hat{2}$ ten unha única cifra, multiplicamos o número por 10 e obtemos:

$$10A = 12{,}222 \ldots$$

Restamos as dúas expresións que temos:

$$\begin{array}{r} 10A = \ 12{,}222 \ldots \\ \underline{-A \ = \ \ \ 1{,}222 \ldots} \\ 9A = 11 \end{array}$$

E finalmente despexamos *A*:

$$9A = 11 \Rightarrow A = \frac{11}{9} \Rightarrow 1,\hat{2} = \frac{11}{9}$$

e xa temos o número $1,\hat{2}$ expresado en forma de fracción.

Actividades resoltas

Transforme en fraccións os seguintes números decimais periódicos puros:

$31,\widehat{53}$	A parte periódica ten dúas cifras, polo que multiplicaremos o número por 100 e temos: $$\begin{array}{r} 100A = 3153,5353\ldots \\ \underline{-A = \ -31,5353\ldots} \\ 99A = 3122 \end{array}$$ Así, $99A = 3122 \Rightarrow A = \frac{3122}{99}$, que non se pode simplificar, e temos que $\mathbf{31,\widehat{53}} = \frac{3122}{99}$
$0,\widehat{432}$	A parte periódica ten tres cifras, polo que multiplicaremos o número por 1000 e temos: $$\begin{array}{r} 1000A = 432,432432\ldots \\ \underline{-A = \ -0,432432\ldots} \\ 999A = 432 \end{array}$$ Así, $999A = 432 \Rightarrow A = \frac{432}{999}$, que se pode simplificar, e temos que $\mathbf{0,\widehat{432}} = \frac{16}{37}$

Transformación en fracción dun número decimal periódico mixto

Para pasar a forma de fracción un número periódico mixto debemos contar cantas cifras ten a parte periódica do número e cantas ten a parte decimal non periódica. Así, $1,64\hat{2}$ é un número periódico mixto cuxo período está formado por unha única cifra (2) e a parte decimal non periódica está formada por dúas cifras (6 e 4). Chamámoslle *A* ao número decimal:

$$A = 1,64\hat{2} = 1,64222\ldots.$$

Agora multiplicamos o número pola unidade seguida de tantos ceros coma cifras ten a parte decimal non periódica do número. Como neste caso a parte decimal non periódica de $1,64\hat{2}$ ten dúas cifras, multiplicamos o número por 100 e obtemos:

$$100A = 164,222\ldots$$

Multiplicamos tamén o número *A* pola unidade seguida de tantos ceros coma cifras ten a parte decimal non periódica do número máis o número de cifras da parte periódica. Como neste caso a parte decimal non periódica de $1,64\hat{2}$ ten dúas cifras e a periódica unha, multiplicamos o número por 1000 e obtemos:

$$1000A = 1642,22\ldots$$

Restamos as dúas expresións que temos:

$$\begin{array}{r} 1000A \ = \ 1642,222\ldots \\ \underline{-100A \ = \ \ 164,222\ldots} \\ 900A = 1478 \end{array}$$

E finalmente despexamos *A*:

$$900A = 1478 \Rightarrow A = \frac{1478}{900} \Rightarrow 1{,}64\hat{2} = \frac{1478}{900}$$

Que se pode simplificar $1{,}64\hat{2} = \frac{1478}{900} = \frac{739}{450}$ e xa temos o número $1{,}64\hat{2}$ expresado en forma de fracción.

Actividades resoltas

Transforme en fraccións os seguintes números decimais periódicos mixtos:

$\mathbf{31{,}5\hat{3}}$	A parte periódica ten unha cifra e a decimal non periódica outra, polo que multiplicaremos o número por 100 e por 10 e temos: $$\begin{array}{r} 100A = 3153{,}333\ldots \\ \underline{-10A = -315{,}333\ldots} \\ 90A = 2838 \end{array}$$ Así, $90A = 2838 \Rightarrow A = \frac{2838}{90}$, que se pode simplificar e temos que $\mathbf{31{,}5\hat{3}} = \frac{473}{15}$
$\mathbf{0{,}4\widehat{32}}$	A parte periódica ten dúas cifras e a decimal non periódica unha polo que multiplicaremos o número por 1000 e por 10 e temos: $$\begin{array}{r} 1000A = 432{,}3232\ldots \\ \underline{-10A = -4{,}3232\ldots} \\ 990A = 428 \end{array}$$ Así, $990A = 428 \Rightarrow A = \frac{428}{990}$, que se pode simplificar e temos que $\mathbf{0{,}4\widehat{32}} = \frac{214}{495}$

Resumo

Para pasar un número decimal a fracción procédese do seguinte xeito:
Decimal exacto: $$\frac{\text{Número sen coma}}{\text{Unidade seguida de tantos ceros coma cifras decimais ten o número}}$$
Periódico puro: $$\frac{\text{Número sen coma} - \text{Parte enteira}}{\text{Tantos 9 coma cifras periódicas ten o número}}$$
Periódico mixto: $$\frac{\text{Número sen coma} - \text{Parte enteira seguida da parte decimal que non se repite}}{\text{Tantos 9 coma cifras periódicas seguidos de tantos ceros coma cifras decimais non periódicas}}$$

Actividades propostas

S2. Calcule a fracción xeratriz dos seguintes números, deixando a fracción o máis reducida posible:

$0{,}25\hat{1}$	$3{,}\widehat{35}$	$1{,}\hat{9}$
$12{,}28$	$7{,}25$	2
$8{,}\hat{8}$	$1{,}\hat{1}$	$7{,}222\hat{1}$
$13{,}3$	$3{,}8\widehat{21}$	$0{,}\widehat{4321}$
$-7{,}00\widehat{541}$	$0{,}25$	$-0{,}72\widehat{12}$

S3. Baseándose nos resultados das celas sombreadas do exercicio anterior, demostre que $1,\hat{9} = 2$.

S4. Tomando como referencia a actividade anterior, demostre que $1{,}3\hat{9} = 1{,}4$.

2.1.3 Potencias de números racionais con expoñente enteiro

Neste momento xa nos deben ser coñecidas as potencias de números naturais e de números enteiros. As potencias de números racionais calcúlanse de xeito similar. Así:

- **Potencia dunha fracción con expoñente positivo:** unha potencia dunha fracción con expoñente positivo é o produto desa fracción (a base) por ela mesma tantas veces como indique o expoñente. A base escríbese sempre entre parénteses.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{\text{n veces}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{\text{n veces}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{\text{n veces}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

- **Potencias con expoñente cero:** a potencia de expoñente cero vale sempre un (para calquera base distinta de cero) $(\boldsymbol{a})^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$. Da mesma forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

- **Potencias con expoñente negativo:** unha potencia con expoñente negativo é a inversa da mesma potencia de expoñente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

As propiedades das operacións con potencias, xa coñecidas para os números naturais e os enteiros, aplícanse igualmente aos números racionais (tamén chamados fraccións):

- **Coas potencias das fraccións séguense as mesmas regras para os signos:**

$$(nº\ negativo)^{par} = nº\ positivo \qquad (nº\ negativo)^{impar} = nº\ negativo$$

$$(nº\ positivo)^{par} = nº\ positivo \qquad (nº\ positivo)^{impar} = nº\ positivo$$

- A **potencia dun produto** é igual ao produto das potencias dos factores.

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

- A **potencia dun cociente** é igual ao cociente das potencias.

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

- **Produto de potencias da mesma base:** para multiplicalas, déixase a mesma base e súmanse os expoñentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

- **Cociente de potencias da mesma base:** para dividilas, déixase a mesma base e réstanse os expoñentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

- **Potencia doutra potencia:** para elevar unha potencia a outra potencia, déixase a mesma base e multiplícanse os expoñentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$$

Actividades resoltas

$\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}\right)^3=\left(\frac{15}{30}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}$
$\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^{3+2}=\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{3^5}{2^5}=\frac{243}{32}$
$\left(\frac{5}{10}\right)^2:\left(\frac{6}{5}\right)^2=\left(\frac{5}{10}:\frac{6}{5}\right)^2=\left(\frac{25}{60}\right)^2=\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{5^2}{12^2}=\frac{25}{144}$
$\left(\frac{3}{5}\right)^9:\left(\frac{3}{5}\right)^7=\left(\frac{3}{5}\right)^{9-7}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$
$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot 2}=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1^6}{2^6}=\frac{1}{64}$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{(-3)^2}{2^2}=\frac{9}{4}$
$\frac{2^3\cdot 3^{-5}\cdot 6^4\cdot 9^2\cdot 8^{-3}}{12^3\cdot 9^{-5}\cdot 3^7\cdot 2^{-5}}=\frac{2^3\cdot 3^{-5}\cdot(2\cdot 3)^4\cdot(3^2)^2\cdot(2^3)^{-3}}{(2^2\cdot 3)^3\cdot(3^2)^{-5}\cdot 3^7\cdot 2^{-5}}=\frac{2^3\cdot 3^{-5}\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 3^4\cdot 2^{-9}}{2^6\cdot 3^3\cdot 3^{-10}\cdot 3^7\cdot 2^{-5}}=$ $=\frac{2^{3+4-9}\cdot 3^{-5+4+4}}{2^{6-5}\cdot 3^{3-10+7}}=\frac{2^{-2}\cdot 3^3}{2^1\cdot 3^0}=2^{-3}\cdot 3^3=\frac{3^3}{2^3}=\frac{27}{8}$
$\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^6=\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^6=\frac{4^3}{5^3}\cdot\frac{5^6}{2^6}=\frac{(2^2)^3}{5^3}\cdot\frac{5^6}{2^6}=\frac{2^6}{5^3}\cdot\frac{5^6}{2^6}=2^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^6\cdot 2^{-6}=2^{6-6}\cdot 5^{-3+6}=$ $=2^0\cdot 5^3=1\cdot 125=125$

Actividades propostas

S5. Exprese en forma de número (natural, enteiro ou racional) o máis simplificado posible:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	$(3)^{-2}$
$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{2}$	$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$	$\left(\left(\frac{10}{6}\right)^{-1}\right)^{-2}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}:\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{2}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{4}:\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$	$((2^{-1})^{3})^{2}:\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)^{3}$

S6. Exprese en forma de potencia:

$\frac{2^4}{9^2}$	$\frac{2^4\cdot 3^6}{18^2\cdot 3^2}$	$\frac{3x^5y^{-3}z^7}{3^{-1}\cdot(x^2y)^2\cdot(yz)^{-7}\cdot x}$
$9\cdot x^{-6}\cdot(x^2y)^2$	$\frac{x^2y^3}{x^{-8}y^8}$	$\left(\left(\frac{1}{x^{-1}}\right)^{-2}\right)^{-3}$

2.1.4 Xerarquía de operacións

Cando hai varias operacións indicadas, **a orden da operación** é como nos números naturais e enteiros:

1- Parénteses

2- Potencias e raíces

3- Multiplicacións e divisións

4- Sumas e restas

Cando hai operacións con parénteses, opéranse estes en primeiro lugar dunha destas dúas formas:

- Resólvense as parénteses de forma independente ata deixalas reducidas a unha soa fracción.
- Suprímense as parénteses, tendo en conta que, se as parénteses teñen diante un signo +, os signos interiores non varían e, se as parénteses teñen diante un signo –, os signos interiores transfórmanse de + a – e de – a + .

$$+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n} \qquad -\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)=-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{m}{n}$$

Actividade resolta

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}-\frac{1\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{18}{20}-\frac{2}{15}=\frac{54}{60}-\frac{8}{60}=\frac{46}{60}=\frac{23}{30}$$

m.c.m. (20,15) = 60

Actividades propostas

S7. Resolva e calcule

$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=$	$\frac{7}{9}-\frac{1}{6}:\frac{3}{2}=$	$\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}=$
$\frac{3}{5}:6+\frac{5}{6}:4=$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3:\frac{1}{9}+\frac{2}{5}=$	$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{4}{9}\right)=$

2.1.5 Potencias de base 10. Aplicación para a expresión de números moi pequenos

Potencias de base 10

A razón de repasar neste momento as potencias de 10 é que, nas ciencias en xeral, se traballa con números moi pequenos (como a masa e a carga das partículas subatómicas: protón, electrón e neutrón) e con números moi grandes (como o número de átomos que hai nun corpo calquera, por exemplo, un libro). Grazas ás potencias de 10 podemos expresar estes números, moi grandes ou moi pequenos, dun xeito fácil de utilizar e, sobre todo, podemos lelos facilmente.

As potencias de 10 xa son coñecidas, especialmente as que teñen expoñente positivo. Neste apartado as repasaremos xunto coas potencias de 10 con expoñente negativo.

Expoñente positivo	Expoñente cero	Expoñente negativo
$10^1=10$ $10^2=100$ $10^3=1\,000$ $10^4=10\,000$ $10^5=100\,000$ $10^6=1\,000\,000$ …	$10^0=1$	$10^{-1}=\frac{1}{10^1}=\frac{1}{10}=0{,}1$ $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01$ $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\,000}=0{,}001$ $10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10\,000}=0{,}000\,1$ …

Actividades propostas

S8. Calcule:

10^{-4}	10^{11}	$8 \cdot 10^{5}$
$9 \cdot 10^{-2}$	10^{0}	10^{-3}

Notación científica

Un número está escrito en **notación científica** se está expresado como produto dun número real cunha única cifra antes da coma decimal (que non pode ser cero) por unha potencia de 10.

$$m \cdot 10^{e}$$

- O número *m* chámase **mantisa.** Ten que ter unha única cifra antes da coma decimal, e esa cifra non pode ser cero e debe ir precedida do signo menos (-) cando o número é negativo. Así, exemplos de mantisas son:

1,234	-9,2567	4,254	-3	7

- O número *e* chámase **orde de magnitude**. A orde da magnitude dun numero escrito en notación científica é o expoñente da potencia de 10.

Actividades resoltas

Escriba en notación científica os seguintes números:

$80\,000 = 8 \cdot 10^{4}$	$-123\,450\,000 = -1{,}2345 \cdot 10^{8}$	$8\,230\,000\,000\,000 = 8{,}23 \cdot 10^{12}$
$0{,}000\,08 = 8 \cdot 10^{-5}$	$-0.000\,000\,001\,22 = -1{,}22 \cdot 10^{-9}$	$0{,}000\,000\,000\,000\,08 = 8 \cdot 10^{-14}$
$85\,325\,965\,245\,000\,000 = 8{,}5325965245 \cdot 10^{16}$	$-0{,}000\,000\,000\,000\,853\,421 = -8{,}53421 \cdot 10^{-13}$	

Actividades propostas

S9. Escriba en notación científica os números seguintes:

$370\,000\,000\,000\,000\,000$	$-0{,}000\,056$
$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,807$	$0{,}000\,000\,000\,000\,947$
$-294\,300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$	$1\,000\,000\,000$

S10. Escriba en forma ordinaria

$-2{,}75 \cdot 10^{4}$	$8{,}08 \cdot 10^{-7}$	$-9{,}98 \cdot 10^{8}$
$-3{,}2 \cdot 10^{-4}$	$1{,}08 \cdot 10^{6}$	$1{,}623 \cdot 10^{-20}$

2.1.6 Operacións con números expresados en notación científica

Sumas e restas

Teñen que ter a mesma potencia de 10 para poder sumalos e restalos directamente.

Actividades resoltas

Calcule:

$3 \cdot 10^{-6} + 5{,}32 \cdot 10^{-6} = 8{,}32 \cdot 10^{-6}$	$5{,}1 \cdot 10^{4} + 6{,}3 \cdot 10^{4} = 11{,}4 \cdot 10^{4} \rightarrow 1{,}14 \cdot 10^{5}$ Lembre que a mantisa só pode ter unha cifra antes da coma

Se non teñen iguais os expoñentes de 10, pódense transformar noutros que si os teñan e despois sumalos ou restalos.

Actividades resoltas

Calcule:

$3 \cdot 10^{6} + 5{,}32 \cdot 10^{5} = 3 \cdot 10^{6} + 0{,}532 \cdot 10^{6} = 3{,}532 \cdot 10^{6}$
$8{,}1 \cdot 10^{-3} + 5{,}32 \cdot 10^{-4} = 8{,}1 \cdot 10^{-3} + 0{,}532 \cdot 10^{-3} = 8{,}632 \cdot 10^{-3}$
$5{,}2 \cdot 10^{3} - 1{,}28 \cdot 10^{4} = 0{,}52 \cdot 10^{4} - 1{,}28 \cdot 10^{4} = -0{,}76 \cdot 10^{4} \rightarrow -7{,}6 \cdot 10^{3}$ Lembre que a mantisa só pode ter unha cifra antes da coma

Tamén se poden resolver coa calculadora como explicaremos máis adiante.

Multiplicacións e divisións

Presentan menos dificultades que as sumas e as restas.

Para o produto, multiplícanse as mantisas e súmanse os expoñentes.

Actividades resoltas

Calcule:

$(3 \cdot 10^{6}) \cdot (5{,}32 \cdot 10^{5}) = (3 \cdot 5{,}32) \cdot 10^{6+5} = 15{,}96 \cdot 10^{11} \rightarrow 1{,}596 \cdot 10^{12}$ Lembre que a mantisa só pode ter unha cifra antes da coma
$(-8{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 \cdot 10^{-4}) = (-8{,}1 \cdot 5) \cdot 10^{-3+(-4)} = -40{,}5 \cdot 10^{-7} \rightarrow -4{,}05 \cdot 10^{-6}$ Lembre, de novo, que a mantisa só pode ter unha cifra antes da coma

Para o cociente, divídense as mantisas e réstanse os expoñentes.

Actividades resoltas

Calcule:

$(3{,}2\cdot 10^{6}):(5\cdot 10^{-4}) = \left(\frac{3{,}2}{5}\right)\cdot 10^{6-(-4)} = 0{,}64\cdot 10^{10} = 6{,}4\cdot 10^{9}$
$(-8{,}1\cdot 10^{-3}):(6\cdot 10^{7}) = \left(-\frac{8{,}1}{6}\right)\cdot 10^{-3-7} = -1{,}35\cdot 10^{-10}$

Operacións usando a calculadora

Para escribir nunha calculadora un número en notación científica emprégase a tecla EXP (non use a tecla de 10^{x}).

Para teclear o número $2{,}95\cdot 10^{8}$ facemos así: 2.95 EXP 8. Fíxese que o 10 NON se teclea! Vexamos máis exemplos:

	$3\cdot 10^{6}$	→	3 EXP 6
	$10^{7} = 1\cdot 10^{7}$	→	1 EXP 7 Ollo! É un erro frecuente teclear neste caso 10 EXP 7; lembre que o 10 non se teclea.
	$2{,}7\cdot 10^{-4}$	→	2.7 EXP ± 4 Nalgunhas calculadoras é 2.7 EXP (-) 4

Logo de que o número apareza na pantalla, pode facer con el calquera operación, como faría cos números ordinarios (sumar, multiplicar, raíces etc.). A calculadora devólvelle automaticamente o resultado do cálculo correcto en notación científica. Moi cómodo!

Actividade proposta

S11. Efectúe as seguintes operacións escribindo o resultado en notación científica.

$2\cdot 10^{5} + 5{,}76\cdot 10^{7} - 5{,}4\cdot 10^{6}$	$(2{,}34\cdot 10^{24}):(1{,}4\cdot 10^{20})$
$(4{,}5\cdot 10^{9})\cdot(6{,}5\cdot 10^{3})$	$(1{,}2\cdot 10^{7})^{2}$

2.2 Expresións radicais

Xa temos falado dos números decimais no apartado 2.1.2. Alí indicamos que os únicos números decimais que se poden transformar en fracción son os números decimais exactos e os números decimais periódicos (tanto os puros coma os mixtos). Tamén comentamos que hai números decimais que non son nin números decimais exactos nin números decimais periódicos, como por exemplo o número:

7,12112111211112111112111111211111112...

Os números que non poden ser transformados en fraccións teñen todos un número infinito de cifras decimais e non son periódicos.

Hai moitos números que son dese tipo, é dicir, hai moitos números que non son racionais. Imos escribir algúns deles:

- 1,101001000100001000001000001...
- 1,4142135623730950488016887242096980...=$\sqrt{2}$
- 3,14159265358979323846264338322950288419716939933751058209...=π
- 2,7182818284...=e

Observe que algúns dos números anteriores teñen un nome especial.

Ningún destes números é un número racional, ou o que é o mesmo, ningún deses números se pode escribir en forma de fracción. Deste xeito, vese que hai máis números ca os racionais. Estes números que non son racionais chámanse **números irracionais** e a súa expresión decimal ten sempre infinitas cifras decimais e non son periódicos. O conxunto formado por todos os números irracionais represéntase por $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{I}=\{\text{números irracionais}\}$$

Dentro destes números irracionais están as raíces de números enteiros que non dan exactas, é dicir, as que no resultado teñen cifras decimais.

Os números irracionais son coñecidos dende hai moito tempo (máis de 2000 anos). Xa naquela época se sabía que algúns deses números, como π ou $\sqrt{2}$, non se podían escribir en forma de fracción.

Se os números irracionais teñen infinitas cifras decimais e non son periódicos, como os escribimos? Algúns deles, como vimos anteriormente, teñen un nome especial e noutros só se escriben unha certa cantidade de cifras decimais. É dicir, escribimos unha aproximación deses números, nunca o número completo xa que non é posible.

O conxunto formado por todos os números racionais e todos os números irracionais chámase **conxunto dos números reais** e represéntase por $\mathbb{R}$.

Se ***n*** é un número natural e ***a*** é un número real, a **raíz n-ésima** de ***a*** é un número real ***x*** que verifica que $x^n = a$. Ese número ***x*** represéntase por $\sqrt[n]{a}$. É dicir:

$$x = \sqrt[n]{a} \quad \textit{é equivalente a dicir que } x^n = a$$

- Ao símbolo $\sqrt{\ }$ chámaselle **radical.**
- Ao número ***n*** chámaselle **índice.**
- Ao número ***a*** chámaselle **radicando**.
- A expresión $\sqrt[n]{a}$ chámase **expresión radical**.

Como 3^3=27, temos que $\sqrt[3]{27} = 3$ e dicimos que a raíz cúbica de 27 é 3.

$\sqrt{25} = \pm 5$, xa que $5^2 = 25$ e $(-5)^2 = 25$

$\sqrt{169} = \pm 13$, xa que $(\pm 13)^2 = 169$

$\sqrt[3]{-64} = -4$, xa que $(-4)^3 = -64$

$\sqrt[3]{125} = 5$, xa que $5^3 = 125$

Estes números non existen sempre. Así:

- Se ***n*** é par, $\sqrt[n]{a}$ só existe cando ***a*** é positivo ou é 0.
- Se ***n*** é impar, $\sqrt[n]{a}$ existe sempre, sexa cal sexa o valor do número ***a***.

As raíces son as potencias con expoñente racional. É dicir, se o expoñente é unha fracción entón esa potencia representa unha raíz. O índice da raíz é o denominador do expoñente, o radicando da raíz é a base da potencia elevada ao numerador do expoñente. É dicir:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Polo tanto:

- $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$.
- $a^{-1/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a}}$, sendo sempre $a \neq 0$.
- $a^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$, sendo tamén neste caso $a \neq 0$.
- $\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a^1 = a$

Actividades resoltas

Escriba en forma de raíz:

$5^{1/6} = \sqrt[6]{5}$	$3^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$	$2^{3/5} = \sqrt[5]{2^3}$	$7^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

Actividade proposta

S12. Exprese en forma de potencia de 5:

$\sqrt{125}$	$\sqrt[3]{25}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{25}}$	$\sqrt{5}$

2.2.1 Transformacións de números radicais

- Dúas expresións radicais son semellantes se teñen as mesmas raíces.
- Se multiplicamos o índice e o expoñente do radicando polo mesmo número (distinto de cero) obteremos un radical semellante ao de partida.

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}} \quad sempre\ que\ n \neq 0$$

Así, para simplificar un radical, debemos dividir o índice e o expoñente do radicando polo máximo común divisor de ambos números.

Actividades resoltas

Simplifique ao máximo os seguintes radicais:

$\sqrt[10]{3^8} = \sqrt[5]{3^4}$ $\uparrow$ $mcd(10{,}8) = 2$	$\sqrt[24]{5^6} = \sqrt[4]{5}$ $\uparrow$ $mcd(24{,}6) = 6$

- Para introducir un factor dentro do radical debemos elevar ese número ao índice e introducilo dentro do radical multiplicado polo radicando.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Actividade resolta

Introduza o factor dentro do radical:

$$2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

- Ás veces é posible factorizar o radicando de tal xeito que un dos factores obtidos estea elevado ao índice da raíz. Nese caso, ese factor pode ser sacado da raíz.

Actividade resolta

Saque fóra do radical todos os factores que sexa posible:

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6 \cdot \sqrt{5}$$

- Para sacar fóra do radical un factor debemos dividir o expoñente do factor entre o índice da raíz. O cociente desa división ponse como expoñente do factor fóra da raíz e o resto da división ponse como expoñente dese factor dentro da raíz.

Actividades resoltas

Saque fóra do radical todos os factores que sexa posible:

$\sqrt[4]{5^{35}} = 5^8 \cdot \sqrt[4]{5^3}$ porque $35 = 4 \times 8 + 3$
$\sqrt[3]{5^7 \cdot 2^5} = 5^2 \cdot 2^1 \cdot \sqrt[3]{5^1 \cdot 2^2} = 50 \cdot \sqrt[3]{20}$ porque $7 = 3 \times 2 + 1$ e $5 = 3 \times 1 + 2$

Actividades propostas

S13. Simplifique os seguintes radicais:

$\sqrt{a^{12}}$	$\sqrt[3]{8a^3b^6}$	$(25x^8)^{1/2}$	$\sqrt{\dfrac{9a^2}{64b^8c^2}}$

S14. Exprese estes radicais utilizando o radical máis simple posible:

$\sqrt{125}$	$\sqrt{128}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{72}$
$\sqrt[3]{864}$	$\sqrt[4]{48}$	$\sqrt[5]{486}$	$\sqrt[3]{1080}$

S15. Exprese en forma de raíz dun número:

$12 \cdot \sqrt{2}$	$2 \cdot \sqrt[3]{3}$	$5 \cdot \sqrt{8}$	$7 \cdot \sqrt{5}$
$2 \cdot \sqrt[5]{7}$	$5 \cdot \sqrt[3]{2}$	$10 \cdot \sqrt[6]{17}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{2}$

2.2.2 Operacións con radicais

Radicais semellantes

Dúas **expresións radicais** son **semellantes** se teñen a mesma parte radical. É dicir, os radicais semellantes son aqueles que, tras simplificalos, teñen o mesmo índice e o mesmo radicando.

As expresións $\sqrt{2}$, $2\cdot\sqrt{2}$, $-3\cdot\sqrt{2}$ e $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ son semellantes, xa que a parte radical de todas elas é $\sqrt{2}$.
As expresións $\sqrt{18}$ e $\sqrt{2}$ son semellantes, pois $\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$ e, xa que logo, teñen a mesma parte radical.
As expresións $2\cdot\sqrt{3}$ e $\sqrt[4]{9}$ son semellantes, pois $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$ e teñen a mesma parte radical.
As expresións $\sqrt{2}$ e $2\cdot\sqrt{3}$ no son semellantes.
As expresións $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2}$ tampouco son semellantes.

Suma e resta de radicais

Só se poden sumar e restar expresións radicais semellantes. Neste caso, sumamos ou restamos os coeficientes e poñemos o mesmo radical.

Cando os termos dunha expresión non poden ser expresados en forma de radicais semellantes non se poden sumar nin restar, só podemos facer cálculos coa calculadora e obter una aproximación.

Actividade resolta

Calcule:

$$3\cdot\sqrt{8}-2\cdot\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{98}=3\cdot\sqrt{2^3}-2\cdot\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 5^2}-\sqrt{2\cdot 7^2}=$$
$$=3\cdot 2\cdot\sqrt{2}-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{3}-7\cdot\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{3}-7\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Multiplicación e división de radicais co mesmo índice

O produto de radicais co mesmo índice é outro radical co mesmo índice e o seu radicando é o produto dos radicandos.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

O cociente de radicais co mesmo índice é outro radical co mesmo índice e o seu radicando é o cociente dos radicandos.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Actividades resoltas

Calcule:

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{5\cdot 7}=\sqrt{35}$	$\frac{\sqrt[3]{98}}{\sqrt[3]{28}}=\sqrt[3]{\frac{98}{28}}=\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$

Multiplicación e división de radicais con distinto índice

Para multiplicar ou dividir expresións radicais con índices diferentes, en primeiro lugar debemos poñer o mesmo índice en todas elas. Como xa sabemos, se nunha expresión radical multiplicamos o índice e o expoñente do radicando polo mesmo número distinto de cero, obtemos un radical equivalente.

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}} \quad sempre\ que\ n \neq 0$$

Así, para poñer o mesmo índice en varias expresións radicais debemos:

1º. Calcular o mínimo común múltiplo (m.c.m.) de todos os índices. Este é o menor índice común.

2º. Dividir o mínimo común múltiplo, calculado no paso anterior, entre cada un dos índices dados e cada cociente é multiplicado polo expoñente do radicando correspondente.

Unha vez que os radicais teñen o mesmo índice xa podemos multiplicalos ou dividilos como vimos anteriormente.

Actividades resoltas

Calcule:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{7^4} \underset{(1)}{=} \sqrt[10]{3^{1\times5}} \cdot \sqrt[10]{7^{4\times2}} = \sqrt[10]{3^5} \cdot \sqrt[10]{7^8} = \sqrt[10]{3^5 \cdot 7^8}$$

(1) porque m.c.m.(2,5)=10 e 10:2=5; 10:5=2

$$\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[3]{7^2}} \underset{(1)}{=} \frac{\sqrt[12]{5^{3\times3}}}{\sqrt[12]{7^{2\times4}}} = \frac{\sqrt[12]{5^9}}{\sqrt[12]{7^8}} = \sqrt[12]{\frac{5^9}{7^8}}$$

(1) porque m.c.m.(4,3)=12 e 12:4=3; 12:3=4

Potencia e raíces dun radical

A potencia dunha raíz é igual á raíz da potencia. É dicir:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

A raíz dun radical é outro radical que ten como índice o produto dos índices e como radicando o mesmo que había. É dicir.

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n\cdot p]{a}$$

Actividades resoltas

Calcule:

$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[3\times 4]{7} = \sqrt[12]{7}$

Actividades propostas

S16. Calcule:

$\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81}$	$5 \cdot \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{x}$
$\sqrt{18} + \sqrt{50} + 1 - \sqrt{2} - \sqrt{8} + 3$	$\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$
$2 \cdot \sqrt{8} + 4 \cdot \sqrt{72} - 7 \cdot \sqrt{18}$	$3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{8} - \sqrt{32} - \sqrt{50}$
$\sqrt[5]{\frac{a^2b^2}{c^2}} \div \sqrt{\frac{ab}{c}}$	$\sqrt[5]{x} \div \sqrt[3]{x}$
$\sqrt{ab} \div \sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[4]{a^3b^5c} \div \sqrt{ab^3c^3}$

Racionalización

O proceso de eliminar as raíces do denominador dunha expresión radical chámase **racionalización**. A solución a un exercicio con raíces adoitase dar sen raíces no denominador, é dicir, coa expresión racionalizada.

Para racionalizar unha expresión multiplicamos o numerador e o denominador da expresión polo mesmo número, de xeito que ao facer as operacións desaparezan as raíces do denominador. A elección do número polo que multiplicaremos depende do tipo de expresión que haxa no denominador.

Veremos dúas formas de racionalizar unha expresión:

- Utilizando a propiedade $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Esta forma utilízase cando no denominador aparece un único sumando que contén algunha raíz, como por exemplo $\sqrt{3}$ ou $2 \cdot \sqrt[3]{5^2}$.

Debemos multiplicar numerador e denominador por unha raíz cuxo índice sexa o mesmo ca o da raíz que temos no denominador, o radicando estará elevado ao índice menos o expoñente que posúe o radicando orixinal.

Actividades resoltas

Racionalice:

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{15}{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{15}{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}\times\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{5}}{2\cdot\sqrt[3]{5^3}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{5}}{2\cdot 5}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{5}}{10}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5}}{2}$

- Utilizando a igualdade $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$.

Esta forma utilízase cando no denominador aparecen, sumando ou restando, unha ou dúas expresións que conteñen raíces cadradas, como por exemplo $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ou $3\cdot\sqrt{2}-1$.

Neste caso, temos que multiplicar numerador e denominador pola expresión conxugada do denominador. O **conxugado** da expresión $a+b$ é a expresión $a-b$ e o conxugado da expresión $a-b$ é $a+b$.

Actividades resoltas

Racionalice:

$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}\times\frac{3\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{2}+1\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{3\sqrt{2^2}+\sqrt{2}}{3^2\cdot\sqrt{2^2}-1}=\frac{3\cdot 2+\sqrt{2}}{9\cdot 2-1}=\frac{6+\sqrt{2}}{17}$
$\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{9-2}=\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

Actividades propostas

S17. Racionalice:

$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$	$\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$	$\frac{6}{\sqrt[4]{5}}$
$\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$	$\frac{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$		$\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}$

2.3 Expresións alxébricas. Polinomios

2.3.1 Terminoloxía básica

Observe a seguinte expresión $P(x) = 2x^5 - x^3 + \frac{2}{3}x - \sqrt{2}$

- Dita expresión chámase **polinomio** e está formado por catro monomios $2x^5$, $-x^3$, $\frac{2}{3}x$ e $-\sqrt{2}$. Un **polinomio** é a suma ou resta de varios monomios.
- A **variable** é *x*. Poden existir polinomios con dúas variables, pero neste módulo estudaremos polinomios cunha soa variable, que será *x*.
- Cada monomio ten un grao, que será o expoñente da variable. O **grao dun polinomio** será o maior de todos os graos de todos os monomios que forman o polinomio. Neste caso é 5.
- Os números que acompañan ás variables chámanse **coeficientes**. Así, no polinomio $P(x) = 2x^5 - x^3 + \frac{2}{3}x - \sqrt{2}$ o coeficiente de grao cinco é 2, o coeficiente de grao tres é -1, o de grao un é $\frac{2}{3}$ e o de grao cero é $-\sqrt{2}$. Observe que neste polinomio non aparecen monomios de grao catro nin de grao dous. Isto é porque os coeficientes deses graos son 0.
- Chámase **coeficiente principal** dun polinomio ao coeficiente do monomio de maior grao.
- Chámase **termo independente** o coeficiente do monomio de grao cero.
- Cando traballamos con polinomios cunha soa variable, chámanse **monomios semellantes** os que teñen o mesmo grao.

2.3.2 Valor numérico dun polinomio

Chámase **valor numérico dun polinomio** $P(x)$ para *x* igual a un número o valor que se obtén ao substituír a variable por dito número e efectuar as operacións.

O valor numérico do polinomio $P(x)$ para $x = a$ represéntase por $P(a)$.

Actividade resolta

Calcular o valor numérico do polinomio $P(x) = x^5 - 4x^3 + 5x^2 + 8x - 9$ para $x = 2$.

O que facemos é substituír no polinomio a variable x polo valor 2.

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^5 - 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 9 = 32 - 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 9 \\ &= 32 - 32 + 20 + 16 - 9 = 27 \end{aligned}$$

Actividades propostas

S18. Calcule o valor numérico do polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ para:

$x = 0$	$x = 1$	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{-2}{3}$	$x = \sqrt{2}$	$x = -\sqrt{3}$	$x = 3\sqrt{2}$

2.3.3 Operacións con polinomios: suma, resta, multiplicación e división

Suma e resta de polinomios

Para sumar ou restar polinomios, súmanse ou réstanse os monomios semellantes e déixase indicada a suma ou resta dos monomios que non o son.

Actividade resolta

Dados os polinomios $P(x) = 2x^5 - x^3 + 2x - 1$ e $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3$, calcule os polinomios $P(x) + Q(x)$ e $P(x) - Q(x)$

$$P(x) + Q(x) = (2x^5 - x^3 + 2x - 1) + (2x^3 - x^2 - 2x - 3) = 2x^5 - x^3 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2x - 1 - 3$$
$$= 2x^5 + (-1 + 2)x^3 - x^2 + (2 - 2)x + (-1 - 3) = 2x^5 + x^3 - x^2 - 4$$

$$P(x) - Q(x) = (2x^5 - x^3 + 2x - 1) - (2x^3 - x^2 - 2x - 3) = 2x^5 - x^3 - 2x^3 + x^2 + 2x + 2x - 1 + 3$$
$$= 2x^5 + (-1 - 2)x^3 + x^2 + (2 + 2)x + (-1 + 3) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 + 4x + 2$$

Multiplicación de polinomios

Para calcular o produto de dous polinomios, multiplícase cada monomio dun dos factores por todos e cada un dos monomios doutro factor e logo súmanse os polinomios obtidos. É conveniente ter en conta o seguinte:

- Colocamos os polinomios un debaixo doutro.
- Comézase a multiplicar pola esquerda e multiplícase o primeiro monomio do segundo polinomio por todos os monomios do primeiro polinomio.
- Os coeficientes (números) multiplícanse e as partes literais multiplícanse sumando os expoñentes.
- Continúase multiplicando os demais monomios do segundo polinomio por todos os monomios do primeiro.
- Súmanse os polinomios resultantes.

Actividade resolta

Dados os polinomios $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $Q(x) = 2x^2 - x - 3$, calcule o polinomio $\mathrm{P(x) \cdot Q(x)}$

$$\begin{array}{rcl}
3x^2 + 2x - 1 & & \\
2x^2 - x - 3 & & \\
\hline
+6x^4 + 4x^3 - 2x^2 & \leftarrow & 2x^2 \cdot (3x^2 + 2x - 1) \\
-3x^3 - 2x^2 + x & \leftarrow & (-x) \cdot (3x^2 + 2x - 1) \\
-9x^2 - 6x + 3 & \leftarrow & (-3) \cdot (3x^2 + 2x - 1) \\
\hline
6x^4 + x^3 - 13x^2 - 5x + 3 & &
\end{array}$$

Outra forma de facelo é:

$$\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) &= (3x^2 + 2x - 1) \cdot (2x^2 - x - 3) = (3x^2) \cdot (2x^2) + (3x^2) \cdot (-x) + (3x^2) \cdot (-3) + \\
&+ (2x) \cdot (2x^2) + (2x) \cdot (-x) + (2x) \cdot (-3) + \\
&+ (-1) \cdot (2x^2) + (-1) \cdot (-x) + (-1) \cdot (-3) = \\
&= 6x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4x^3 - 2x^2 - 6x - 2x^2 + x + 3 = \\
&= 6x^4 + x^3 - 13x^2 - 5x + 3
\end{aligned}$$

División de polinomios

Para dividir dous polinomios, procédese do seguinte xeito:

1º. Divídese o termo de maior grao do dividendo entre o termo de maior grao do divisor e obtemos o primeiro termo do cociente.

2º. Multiplícase o primeiro termo do cociente polo divisor e réstaselle ao dividendo. Deste xeito o termo de maior grao do dividendo desaparece e obtemos o primeiro resto da división.

3º. Se o grao do primeiro resto da división non é menor ca o grao do divisor divídese o termo de maior grao do primeiro resto entre o termo de maior grao do divisor e obtemos o segundo termo do cociente.

4º. Multiplícase o segundo termo do cociente polo divisor e réstaselle ao primeiro resto. Deste xeito o termo de maior grao do primeiro resto desaparece e obtemos o segundo resto da división.

5º. Reitérase este procedemento ata obter un resto con grao menor ca o grao do divisor, momento no que remata a división.

Actividade resolta

Dados os polinomios $P(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 + 2x - 1$ e $Q(x) = x^2 - 2x + 3$, calcule o cociente e o resto da división $P(x): Q(x)$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
3x^5 & & -4x^3 & +x^2 & +2x & -1 & \big|\ x^2 - 2x + 3 \\ \cline{7-7}
-3x^5 & +6x^4 & -9x^3 & & & & \ \ 3x^3 + 6x^2 - x - 19 \\ \cline{1-6}
& 6x^4 & -13x^3 & +x^2 & +2x & -1 & \\
& -6x^4 & +12x^3 & -18x^2 & & & \\ \cline{2-6}
& & -x^3 & -17x^2 & +2x & -1 & \\
& & x^3 & -2x^2 & +3x & & \\ \cline{3-6}
& & & -19x^2 & +5x & -1 & \\
& & & +19x^2 & -38x & +57 & \\ \cline{4-6}
& & & & -33x & +56 &
\end{array}
$$

Polo tanto, o cociente é $3x^3 + 6x^2 - x - 19$ e o resto é $-33x + 56$

Actividades propostas

S19. Calcule $(3x^4 + 5x^3 + 6x - 9) + (2x^3 - 5x^2 - 7x + 5)$.

S20. Dados os polinomios $P(x) = 5x^4 - 7x^3 + 5x - 1$, $Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ e $R(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$, calcule:

$P(x) - R(x)$	$P(x) - Q(x)$	$2P(x) - 3R(x)$	$2Q(x) - 4R(x)$

S21. Calcule:

$(2x^3 - x^2 - 3) \cdot (2x^2 + 4x - 3)$	$(3x - 5) \cdot (x - 3) - 2 \cdot (x^2 - x)$

S22. Calcule o cociente e o resto das seguintes divisións:

$(6x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 5): (2x^2 - 5x + 3)$	$(2x^5 - 20x): (2x + 2)$
$(x^4 - 5x^2 + 4): (x^2 - 4)$	$(x^4 - 2x^3 + 15x - 4): (x - 1)$

2.3.4 Potencia dun polinomio

Se *n* representa un número natural calquera, a potencia $P(x)^n$, sendo $P(x)$ un polinomio, calcúlase multiplicando *n* veces o polinomio $P(x)$ por el mesmo.

Actividade resolta

Calcule $(x^2 + 2x + 3)^2$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 3)^2 &= (x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 + 2x + 3) \\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3x^2 + 6x + 9 \\ &= x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

Potencia dun binomio

Un binomio é un polinomio que tan só ten dous coeficientes distintos de cero, é dicir, un binomio é un polinomio formado por dous monomios.

O triángulo de Pascal é un triángulo infinito de números onde cada número do triángulo se obtén como suma dos números que ten por enriba del. O triángulo de Pascal é:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . . . .

Decátase de que cada un dos números é a suma dos que ten enriba?

O triángulo de Pascal é moi útil para calcular a potencia dun binomio sen ter que multiplicar o binomio por el mesmo tantas veces como indica o expoñente.

Así, para calcular $(a + b)^n$ temos que facer o seguinte:

1º. Esta expresión vai ter *n*+1 sumandos.

2º. Cada sumando está composto por tres elementos: un número, unha potencia de *a* (o primeiro monomio) e unha potencia de *b* (o segundo monomio).

Actividade resolta

Calcule $(a+b)^5$

Imos ao triángulo de Pascal. Como o expoñente é 5, colleremos os números da fila que ten un 5 en segundo lugar. Eses números son:

1 5 10 10 5 1

Collemos tamén as potencias do primeiro sumando do binomio en orde decrecente. É dicir:

$$a^5 \quad a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a^1 \quad a^0$$

Collemos tamén as potencias do primeiro sumando do binomio en orde crecente. É dicir:

$$b^0 \quad b^1 \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4 \quad b^5$$

E agora xuntamos, na orde na que están, un elemento de cada fila e así obtemos o resultado. É dicir:

$$(a+b)^n = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

E agora facemos as contas:

$$(a+b)^n = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Procédese deste xeito con todas as potencias dos binomios. Esta expresión recibe o nome de **binomio de Newton**.

Actividades resoltas

Calcule as seguintes potencias

$(x+2)^4 = 1x^4 2^0 + 4x^3 2^1 + 6x^2 2^2 + 4x^1 2^3 + 1x^0 2^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$
$(x-2)^4 = \left(x+(-2)\right)^4 = 1x^4(-2)^0 + 4x^3(-2)^1 + 6x^2(-2)^2 + 4x^1(-2)^3 + 1x^0(-2)^4 =$ $= x^4 + 4x^3(-2) + 6x^2(+4) + 4x(-8) + 16 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$
$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1\cdot 1^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^0 + 2\cdot 1^1 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^1 + 1\cdot 1^0 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Actividades propostas

S23. Calcule:

$(1+x)^3$	$(1+2x)^5$	$(1-2x)^3$
$\left(1+\sqrt{2}\right)^4$	$\left(1+2\sqrt{3}\right)^3$	$\left(2\sqrt{2}-1\right)^4$

2.3.5 Igualdades notables

Chamamos **igualdades notables** ou **produtos notables** a certos produtos de binomios que debemos coñecer, pois abrevian os cálculos con expresións alxébricas. Son as seguintes:

- **Cadrado dunha suma:** O cadrado dunha suma de dous sumandos é igual ao cadrado do primeiro sumando, máis o dobre do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo sumando.

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- **Cadrado dunha diferenza:** O cadrado dunha diferenza é igual ao cadrado do primeiro, menos o dobre do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- **Suma por diferenza:** Unha suma de monomios multiplicada pola súa diferenza é igual á diferenza dos seus cadrados. Xa o temos utilizado cando racionalizamos (apartado 2.2.2).

$$\boldsymbol{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

Actividades resoltas

Calcule:

$(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x \cdot 1 + (1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$
$(2a-b)^2 = (2a)^2 - 2\cdot 2a \cdot b + (b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$
$(4-5x)\cdot(4+5x) = 4^2 - (5x)^2 = 16 - 25x^2$

Actividades propostas

S24. Calcule:

$(3a+2b)^2$	$(2x-y)^2$	$(x+6)\cdot(x-6)$
$(2\sqrt{2}+3)^2$	$(2-3\sqrt{2})^2$	$(\sqrt{2}+5\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-5\sqrt{3})$

2.4 Ecuacións de segundo grao cunha incógnita

2.4.1 Resolución da ecuación de segundo grao $ax^2 + bx + c = 0$

Unha ecuación é de segundo grao se, despois de reducila, cumpre estas condicións:

- Algún dos seus termos é un monomio de segundo grao.
- Non contén termos de grao superior a dous.

Toda ecuación de segundo grao cunha incógnita pódese expresar da seguinte **forma xeral:**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde *a*, *b* e *c* son números reais coñecidos (coeficientes) con *a* ≠ 0.

Unha ecuación de segundo grao pode ter dúas solucións distintas, unha solución dobre ou non ter solución.

Actividade resolta

Indique os valores dos coeficientes das seguintes ecuacións de segundo grao:

Ecuación $\rightarrow 5x^2 = 45$ Forma xeral $\rightarrow 5x^2 + 0x - 45 = 0$ Coeficientes $\rightarrow a = 5\,, b = 0,\ c = -45$	Ecuación $\rightarrow (x-3)\cdot(x-2) = 0$ Forma xeral $\rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ Coeficientes $\rightarrow a = 1\,, b = -5,\ c = 6$

Unha **ecuación de segundo grao completa** é aquela que ten todos os coeficientes distintos de cero. Se algún dos coeficientes vale cero (lembre que sempre o coeficiente de segundo grao *a* é distinto de cero), a ecuación chámase **incompleta**.

As solucións da ecuación de segundo grao veñen dadas pola expresión (que non deducimos):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O dobre signo ± diante da raíz cadrada quere dicir que en xeral hai dúas solucións:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta expresión serve para resolver todas as ecuacións de segundo grao, tanto as completas como as incompletas. As incompletas tamén teñen outros métodos de resolución que veremos posteriormente.

Actividade resolta

Resolva a ecuación de segundo grao: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$a = 1,\ \ b = -6,\ \ c = 8$, polo tanto:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

E as solucións son $x_1 = 4$ e $x_2 = 2$.

Podemos comprobar que os valores obtidos son solucións da ecuación de partida, substituíndo na ecuación *x* por 2 e por 4 e vendo que ao facer as contas obtemos como resultado cero.

Substituímos *x* por 4 na expresión $x^2 - 6x + 8$ e obtemos $4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 16 - 24 + 8 = 0$.

Substituímos *x* por 2 na expresión $x^2 - 6x + 8$ e obtemos $2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$.

En ambos os casos obtemos como resultado cero, polo que ambos os números son solucións da ecuación dada.

Actividades propostas

S25. Resolva as seguintes ecuacións de segundo grao completas:

$x^2 - 5x + 6 = 0$	$2x^2 - 12x + 10 = 0$	$4x^2 + 4x - 3 = 0$	$x^2 + 9x - 10 = 0$

2.4.2 Número de solucións dunha ecuación de segundo grao

Unha ecuación de segundo grao pode ter dúas solucións, unha ou ningunha; iso depende do valor do **discriminante** da ecuación. O discriminante dunha ecuación de segundo grao represéntase por Δ e é igual á expresión $b^2 - 4ac$ que é o radicando da raíz cadrada da fórmula que nos dá a solución das ecuacións de segundo grao. É dicir, o discriminante é:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Se o discriminante é positivo, $\Delta > 0$, a ecuación ten dúas solucións distintas.
- Se o discriminante vale cero, $\Delta = 0$, a ecuación ten unha solución (ou dúas de igual valor, que vén sendo o mesmo).
- Se o discriminante é negativo, $\Delta < 0$ a ecuación non ten solución pois a raíz cadrada da fórmula da solución non se pode calcular.

Actividade resolta

Indique, sen resolvelas, o número de solucións que ten cada unha das seguintes ecuacións de segundo grao

$x^2+3x+10=0$. Como $\Delta= b^2-4ac=3^2-4\cdot1\cdot10=9-40=-31<0$, a ecuación non ten solución.
$2x^2+12x+18=0$. Como $\Delta= b^2-4ac=12^2-4\cdot2\cdot18=144-144=0$, a ecuación ten unha única solución.
$3x^2+3x-36=0$. Como $\Delta= b^2-4ac=3^2-4\cdot3\cdot(-36)=9+432=441>0$, a ecuación ten dúas solucións distintas.

Actividades propostas

S26. Determine, coa axuda do discriminante, cantas solucións ten cada ecuación:

$3x^2-6x+3=0$	$x^2+x-3=0$	$x^2+x+3=0$	$-x^2-2x-3=0$

2.4.3 Ecuacións de segundo grao incompletas

Son as ecuacións nas que os coeficientes *b* ou *c* valen 0.

Ecuacións de tipo $ax^2+c=0$

É o caso no que $b=0$. O método máis sinxelo de resolución é despexar a incógnita *x*:

$$ax^2+c=0\Rightarrow ax^2=-c\Rightarrow x^2=\frac{-c}{a}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Se o valor de $\frac{-c}{a}$ é positivo, existirá a raíz e, xa que logo, a ecuación terá dúas solucións; pero se o valor de $\frac{-c}{a}$ é negativo, a raíz non existe e a ecuación non terá ningunha solución real.

Actividades resoltas

Resolva as seguintes ecuacións de segundo grao:

$2x^2-32=0\Rightarrow 2x^2=32\Rightarrow x^2=\frac{32}{2}=16\Rightarrow x=\pm\sqrt{16}\Rightarrow x=\pm4$. Así, as solucións son 4 e -4.
$x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$ que non existe, polo que a ecuación non ten solución.

Ecuacións de tipo ax^2 + bx = 0

É o caso no que $c = 0$. O máis sinxelo é sacar factor común *x*:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0$$

Temos a multiplicación de dous factores, x e $ax + b$, e o resultado é cero. A única forma de que, multiplicando dous factores, o resultado sexa cero é que un deles, ou os dous, sexan cero:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

e vemos que este tipo de ecuacións incompletas ten dúas solucións $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$.

Actividade resolta

Resolva a seguinte ecuación de segundo grao:

$5x^2 - 125x = 0 \Rightarrow x \cdot (5x - 125) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 125 = 0 \Rightarrow 5x = 125 \Rightarrow x = 25 \end{cases}$ Así, as solucións son 0 e 25.

Actividades propostas

S27. Resolva as ecuacións incompletas seguintes:

$3x^2 - 27 = 0$	$-2x^2 + 50x = 0$	$13x^2 + 52x = 0$	$x^2 + x = 0$
$\frac{3}{2}x^2 + 15 = 0$	$\frac{1}{3}x^2 - \frac{25}{3} = 0$	$x^2 - \frac{9}{4} = 0$	

2.4.4 Resolución de problemas utilizando ecuacións de segundo grao

Neste apartado veremos como resolver problemas mediante ecuacións de segundo grao. A principal dificultade para facer isto atopámola á hora de traducir a linguaxe habitual á linguaxe matemática e chegar a unha ecuación de segundo grao. Non é doado e cada problema é diferente. Para mostrar como se fai poñeremos varios exemplos.

- O produto dun número natural e o seu seguinte é 272. Cal é ese número?
  - Solución: sexa x o número buscado. Daquela a ecuación que nos propón este problema é $x \cdot (x+1) = 272$. Facendo as operacións temos:

$$x \cdot (x+1) = 272 \Rightarrow x^2 + x - 272 = 0$$

Resolvendo:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-272)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1088}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{-1 \pm 33}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+33}{2} = 16 \\ \dfrac{-1-33}{2} = -17 \end{cases}$$

O número natural buscado é 16. A solución $x = -17$ é dun número enteiro.

- Nun cadrado a área é igual ao dobre do perímetro. Canto mide o lado do cadrado?
  - Solución: sexa x a lonxitude do lado do cadrado.

    Área do cadrado $= x^2$; perímetro do cadrado $= x + x + x + x = 4x$

    Condición do problema: área = 2·perímetro

$$x^2 = 2 \cdot 4x \Rightarrow x^2 = 8x \Rightarrow x^2 - 8x = 0$$

Resolvamos a ecuación:

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

O lado do cadrado mide 8 unidades.

- Un almacén mercou un lote de caixas e pagou por todas elas 300 euros. Cos mesmos cartos podería comprar dez caixas máis se cada unha custase 5 euros menos. Cantas caixas mercou?
  - Solución: sexa *x* o número de caixas. O prezo de cada caixa é $\frac{300}{x}$.

    Condición do problema:

$$300 = (x+10) \cdot \left(\frac{300}{x} - 5\right)$$

Facendo as operacións:

$$300 = x \cdot \frac{300}{x} - 5x + 10 \cdot \frac{300}{x} - 50 \Rightarrow 300 = 300 - 5x + \frac{3000}{x} - 50 \Rightarrow 300 - 300 + 50 = \frac{3000}{x} - 5x \Rightarrow 50 = \frac{3000 - 5x^2}{x} \Rightarrow 50x = 3000 - 5x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 50x - 3000 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 600 = 0$$

Resolvendo a ecuación de segundo grao:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-600)}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 2400}}{2} == \frac{-10 \pm \sqrt{2500}}{2} = \frac{-10 \pm 50}{2} = \begin{cases} \frac{-10 + 50}{2} = 20 \\ \frac{-10 - 50}{2} = -30 \end{cases}$$

Comprou 20 caixas a $\frac{300}{x} = \frac{300}{20} = 15$€ cada unha.

Actividades propostas

S28. Reparta o número 10 en dous sumandos de xeito que a suma dos seus cadrados sexa 50.

S29. Se ao triplo dun número se lle suma o seu cadrado, obtense 88. Cal é o número?

S30. Ache a idade dunha persoa sabendo que, se ao seu cadrado se lle resta o triplo da idade, resulta nove veces esta.

S31. Un rectángulo ten 24 m de perímetro e 35 m^2 de área. Ache as dimensións do rectángulo.

S32. Determine o perímetro dun triángulo rectángulo isóscele cuxa área é 12 m^2.

S33. Un campo de fútbol mide 30 m máis de longo que de largo; a súa área é de 7.000 m^2. Canto miden os lados do campo?

S34. Dous números diferéncianse en sete unidades e o seu produto é 60. Cales son eses números?

2.5 Sistemas lineais de dúas ecuacións con dúas incógnitas

Que son os sistemas de ecuacións lineais?

Unha **ecuación lineal** é unha ecuación de grao un respecto de todas as incógnitas e, entre elas, non hai produtos nin divisións. Así,

$3x + 2y - 8 = 0$ é unha ecuación lineal.

$3x^2 - 2y - 5 = 0$ non é unha ecuación lineal.

$3xy + 8y = 8$ tampouco é unha ecuación lineal.

Un sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas ten como forma xeral:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

onde *x* e *y* son as incógnitas, e *a, b, c, a', b'* e *c'* son os coeficientes e termos independentes (números normalmente).

Resolver un sistema de ecuacións lineais consiste en atopar os valores das incógnitas que fan certas as dúas ecuacións simultaneamente. Por exemplo $x = 1$ e $y = 2$ é unha solución do sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ pois ao substituír as incógnitas por estes valores, as dúas igualdades son certas $\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ 1 - 2 = -1 \end{cases}$.

A maioría das veces os sistemas de ecuacións teñen unha única solución (un valor para cada incógnita), pero pode ocorrer tamén que o sistema non teña ningunha solución ou que teña infinitas.

2.5.1 Métodos de resolución de sistemas de ecuacións lineais

Hai catro métodos (ou técnicas) de resolución dun sistema: substitución, igualación, redución e representación gráfica.

Método de substitución

Consiste en despexar unha incógnita nunha ecuación e substituír o seu valor na outra ecuación.

Actividade resolta

Resolva polo método de substitución o seguinte sistema de ecuacións

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

A incógnita máis doada de despexar é y na primeira ecuación e obtemos que $y = 4 - 2x$.

Agora substituímos na segunda ecuación e temos que:

$$3x - 4 \cdot (4 - 2x) = -5 \Rightarrow 3x - 16 + 8x = -5 \Rightarrow 11x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{11} = 1$$

Agora substituímos na expresión $y = 4 - 2x$ o valor de x obtido e temos que $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

Así, a solución do sistema é $x = 1, y = 2$.

Método de igualación

Consiste en despexar a mesma incógnita nas dúas ecuacións e igualar as expresións obtidas.

Actividade resolta

Resolva polo método de igualación o seguinte sistema de ecuacións

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \quad \Rightarrow y = 4 - 2x \\ 3x - 4y = -5 \Rightarrow y = \dfrac{3x + 5}{4} \end{cases}$$

Agora igualamos estas dúas expresións:

$$4 - 2x = \frac{3x + 5}{4}$$

Agora eliminamos denominadores e resolvemos a ecuación:

$$4 - 2x = \frac{3x + 5}{4} \Rightarrow 4 \cdot (4 - 2x) = 3x + 5 \Rightarrow 16 - 8x = 3x + 5 \Rightarrow -11x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{-11} = 1$$

Agora substituímos en calquera das dúas expresión obtidas ao principio, por exemplo a primeira, o valor de x obtido e temos que $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

Así, a solución do sistema é $x = 1, y = 2$.

Método de redución

Consiste en multiplicar cada ecuación por un número (habitualmente distinto para cada ecuación) de xeito que os coeficientes dunha das incógnitas teñan valores opostos nas dúas ecuacións. Posteriormente, súmanse as ecuacións e resolvemos o sistema.

Actividade resolta

Resolva polo método de redución o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

En primeiro lugar debemos decidir cal é a incógnita que queremos eliminar. Neste caso imos eliminar a incógnita x.

Para facelo temos que ter como coeficientes da x números opostos. Para iso multiplicamos a primeira ecuación por 3 e a segunda por -2 e obtemos:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ -6x + 8y = 10 \end{cases}$$

Agora sumamos as ecuacións e obtemos:

$$11y = 22 \Rightarrow y = \frac{22}{11} = 2.$$

Agora substituímos en calquera das ecuacións orixinais do sistema e calculamos x:

$$2x + 2 = 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

Así, a solución do sistema é $x = 1, y = 2$.

Resolución gráfica dun sistema de ecuacións. Interpretación da solución

Os métodos de substitución, igualación e redución son métodos alxébricos e son os que usamos habitualmente. Pero hai un cuarto xeito para resolver un sistema de ecuacións lineais (ás veces menos preciso): o método gráfico.

Se en cada ecuación do sistema despexamos *y* obteremos dúas funcións lineais. A representación gráfica desas funcións son dúas liñas rectas que se cortarán nun punto. As coordenadas deste punto son os valores de *x* e *y* da solución do sistema, xa que nese punto os valores de *x* e *y* satisfán simultaneamente as dúas ecuacións.

Actividade resolta

Resolva polo método gráfico o seguinte sistema de ecuacións

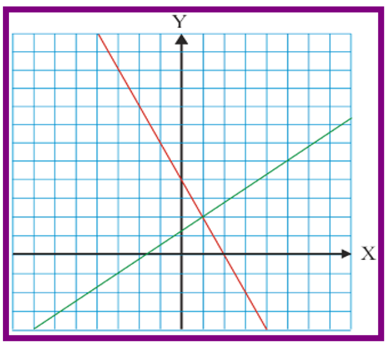
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

En primeiro lugar despexamos y nas dúas ecuacións e obtemos:

$$y = 4 - 2x \text{ e } y = \frac{3x+5}{4}$$

Agora facemos as táboas de valores x, y para as dúas funcións lineais obtidas e representámolas:

$y = 4 - 2x$		$y = \frac{3x+5}{4}$	
x	y	x	y
0	4	-3	-1
1	2	1	2



O punto de corte das rectas é o (1,2), así, a solución do sistema é $x = 1, y = 2$.

Actividades propostas

S35. Resolva os sistemas de ecuacións seguintes polos tres métodos indicados: substitución, igualación e redución.

$\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ x+2y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=6 \\ x-2y=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y=10 \\ 4x+7y=20 \end{cases}$

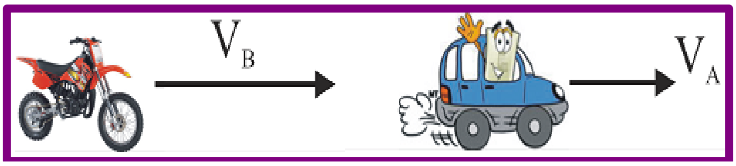
S36. Calcule graficamente a solución dos sistemas:

$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-3y=1 \end{cases}$

2.5.2 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuacións

Actividades resoltas

Actividade 1. Un coche está na posición inicial s_o = 300 m e móvese a 20 m/s. Un motorista está inicialmente na posición 10 m e persegue o coche cunha velocidade de 25 m/s. Onde e cando o alcanza?



Datos do coche (A): s_o = 300, v_a = 20. Datos da moto (B): s_o = 10, v_b = 25.

Aplicamos a ecuación da posición do movemento uniforme ($s = s_o + v.t$) aos dous móbiles:

$s_a = 300 + 20 \cdot t$

$s_b = 10 + 25 \cdot t$

No momento do alcance, os dous móbiles están na mesma posición, polo tanto a condición será $s_a = s_b$. Reunindo todas as ecuacións, temos tres incógnitas (s_a, s_b, t) e tres ecuacións: isto é, un sistema de ecuacións lineais.

$$\begin{cases} s_a = 300 + 20 \cdot t \\ s_b = 10 + 25 \cdot t \\ s_a = s_b \end{cases}$$

Despexamos s_a na terceira ecuación (de feito xa está despexada) e substituímos o seu valor nas outras dúas ecuacións:

$$\begin{cases} s_b = 300 + 20 \cdot t \\ s_b = 10 + 25 \cdot t \end{cases}$$

Igualamos ambas as ecuacións::

$300 + 20t = 10 + 25t \Rightarrow -5t = -290 \Rightarrow x = \frac{-290}{-5} = 58$ segundos

Para o cálculo do espazo: $s_b = 10 + 25 \cdot t \Rightarrow s_b = 10 + 25 \cdot 58 = 1460$ metros.

Actividade 2: Nun exame hai dez preguntas. Por cada unha ben contestada danme dous puntos e por cada pregunta mal contestada quítanme un punto. No exame obtiven un 8. Cantas preguntas fallei?

Preguntas acertadas = x; preguntas falladas = y.
As condicións do problema resúmense nas ecuacións seguintes:
$x + y = 10$ (preguntas)
$2x - y = 8$ (puntos)
Resolvendo o sistema, a solución é: $x = 6, y = 4$. Fallei catro preguntas.

Actividade 3: Calcule dous números sabendo que se diferencian en 14 unidades e que a súa media aritmética é 25.

Sexan x e y os números que nos piden. As condicións do problema son:

Diferenza en 14 unidades: $x - y = 14$

Media aritmética: $\frac{x+y}{2} = 25$

A solución do sistema é $x = 32, y = 18$

Actividade 4: A idade de Antía é o dobre que a de Xiana. Se Antía tivese 12 anos menos e Xiana 8 anos máis, as dúas terían a mesma idade. Cantos anos ten cada unha?

Idade de Antía = x; idade de Xiana = y

Condicións do problema: Idade dobre: $x = 2y$

Outra condición: $x - 12 = y + 8$

A solución do sistema é $x = 40$ anos, $y = 20$ anos

Actividades propostas

S37. Ache dous números que sumen 84 e cuxo cociente sexa 6.

S38. Nun curral con galiñas e coellos; hai 50 cabezas e 134 patas. Cantos coellos e cantas galiñas hai?

S39. Temos dous tipos de pensos, un de 0,50 euros o quilogramo e outro de 0,80 euros o quilogramo. Que cantidade de cada tipo debemos mesturar para termos 100 kg de penso a 0,704 euros cada quilogramo?

S40. Unha persoa percorre 1 000 km, parte en coche e parte en bicicleta. No coche vai a 90 km/h e na bicicleta a 20 km/h. Tardou 15 horas en completar a viaxe. Cantos quilómetros fixo en bicicleta?

S41. Un hotel ten cuartos dobres e individuais, en total son 120 cuartos. O número de camas é 195. Cantos dos cuartos son dobres?

S42. Nunha festa, se cada invitado come cinco pasteis, daquela sobran tres, e se come seis, falta un. Cantos invitados e cantos pasteis hai na festa?

3. Actividades finais

S43. Indique, sen calculalos e razoando a resposta, se os números decimais equivalentes ás seguintes fraccións son decimais exactos ou periódicos.

$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{11}{12}$

S44. Cantas cifras periódicas ten o número decimal equivalente a $\frac{1}{7}$?

S45. Tendo en conta a forma na que se fai unha división obtendo un divisor con cifras decimais, para calcular o número decimal equivalente a unha fracción do tipo $\frac{1}{m}$, (como por exemplo a da actividade anterior):

Cando o número decimal ten que ser periódico?
Por que o número máximo de cifras periódicas ten que ser menor que *m*?

S46. Calcule:

$\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-3}}$	$x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$	$(x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-7}$
$\frac{(-2)^0 \cdot (-2)^{-2}}{2^4 \cdot (-2)^{-3}}$	$\frac{2^7 \cdot 4^{-2}}{8^2 \cdot 2^5}$	$\left(\frac{\left(3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{9}\right)^{-1}}\right)^{-1}$

S47. Calcule:

$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) : \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)\right] - \frac{6}{5}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right)$
$\left(7 : \left(1 - \frac{2}{9}\right) - 5\right) : 4$	$\frac{9}{5} + \frac{6}{7} - 2$
$\frac{7}{12} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)\right]$	$\left(2 - \frac{5}{4}\right) - \left[1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)\right]$
$\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}$
$\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{2} - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)$
$\left(2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{9} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} : 2\right)$
$\left(2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{15}\right) : \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{3} + \frac{-2}{9}\right)$	$\left(\frac{9}{2} - \frac{7}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{-8}{5}\right) + \frac{1}{2}$

S48. Resolva as ecuacións:

$10^{3x-2} = 10\,000$	$10^{5x+8} = 0{,}01$	$10^{3x-7} = 100\,000\,000$

S49. Use a calculadora para facer o produto de $12345678 \cdot 87654321$. Que significa o resultado que aparece na calculadora? É exacto ese resultado? Razoe a resposta.

S50. Efectúe as seguintes operacións deixando o resultado en notación científica.

$0{,}0003 \cdot 32100000$	$0{,}0003 \cdot 32100000 + 456 \cdot 10^7$
$(0{,}0003 \cdot 32100000 + 456 \cdot 10^7) : (876000 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}67 \cdot 10^7)$	

S51. Exprese en forma de raíz:

$2^{-2/3}$	$5^{3/4}$	$7^{-1/2}$
$3^{1/6}$	$7^{6/5}$	$(-5)^{-3/4}$

S52. Simplifique os seguintes radicais:

$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[3]{3375}$	$\sqrt[4]{\dfrac{81x^4y^{20}}{16z^8}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{x^{-2}y^8z^2}{x^4y^{-4}z^5}}$

S53. Exprese estes radicais utilizando o radical máis simple posible:

$\sqrt{12x^3}$	$\sqrt[3]{168}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt{350}$
$\sqrt[4]{243}$	$\sqrt{512}$	$\sqrt[5]{900000}$	$\sqrt[6]{8000000}$

S54. Exprese en forma de raíz dun número:

$3 \cdot \sqrt{7}$	$5 \cdot \sqrt[4]{2}$	$7 \cdot \sqrt{10}$	$3 \cdot \sqrt{13}$
$x \cdot \sqrt[5]{y}$	$2 \cdot \sqrt[3]{6}$	$\dfrac{2}{\sqrt[6]{17}}$	$\dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[4]{2}}$

S55. Calcule:

$\left(2 + 3 \cdot \sqrt{2}\right)^2$	$\sqrt{180} - 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20}$
$7 \cdot \sqrt{50} - 3 \cdot \sqrt{18} + \sqrt{24} - \dfrac{3}{2}\sqrt{8} - \sqrt{6}$	$\sqrt{3} + \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} - \dfrac{5 \cdot \sqrt{3}}{3}$
$\sqrt{\dfrac{a^4b}{c^5}} - \sqrt{\dfrac{4a^2b}{c^3}} + \sqrt{\dfrac{b}{c}}$	$\dfrac{a+1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{9}{a^2 + 2a + 1}}$
$\sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}$	$\dfrac{\sqrt[5]{abc} \cdot \sqrt[10]{a^2b^4}}{\sqrt[15]{a^4b^6c^3}}$

S56. Calcule *x*:

$\sqrt{8}+\sqrt{50}-x=4\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{5}=3\cdot\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$

S57. Racionalice:

$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{5}{\sqrt[4]{5^7}}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$	$\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$
$\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$	$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

S58. Calcule:

$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{8}+\sqrt[4]{64}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1-2\sqrt{3}}-8\sqrt{12}$
$\sqrt{18}-3\sqrt{8}+3\sqrt{50}+\sqrt{27}+\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt[4]{4}+\sqrt{8}-\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{64}+\sqrt{\frac{9}{2}}$

S59. Dados os polinomios $P(x)=5x^4-7x^3+5x-1$, $Q(x)=4x^3-3x^2+3x+6$, $R(x)=2x^4-5x^3-6x^2+2x+3$, $S(x)=x^2+x+1$ e $T(x)=2x-3$; calcule:

$P(x)+Q(x)\cdot T(x)$	$(P(x)+R(x))\cdot T(x)$	$3P(x)-2S(x)T(x)$
$R(x):S(x)$	$(2P(x)+Q(x)):S(x)$	$P(x):(S(x)-T(x))$

S60. Calcule:

$(2+x)^4$	$(1-x)^4$	$(2-x)^5$
$(\sqrt{3}+1)^7$	$(\sqrt{5}-x)^5$	$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$

S61. Calcule:

$(2+x)^2$	$(1-x)^2$	$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$
$(\sqrt{3}+1)^2$	$(\sqrt{5}-2)^2$	$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

S62. Resolva as ecuacións:

$x^2-6x+7=-2$	$21x^2+100=-5$
$x^2-3x+2=0$	$x\cdot(2x-1)+\frac{3}{5}=\frac{3x^2-x}{5}+\frac{1}{5}$
$2x^2-6x=6x^2-8x$	$2x-\frac{6x^2-2x+1}{6}+\frac{2x^2-3x}{2}=-1$

S63. Para embaldosar un salón de 8 m de lonxitude por 6 m de largura utilizáronse 300 baldosas cadradas. Canto mide o lado das baldosas?

S64. A diagonal dun rectángulo mide 10 cm. Calcule as súas dimensións se un lado mide 2 cm menos ca o outro.

S65. Dentro de 12 anos a idade de Pedro será a metade do cadrado da idade que tiña hai 12 anos. Cal é a idade actual de Pedro?

S66. Resolva os sistemas de ecuacións.

$\begin{cases} 2x-5y-9=0 \\ 7x+4y-10=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} -x+11y=12 \\ x-3y=-6 \end{cases}$
$\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x-y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-(y+1)=3 \\ y+(x+3)=4 \end{cases}$	$\begin{cases} 10(x-2)+y=1 \\ x+3(x-y)=5 \end{cases}$

S67. Resolva graficamente os sistemas:

$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-8=2y \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=5 \\ 2y+8=x \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-2 \\ x-2y-4=0 \end{cases}$

S68. A suma de dous números é o dobre que a súa diferenza e un deles é triplo do outro. Calcule o valor deses números.

S69. Berta paga, por dous cafés negros e tres con leite, 3,45 euros; Edelmiro paga 0,30 euros menos por catro negros e un con leite. Canto vale cada tipo de café?

S70. Un deportista é dez veces máis rápido correndo que nadando. Nunha proba percorre 4.410 m correndo durante 10 minutos e nadando durante 5 minutos. Con que velocidades corre e nada o deportista?

4. Solucionario

4.1 Solucións das actividades propostas

S1.

Fracción	Expresión decimal	Tipo de decimal
$\frac{3}{4}$	*0,75*	*Decimal exacto*
$\frac{11}{3}$	*3,6666666..* $= 3,\hat{6}...$	*Periódico puro*
$\frac{11}{15}$	*0,73333333...* $= 0{,}7\hat{3}$	*Periódico mixto*
$\frac{3}{25}$	*0,12*	*Decimal exacto*
$\frac{121}{6}$	*20,1666666...*$= 20{,}1\hat{6}$	*Periódico mixto*
$\frac{17}{330}$	*0,05151515...* $= 0{,}0\widehat{51}$	*Periódico mixto*
$\frac{500}{9}$	*55,55555555...* $= 55,\hat{5}$	*Periódico puro*
$\frac{73}{2}$	*36,5*	*Decimal exacto*

S2.

$0{,}25\hat{1} = \frac{226}{900} = \frac{113}{450}$	$3,\widehat{35} = \frac{332}{99}$	$1,\hat{9} = \frac{18}{9} = \frac{2}{1}$
$12{,}28 = \frac{1228}{100} = \frac{307}{25}$	$7{,}25 = \frac{725}{100} = \frac{29}{4}$	$2 = \frac{2}{1}$
$8,\hat{8} = \frac{80}{9}$	$1,\hat{1} = \frac{10}{9}$	$7{,}222\hat{1} = \frac{64999}{9000}$
$13{,}3 = \frac{133}{10}$	$3{,}8\widehat{21} = \frac{3783}{990} = \frac{1261}{330}$	$0,\widehat{4321} = \frac{4321}{9999}$
$-7{,}00\widehat{541} = \frac{-699841}{99900}$	$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	$-0{,}72\widehat{12} = \frac{-7140}{9900} = \frac{-119}{165}$

S3. *Só hai que calcular a fracción xeratriz de* $1,\hat{9}$. *Así,* $1,\hat{9} = \frac{2}{1} = 2$

S4. *Só hai que calcular a fracción xeratriz de* $1{,}3\hat{9}$. *Así,* $1{,}3\hat{9} = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

S5.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\frac{81}{16}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{16}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=64$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\frac{8}{27}$	$(3)^{-2}=\frac{1}{9}$
$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{2}=\frac{9}{4}$	$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}=\frac{16}{81}$	$\left(\left(\frac{10}{6}\right)^{-1}\right)^{-2}=\frac{100}{36}=\frac{25}{9}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2}=\frac{25}{9}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}:\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}=\frac{2}{5}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{2}=\frac{4}{9}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{4}:\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}=1$	$((2^{-1})^{3})^{2}:\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)^{3}=3^{-6}=\frac{1}{729}$

S6.

$\frac{2^4}{9^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\frac{2^4\cdot 3^6}{18^2\cdot 3^2}=2^2$	$\frac{3x^5y^{-3}z^7}{3^{-1}\cdot(x^2y)^2\cdot(yz)^{-7}\cdot x}=(3yz^7)^2$
$9\cdot x^{-6}\cdot(x^2y)^2=\left(\frac{3y}{x}\right)^2$	$\frac{x^2y^3}{x^{-8}y^8}=\left(\frac{x^2}{y}\right)^5$	$\left(\left(\frac{1}{x^{-1}}\right)^{-2}\right)^{-3}=x^6$

S7.

$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{23}{30}$	$\frac{7}{9}-\frac{1}{6}:\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$
$\frac{3}{5}:6+\frac{5}{6}:4=\frac{37}{120}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3:\frac{1}{9}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$	$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{4}{9}\right)=\frac{85}{378}$

S8.

$10^{-4}=$ *0,000 1*	$10^{11}=$ *100 000 000 000*	$8\cdot 10^{5}=$ *800 000*
$9\cdot 10^{-2}=$ *0,09*	$10^{0}=$ *1*	$10^{-3}=$ *0,001*

S9.

$370\,000\,000\,000\,000\,000=3{,}7\cdot 10^{17}$
$-0{,}000\,056=-5.6\cdot 10^{-5}$
$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,807=8{,}07\cdot 10^{-22}$
$0{,}000\,000\,000\,000\,947=9{,}47\cdot 10^{-13}$
$-294\,300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000=-2{,}943\cdot 10^{32}$
$1\,000\,000\,000=1\cdot 10^{9}$

S10.

$-2{,}75 \cdot 10^4 = -27\,500$	$8{,}08 \cdot 10^{-7} = 0{,}000\,000\,808$
$-9{,}98 \cdot 10^8 = -998\,000\,000$	$-3{,}2 \cdot 10^{-4} = -0{,}000\,32$
$1{,}08 \cdot 10^6 = 1\,080\,000$	$1{,}623 \cdot 10^{-20} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,016\,23$

S11.

$2 \cdot 10^5 + 5{,}76 \cdot 10^7 - 5{,}4 \cdot 10^6 = 5{,}24 \cdot 10^7$	$(2{,}34 \cdot 10^{24}) : (1{,}4 \cdot 10^{20}) = 1{,}671428 \cdot 10^4$
$(4{,}5 \cdot 10^9) \cdot (6{,}5 \cdot 10^3) = 2{,}925 \cdot 10^{13}$	$(1{,}2 \cdot 10^7)^2 = 1{,}44 \cdot 10^{14}$

S12.

$\sqrt{125} = 5^{3/2}$	$\sqrt[3]{25} = 5^{2/3}$	$\dfrac{1}{\sqrt[5]{25}} = 5^{-2/5}$	$\sqrt{5} = 5^{1/2}$

S13.

$\sqrt{a^{12}} = a^6$	$\sqrt[3]{8a^3b^6} = 2ab^2$	$(25x^8)^{1/2} = 5x^4$	$\sqrt{\dfrac{9a^2}{64b^8c^2}} = \dfrac{3a}{8b^4c}$

S14.

$\sqrt{125} = 5 \cdot \sqrt{5}$	$\sqrt{128} = 8 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2}$
$\sqrt[3]{864} = 6 \cdot \sqrt[3]{4}$	$\sqrt[4]{48} = 2 \cdot \sqrt[4]{3}$	$\sqrt[5]{486} = 3 \cdot \sqrt[5]{2}$	$\sqrt[3]{1080} = 6 \cdot \sqrt[3]{5}$

S15.

$12 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{288}$	$2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$	$5 \cdot \sqrt{8} = \sqrt{200}$	$7 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{245}$
$2 \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{224}$	$5 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{250}$	$10 \cdot \sqrt[6]{17} = \sqrt[6]{17000000}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{\dfrac{32}{81}}$

S16.

$\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81} = 4 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{3}$	$5 \cdot \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{x} = 10 \cdot \sqrt{x}$
$\sqrt{18} + \sqrt{50} + 1 - \sqrt{2} - \sqrt{8} + 3 = 5 \cdot \sqrt{2} + 4$	$\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8} = 5 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2}$
$2 \cdot \sqrt{8} + 4 \cdot \sqrt{72} - 7 \cdot \sqrt{18} = 7 \cdot \sqrt{2}$	$3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{8} - \sqrt{32} - \sqrt{50} = 2 \cdot \sqrt{2}$
$\sqrt[5]{\dfrac{a^2b^2}{c^2}} \div \sqrt{\dfrac{ab}{c}} = \sqrt[10]{\dfrac{c}{ab}}$	$\sqrt[5]{x} \div \sqrt[3]{x} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}}$
$\sqrt{ab} \div \sqrt[3]{ab} = \sqrt[6]{ab}$	$\sqrt[4]{a^3b^5c} \div \sqrt{ab^3c^3} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}}$

S17.

$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=\frac{-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$	$\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{9\sqrt{7}-9\sqrt{5}}{2}$
$\frac{6}{\sqrt[4]{5}}=\frac{6\sqrt[4]{125}}{5}$	$\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$	$\frac{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{14}+5\sqrt{21}}{14}$	$\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3-x}$

S18.

$P(0)=-2$	$P(1)=0$
$P(-1)=-8$	$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-7}{8}$
$P\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-140}{27}$	$P(\sqrt{2})=5\sqrt{2}-6$
$P(-\sqrt{3})=-6\sqrt{3}-8$	$P(3\sqrt{2})=63\sqrt{2}-38$

S19. $\mathbf{3x^4+7x^3-5x^2-x-4}$

S20.

$P(x)-R(x)=3x^4-2x^3+6x^2+3x-4$	$P(x)-Q(x)=5x^4-11x^3+3x^2+2x-7$
$2P(x)-3R(x)=4x^4+x^3+18x^2+4x-11$	
$2Q(x)-4R(x)=-8x^4+28x^3+18x^2-2x$	

S21.

$(2x^3-x^2-3)\cdot(2x^2+4x-3)=4x^5+6x^4-10x^3-3x^2-12x+9$
$(3x-5)\cdot(x-3)-2\cdot(x^2-x)=x^2-12x+15$

S22.

$(6x^4-11x^3-3x^2-5):(2x^2-5x+3)$ *Cociente:* $3x^2+2x-1$. *Resto:* $-11x-2$
$(2x^5-20x):(2x+2)$ *Cociente:* $x^4-x^3+x^2-x-9$. *Resto: 18*
$(x^4-5x^2+4):(x^2-4)$ *Cociente:* x^2-1. *Resto:* 0
$(x^4-2x^3+15x-4):(x-1)$ *Cociente:* x^3-x^2-x+14. *Resto:* 10

S23.

$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$
$(1+2x)^5=1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5$
$(1-2x)^3=1-6x+12x^2-8x^3$
$\left(1+\sqrt{2}\right)^4=17+12\sqrt{2}$
$\left(1+2\sqrt{3}\right)^3=37+30\sqrt{3}$
$\left(2\sqrt{2}-1\right)^4=113-72\sqrt{2}$

S24.

$(3a+2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$	$(2x-y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$
$(x+6)\cdot(x-6) = x^2 - 36$	$\left(2\sqrt{2}+3\right)^2 = 17 + 12\sqrt{2}$
$\left(2-3\sqrt{2}\right)^2 = 22 - 12\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right) = -73$

S25.

$x^2 - 5x + 6 = 0$	Solucións: $x = 3, x = 2$
$2x^2 - 12x + 10 = 0$	Solucións: $x = 5, x = 1$
$4x^2 + 4x - 3 = 0$	Solucións: $x = \frac{1}{2}, x = \frac{-3}{2}$
$x^2 + 9x - 10 = 0$	Solucións: $x = 1, x = -10$

S26.

$3x^2 - 6x + 3 = 0$. Ten unha solución.	$x^2 + x - 3 = 0$. Ten dúas solucións.
$x^2 + x + 3 = 0$. Non ten solución.	$-x^2 - 2x - 3 = 0$. Non ten solución.

S27.

$3x^2 - 27 = 0 \;\; x = 3, x = -3$	$-2x^2 + 50x = 0 \;\; x = 0, \;\; x = 25$
$13x^2 + 52x = 0 \;\; x = 0, x = -4$	$x^2 + x = 0 \;\; x = 0, x = -1$
$\frac{3}{2}x^2 + 15 = 0$. Non ten solución.	$\frac{1}{3}x^2 - \frac{25}{3} = 0 \;\; x = 5, x = -5$
$x^2 - \frac{9}{4} = 0 \;\; x = \frac{3}{2}, x = \frac{-3}{2}$	

S28.

$x^2 + (10-x)^2 = 50 \Rightarrow x = 5$

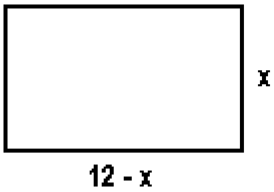
S29.

$3x + x^2 = 88 \Rightarrow x = 8, \;\; x = -11$

S30.

$x^2 - 3x = 9x$ A solución é 12 anos.

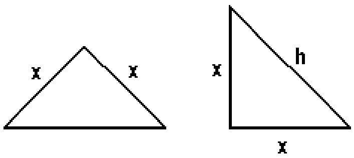
S31.



$\mathrm{x} \cdot (12 - \mathrm{x}) = 35$

As dimensións do rectángulo son 5 cm por 7 cm.

S32.



$\frac{x \cdot x}{2} = 12 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 4{,}9$

Polo teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{24 + 24} = \sqrt{48} = 6{,}9$

Así, o perímetro é de 4,9 + 4,9 + 6,9 = 16,7 metros.

S33.

$x \cdot (x + 30) = 7000 \Rightarrow$As dimensións son 70 metros por 100 metros.

S34.

$x \cdot (x - 7) = 60$ Os números son 12 e 5 ou ben -12 e -5

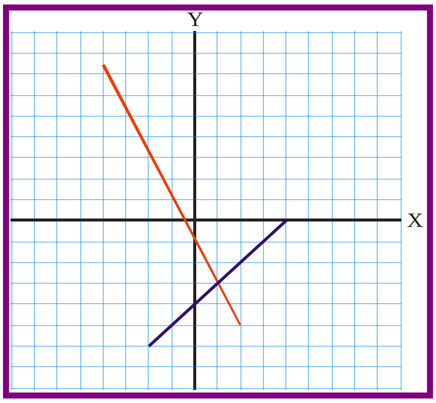
S35.

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ $x = 3, y = 2$	$\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ $x = 1, y = 3$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$ $x = 8, y = 6$	$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x + 7y = 20 \end{cases}$ $x = 5, y = 0$

S36.

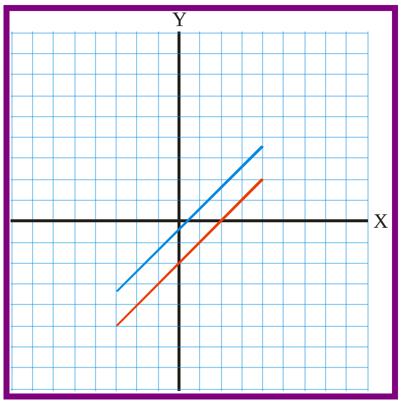
$\begin{cases} 2\mathrm{x} + \mathrm{y} + 1 = 0 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} = 4 \end{cases}$

$\mathrm{x} = 1, \mathrm{y} = -3$



$\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} = 2 \\ 3\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = 1 \end{cases}$

Non ten solución.



S37.

Sexan x e y os números a determinar. Se a súa suma é 84 podemos escribir: x + y = 84

Que o seu cociente sexa 6 significa que $\frac{x}{y} = 6$. Os números pedidos son x = 72 e y = 12

S38.

Sexa *x* o número de galiñas e *y* o número de coellos.

$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 4y = 134 \end{cases}$ O número de galiñas é x = 33 e o número de coellos y = 17

S39.

Sexa x a cantidade de penso de 0,50 €/kg que debemos mesturar e y a cantidade de penso de 0,80 €/kg.

Deberemos mesturar 32 kg de penso de 0,50 €/kg e 68 kg de penso de 0,80 €/kg.

S40.

Sexa x a parte do traxecto que percorreu en bicicleta e y a parte que percorreu en coche. Das condicións do problema deducimos a ecuación: x + y = 1000

Doutra parte, podemos escribir a ecuación: $\frac{x}{20} + \frac{y}{90} = 15$. Polo tanto, percorreu 100 km en bicicleta e 900 en coche.

S41.

Sexa x o número de cuartos dobres e y o número de cuartos individuais.

$\begin{cases} x + y = 120 \\ 2x + y = 195 \end{cases}$ O número de cuartos dobres é x = 75 e o de cuartos individuais y = 45.

S42.

Sexa x o número de invitados e y o número de pasteis. Obtemos as ecuacións:

5x = y – 3

6x = y + 1

O número de invitados será x = 4 e o número de pasteis y = 23.

4.2 Solucións das actividades finais

S43. *Son exactos cando o denominador pode ser descomposto en potencias de 2 e/ou de 5, xa que cando un número decimal exacto é pasado a fracción o seu denominador é unha potencia de 10.*

$\frac{11}{6}$	Periódico	$\frac{11}{16}$	Exacto	$\frac{11}{7}$	Periódico	$\frac{11}{13}$	Periódico
$\frac{11}{8}$	Exacto	$\frac{11}{9}$	Periódico	$\frac{11}{12}$	Periódico		

S44. *Seis cifras, pois* $\frac{1}{7} = 0{,}182457182457182457\ ...$

S45.

Porque 7 non se descompón en potencias de 2 e/ou de 5.
Porque ao dividir entre un número *m* só hai $m-1$ restos diferentes.

S46.

$\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{x^{-3}} = x$	$x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$(x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-7} = x^6 \cdot x^7 = x^{13}$
$\frac{(-2)^0 \cdot (-2)^{-2}}{2^4 \cdot (-2)^{-3}} = -2^{-3}$	$\frac{2^7 \cdot 4^{-2}}{8^2 \cdot 2^5} = -\frac{1}{2^8} = 2^{-8}$	$\left(\frac{\left(3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{9}\right)^{-1}}\right)^{-1} = 6$

S47.

$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) : \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)\right] - \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right) = \frac{-3}{64}$
$\left(7 : \left(1 - \frac{2}{9}\right) - 5\right) : 4 = 1$	$\frac{9}{5} + \frac{6}{7} - 2 = \frac{23}{35}$
$\frac{7}{12} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{-1}{2}$	$\left(2 - \frac{5}{4}\right) - \left[1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)\right] = \frac{-1}{24}$
$\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3} = \frac{25}{21}$
$\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{3}\right) = \frac{43}{12}$	$\frac{5}{2} - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) = \frac{23}{12}$
$\left(2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right) = \frac{47}{20}$	$\left(\frac{4}{9} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} : 2\right) = \frac{29}{18}$
$\left(2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{15}\right) : \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{3} + \frac{-2}{9}\right) = \frac{69}{77}$	$\left(\frac{9}{2} - \frac{7}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{-8}{5}\right) + \frac{1}{2} = \frac{25}{3}$

S48.

$10^{3x-2} = 10\,000 \quad x = 2$	$10^{5x+8} = 0{,}01 \quad x = -2$	$10^{3x-7} = 100\,000\,000 \quad x = 5$

S49. *O resultado exacto é* 1082152022374638. *Pero na pantalla dunha calculadora normal non collen todas as cifras, polo que aparece como resultado* $1{,}082152022 \cdot 10^{15}$*, que é unha aproximación do resultado exacto.*

S50.

$0{,}0003 \cdot 32100000 = 9{,}63 \cdot 10^3$	$0{,}0003 \cdot 32100000 + 456 \cdot 10^7 = 4{,}56000963 \cdot 10^9$
$(0{,}0003 \cdot 32100000 + 456 \cdot 10^7) : (876000 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}67 \cdot 10^7) = 1{,}1146666048 \cdot 10^{-2}$	

S51.

$2^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$5^{3/4} = \sqrt[4]{125}$	$7^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$
$3^{1/6} = \sqrt[6]{3}$	$7^{6/5} = \sqrt[6]{7^5}$	$(-5)^{-3/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{-125}}$

S52.

$\sqrt[5]{32} = 2$	$\sqrt[3]{3375} = 15$	$\sqrt[4]{\dfrac{81x^4y^{20}}{16z^8}} = \dfrac{3xy^5}{2z^2}$	$\sqrt[3]{\dfrac{x^{-2}y^8z^2}{x^4y^{-4}z^5}} = \dfrac{y^4}{x^2z}$

S53.

$\sqrt{12x^3} = 2x \cdot \sqrt{3x}$	$\sqrt[3]{168} = 2 \cdot \sqrt[3]{21}$	$\sqrt{98} = 7 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{350} = 5 \cdot \sqrt{14}$
$\sqrt[4]{243} = 3 \cdot \sqrt[4]{3}$	$\sqrt{512} = 16 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt[5]{900000} = 10 \cdot \sqrt[5]{9}$	$\sqrt[6]{8000000} = 10 \cdot \sqrt{2}$

S54.

$3 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{63}$	$5 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1250}$	$7 \cdot \sqrt{10} = \sqrt{490}$	$3 \cdot \sqrt{13} = \sqrt{117}$
$x \cdot \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^5y}$	$2 \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48}$	$\dfrac{2}{\sqrt[6]{17}} = \sqrt[6]{\dfrac{64}{17}}$	$\dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{8}{81}}$

S55.

$\left(2 + 3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 22 + 12\sqrt{2}$	$\sqrt{180} - 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20} = 6 \cdot \sqrt{5}$
$7 \cdot \sqrt{50} - 3 \cdot \sqrt{18} + \sqrt{24} - \dfrac{3}{2}\sqrt{8} - \sqrt{6} = 23 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{6}$	$\sqrt{3} + \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} - \dfrac{5 \cdot \sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$
$\sqrt{\dfrac{a^4b}{c^5}} - \sqrt{\dfrac{4a^2b}{c^3}} + \sqrt{\dfrac{b}{c}} = \left(\dfrac{a-c}{c}\right)^2 \sqrt{\dfrac{b}{c}}$	$\dfrac{a+1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{9}{a^2 + 2a + 1}} = 1$
$\sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a \cdot \sqrt[6]{a}$	$\dfrac{\sqrt[5]{abc} \cdot \sqrt[10]{a^2b^4}}{\sqrt[15]{a^4b^6c^3}} = \sqrt[15]{a^2b^3}$

S56.

$\sqrt{8}+\sqrt{50}-x=4\cdot\sqrt{2}$ $x=3\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{5}=3\cdot\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$ $x=8$

S57.

$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[3]{x}$	$\frac{5}{\sqrt[4]{5^7}}=\frac{\sqrt[4]{5}}{5}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}=-7-5\sqrt{2}$
$\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{x}$	$\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{3}+6}{4}$	$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x+y)\sqrt{x}-(x+y)\sqrt{y}}{x-y}$

S58.

$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{8}+\sqrt[4]{64}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1-2\sqrt{3}}-8\sqrt{12}=\frac{-1}{11}-\frac{512}{33}\sqrt{3}$
$\sqrt{18}-3\sqrt{8}+3\sqrt{50}+\sqrt{27}+\sqrt{\frac{4}{3}}=12\sqrt{2}+\frac{11}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt[4]{4}+\sqrt{8}-\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{64}+\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{11}{2}\sqrt{2}$

S59.

$P(x)+Q(x)\cdot T(x)=13x^4-25x^3+15x^2+8x-19$
$(P(x)+R(x))\cdot T(x)=14x^5-45x^4+24x^3+32x^2-17x-6$
$3P(x)-2S(x)T(x)=15x^4-25x^3+2x^2+17x+3$
$R(x):S(x)$ Cociente: $2x^2-7x-1$. Resto: $10x+4$
$(2P(x)+Q(x)):S(x)$ Cociente: $10x^2-20x+7$. Resto: $26x-3$
$P(x):(S(x)-T(x))$ Cociente: $5x^2-2x-22$. Resto: $-9x+87$

S60.

$(2+x)^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$
$(1-x)^4=1-4x+6x^2-4x^3+x^4$
$(2-x)^5=32-80x+80x^2-40x^3+10x^4-x^5$
$\left(\sqrt{3}+1\right)^7=568+328\sqrt{3}$
$\left(\sqrt{5}-x\right)^5=25\sqrt{5}-125x+50\sqrt{5}\cdot x^2-50x^3+5\sqrt{5}\cdot x^4-x^5$
$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$

S61.

$(2+x)^2 = 4+4x+x^2$	$(1-x)^2 = 1-2x+x^2$	$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = 2$
$(\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3}$	$(\sqrt{5}-2)^2 = 9-4\sqrt{5}$	$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}) = 6$

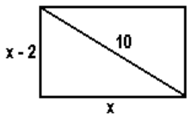
S62.

$x^2-6x+7=-2$ A solución é única: x = 3
$21x^2+100=-5$ A ecuación neste caso tampouco ten solución, xa que non é posible calcular $\sqrt{-5}$.
$x^2-3x+2=0$ Solución: x = 2, x = 1
$x\cdot(2x-1)+\frac{3}{5}=\frac{3x^2-x}{5}+\frac{1}{5}$ A ecuación non ten solución, xa que $\sqrt{-40}$ non é un número real.
$2x^2-6x=6x^2-8x$ Solución: x = 0, x = 1/2
$2x-\frac{6x^2-2x+1}{6}+\frac{2x^2-3x}{2}=-1$ Solución: x = –1

S63.

Sexa x o lado das baldosas cadradas. Precísanse 300 baldosas cadradas de 0,4 m de lado.

S64.



Longo: x = 8 cm ; Largura: x – 2 = 8 – 2 = 6 cm.

S65.

Sexa *x* a idade actual de Pedro. A súa idade hai 12 anos era (x – 12) e dentro de 12 anos será (x + 12).
Solución: 20 anos.

S66.

$\begin{cases} 2x-5y-9=0 \\ 7x+4y-10=0 \end{cases}$ Solución $x=2, y=-1$	$\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ Solución $x=3,\ y=4$
$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y=-3 \end{cases}$ *Solución*: $x=\frac{7}{5},\ y=-\frac{3}{5}$	$\begin{cases} x-(y+1)=3 \\ y+(x+3)=4 \end{cases}$ Solución: $x=\frac{5}{2},\ y=-\frac{3}{2}$
$\begin{cases} -x+11y=12 \\ x-3y=-6 \end{cases}$ Solución $x=-\frac{15}{4},\ y=\frac{3}{4}$	$\begin{cases} 10(x-2)+y=1 \\ x+3(x-y)=5 \end{cases}$ Solución: x = 2, y = 1

S67.

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 8 = 2y \end{cases}$	As rectas córtanse no punto (2, -1), polo que a solución do sistema é x = 2, y = -1.
$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2y + 8 = x \end{cases}$	As rectas córtanse no punto (2, -3), polo que a solución do sistema é x = 2, y = -3.
$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$	As rectas córtanse no punto (-2, -3). A solución do sistema é x = -2, y = -3.
$\begin{cases} y = -2 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$	As rectas córtanse no punto (0, -2), polo que a solución do sistema é x = 0, y = -2.

S68.

Sexan x e y os números a determinar.

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 2(x - y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y \\ x + y = 2x - 2y \end{cases} \Rightarrow 3y + y = 2 \cdot 3y - 2y \Rightarrow 4y = 6y - 2y \Rightarrow 4y = 4y$$

Esta ecuación cúmprese para calquera valor de y. Xa que logo, trátase dun sistema indeterminado con infinitas solucións, no que as dúas ecuacións son equivalentes e que se cumpre para calquera par de números que verifiquen unha das condicións, por exemplo, que un número sexa o tripo do outro: 1 e 3, 2 e 6, 3 e 9 etc.

S69.

Sexa *x* o prezo dun café negro e *y* o prezo dun café con leite. O prezo dun café negro é x = 0,60 € e o dun café con leite y = 0,75 €.

S70.

Sexa x a velocidade á que nada e 10x a velocidade á que corre.
A velocidade nadando é de 42 m/minuto e correndo 10·42 = 420 m/minuto.

5. Glosario

C	▪ Coeficiente principal	Coeficiente do monomio de maior grao dun polinomio.
	▪ Coeficientes dun polinomio	Cada un dos números que, en cada monomio do polinomio, multiplica a parte literal.
E	▪ Ecuación de 2º grao completa	Ecuación de segundo grao con todos os seus coeficientes distintos de cero.
	▪ Ecuación de 2º grao incompleta	Ecuación de segundo grao na que algún coeficiente, que non sexa o de segundo grao, vale cero.
	▪ Ecuación lineal	Ecuación de primeiro grao.
F	▪ Fracción xeratriz	Fracción que representa un número decimal dado.
G	▪ Grao dun polinomio	Grao do monomio de maior grao que forma parte do polinomio e ten coeficiente distinto de cero.
M	▪ Mantisa	Na notación científica, parte que vai diante da potencia de dez.
	▪ Monomios semellantes	Monomios que teñen a mesma parte literal.
N	▪ Número decimal exacto	Número decimal que ten un número finito (que se acaba) de cifras decimais.
	▪ Número decimal periódico	Número decimal cun número infinito de cifras decimais, das que todas ou algunhas se repiten indefinidamente.
	▪ Número periódico mixto	Número periódico con parte decimal periódica e non periódica.
	▪ Número periódico puro	Número periódico que non ten cifras non periódicas na parte decimal.
	▪ Números irracionais	Números que non poden ser representados por fraccións.
P	▪ Polinomio	Suma e/ou resta de monomios.
R	▪ Racionalización	Procedemento para eliminar as expresións radicais dos denominadores.
	▪ Radicais semellantes	Radicais que, unha vez reducidos, teñen o mesmo índice e o mesmo radicando.
T	▪ Termo independente	Termo de grao cero dun polinomio.
V	▪ Valor numérico dun polinomio	Número obtido cando substituímos a variable dun polinomio por un número e efectuamos as operacións correspondentes.

6. Bibliografía e recursos

Bibliografía

- *Libros para a educación secundaria a distancia de adultos. Ámbito tecnolóxico-matemático.* Consellería de Educación e Ordenación Universitaria.
- *Matemáticas ESO 1.* Ed Anaya, 2016.
- *Matemáticas ESO 2.* Ed Anaya, 2016.
- *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas ESO 3.* Ed. Anaya 2016.
- *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas ESO 3.* Ed. Anaya 2016.
- *Matemáticas enseñanzas académicas ESO 3.* Ed. Santillana.
- *Matemáticas enseñanzas aplicadas ESO 3.* Ed. Santillana.

Ligazóns de Internet

Nestas ligazóns atopará trucos e información que pode consultar para mellorar a súa práctica.

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_segundo_grado/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Radicales/indice.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Potencias/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/notacion/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones2grado/inicio.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Potencias_mac/indice.htm
- https://www.youtube.com/user/juanmemol/videos
- http://aulamatematica.com/
- http://matematicasies.com/?-Ecuaciones,6-
- http://matematicasies.com/-Numeros-Reales-
- http://matematicasies.com/-Polinomios,65-
- http://matematicasies.com/-Radicales-
- http://matematicasies.com/-Polinomios,62-