XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para personas adultas

Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 3

Unidad didáctica 3

Funciones

Índice

1. Introducción

1.1 Descripción de la unidad didáctica

En esta unidad veremos cómo analizar y describir las gráficas que representan los fenómenos de la vida cotidiana y de otros ámbitos del conocimiento.

Estudiaremos también las funciones lineales y las de segundo grado aprendiendo a representarlas, a calcular sus elementos principales y a identificar algunas de sus características antes de representarlas. Es decir, antes de representarlas ya vamos a tener una idea aproximada de cómo va a ser la gráfica de la función.

1.2 Conocimientos previos

Para trabajar con esta unidad es necesario recordar los conceptos sobre funciones estudiados en los módulos anteriores, en especial:

- Las coordenadas cartesianas (ver unidad 3 del módulo 1).
- Concepto y formas de representación de una función (ver unidad 3 del módulo 1).
- Las características y elementos principales de las funciones (ver unidad 3 del módulo 2).
- Las ecuaciones lineales y las de segundo grado (ver unidad 2 del módulo 3).
- Los sistemas de ecuaciones lineales (ver unidad 2 del módulo 3).

1.3 Criterios de evaluación

- Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.
- Reconocer las situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones lineales y cuadráticas, calculando sus parámetros y sus características.

2. Secuencia de contenidos y actividades

2.1 Relaciones entre magnitudes

Como norma general, son muchos los fenómenos en los que intervienen varias magnitudes que están relacionadas entre ellas. A veces son sólo dos las magnitudes que intervienen, como por ejemplo, cuando vamos a la compra para comprar manzanas. El precio que paguemos por ellas dependerá de lo que pesen. Otras veces intervienen más de dos magnitudes como pasa, por ejemplo, en el recibo de la luz en el que lo que pagamos depende del consumo y de la potencia contratada entre otros factores. Nosotros nos vamos a centrar en los casos en los que intervienen únicamente dos magnitudes. Como ya sabemos de cursos anteriores, la relación entre dos magnitudes la podemos expresar a través de fórmulas, de tablas o de gráficas. Lo vamos a recordar a través de un ejemplo.

Actividad resuelta

El tendero de mi barrio vende las manzanas a 1,25 € el kg. Exprese en forma de tabla, fórmula y gráfica esta relación.

TABLA

Como lo que vamos a pagar dependerá del peso de las manzanas, haremos una tabla en la que le daremos los valores que queramos al peso de las manzanas y calcularemos su precio.

El peso de las manzanas lo representaremos por x y el precio por y.

x = peso en kg	y = precio en €
1	1,25
2	2,50
3	3,75
4	5
5	6,25
6	7,50
7	8,75

FÓRMULA

Como cada kg de manzanas cuesta 1,25 €, el total que tenemos que pagar lo calculamos multiplicando los kg que compramos por el precio de cada kg.

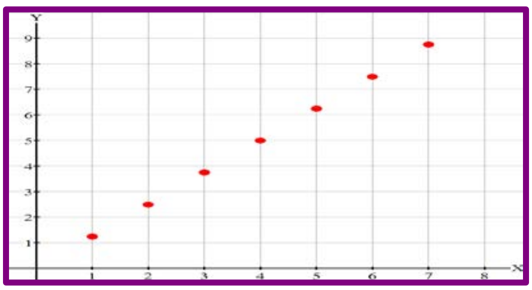
Por lo tanto tenemos que:

Precio = 1,25 · nº de kg comprados

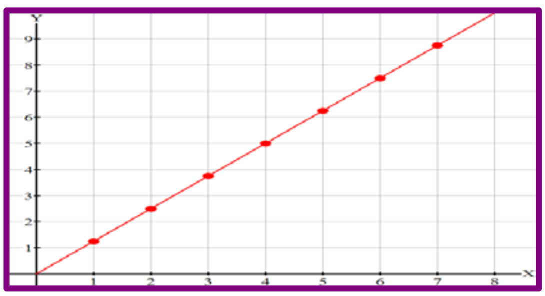
Recuerde que el peso de las manzanas lo representamos por *x* y el precio por *y*. Así la expresión obtenida es:

$$y = 1{,}25 \cdot x$$

GRÁFICA



Que si los unimos tenemos la gráfica que representa esta relación.



2.2 Las funciones

2.2.1 Concepto de función

Una **función** es una relación entre varias magnitudes que cumple una serie de características. Como ya indicamos anteriormente, nos vamos a centrar en esta unidad en las relaciones entre dos magnitudes.

Así, una función es una relación entre dos magnitudes en la que a cada valor de una magnitud se le asocia un único valor de la otra.

Un ejemplo es el de la actividad resuelta del apartado anterior. Como las manzanas cuestan a 1,25 € el kg, a cada peso de las manzanas le corresponde un único precio en €.

La magnitud que se fija previamente, que en nuestro ejemplo es el peso de las manzanas, se denomina **variable independiente**, y la magnitud que se calcula a partir de la anterior, que en nuestro ejemplo es el precio que tenemos que pagar, se llama **variable dependiente**.

La variable independiente se representa habitualmente por la letra **x** y la variable dependiente se representa por la letra **y**. La variable dependiente también se puede representar por *f(x).*

A la hora de representar gráficamente una función, los valores de la variable independiente **(x)** se representan en el eje horizontal, también llamado **eje de abscisas**. Los valores de la variable dependiente (**y**) se representan en el eje vertical, llamado **eje de ordenadas**.

Los puntos marcados en las gráficas de la actividad resuelta del apartado anterior (puntos y líneas de color rojo) son los que cumplen que el valor de **y** (precio en €) es igual al valor de **x** (peso en kg) multiplicado por 1,25.

Por lo tanto la gráfica de una función está formada por los puntos del plano cuyas coordenadas cumplen la relación indicada por la función. En nuestro ejemplo, los puntos en rojo son los que tienen la segunda coordenada igual a la primera multiplicada por 1,25.

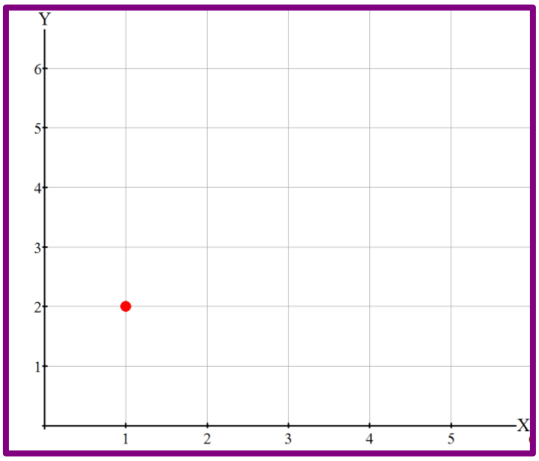
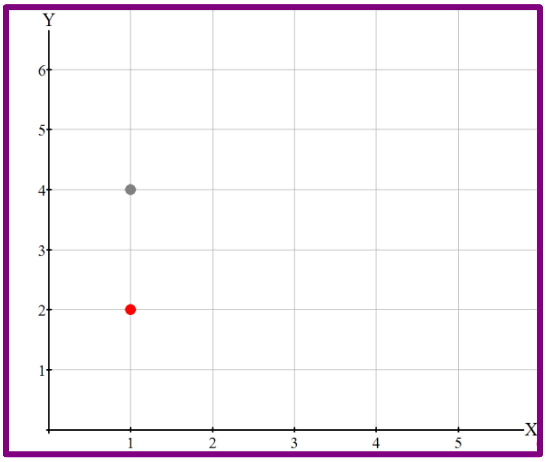
Una vez que tenemos explicada la idea de función y su relación con la representación gráfica, vamos a ver la definición matemática de lo que es una función.

Una **función** es una relación entre dos variables en la que para cada valor de la variable independiente **(x**) le corresponde un único valor de la variable dependiente (**y**).

A cada función le corresponde su representación gráfica que nos ayuda a conocer el comportamiento de la función: donde corta a los ejes, donde crece, donde decrece...

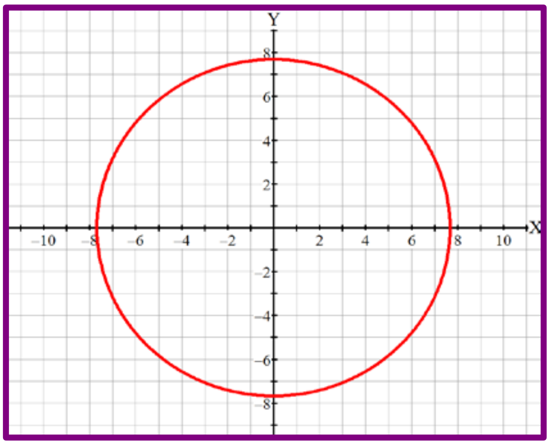
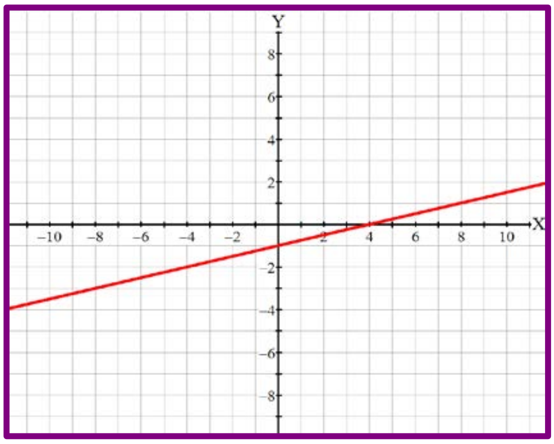
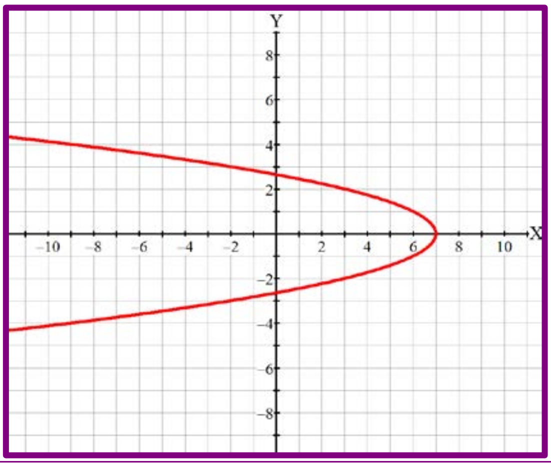
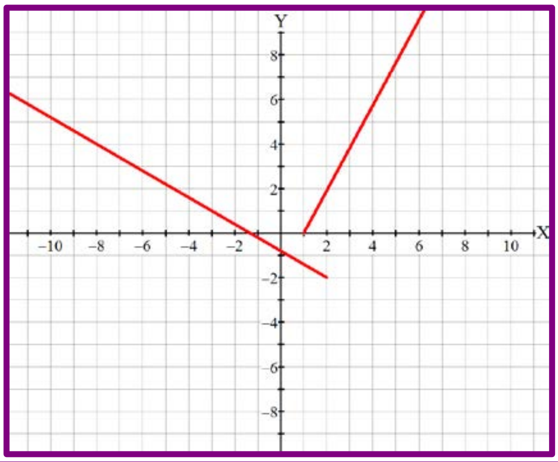
Ya que la gráfica de una función nos ayuda a conocer su comportamiento, ¿cómo podemos diferenciar cuando una línea dibujada en un eje representa o no una función?

En una función, para cada valor de **x** le corresponde un único valor de **y**. Es decir, si la x = 1 le corresponde el valor y = 2, no le puede corresponder otro valor diferente. Por lo tanto, si la gráfica de una función pasa por el punto (1,2) no puede pasar por otro punto diferente con la primera coordenada 1. Si así fuera, al valor de x = 1 le corresponderían dos valores diferentes.

Si a *x* = 1 le corresponde sólo el valor *y* = 2, tenemos la siguiente representación gráfica.	Si a *x* = 1 le corresponden os valores *y* = 2 y *y* = 4, tenemos la siguiente representación gráfica.
	
Por lo tanto, si estamos en una función no puede pasar lo que aparece en el dibujo de la derecha. Es decir, la gráfica de una función no puede pasar dos veces por la misma "vertical".	

Actividad resuelta

Indique cuales de las siguientes gráficas representan una función y cuales no.

	
No es la gráfica de una función ya que, por ejemplo, a la x=2 le corresponden dos valores, uno positivo y otro negativo.	Es la gráfica de una función.
	
No es la gráfica de una función pues a todos los valores de x menores que 7 les corresponden dos valores de y.	No es la gráfica de una función pues a todos los valores de x entre 1 y 2 les corresponden dos valores de y.

Al único valor de la variable **y** que le corresponde a un valor determinado de **x**, x=a, se le llama **imagen** de **a**. Se representa por $f(a)$.

Actividad resuelta

El tendero de mi barrio vende las manzanas a 1,25 € el kg. Ya hemos visto que la expresión que le corresponde a esta situación es $y = 1{,}25 \cdot x$, si es **x** el peso de las manzanas en kg e **y** su precio en €. Calcule la imagen de 2 mediante esta función.

La imagen de x=2 es el valor que le corresponde mediante la función por lo que tenemos que sustituir en la expresión x por el número 2 y hacer las operaciones correspondientes.

$$f(2) = 1{,}25 \cdot 2 = 2{,}5$$

Por lo tanto la imagen de 2 es 2,5 que expresamos $f(2) = 2{,}5$.

A veces tenemos un valor de la variable dependiente y queremos saber cuál es el valor de la variable independiente que le corresponde. Piense en el ejemplo de las manzanas que cuestan a 1,25 € el kg. Imagine que lleva 4 € y que quiere comprar 4 € de manzanas. ¿Cuántos kg de manzanas puede comprar?

Como la expresión que relaciona el peso en kg de las manzanas con el precio en € es:

$$y = 1{,}25 \cdot x$$

Y sabemos que ***y*** = 4 ya que tenemos 4 €, para calcular ***x*** lo que debemos hacer es resolver la ecuación:

$$4 = 1{,}25 \cdot x$$

Por lo tanto:

$$4 = 1{,}25 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4}{1{,}25} = 3{,}2 \text{ kg}$$

Así sabemos que con 4 € podemos comprar 3,2 kg de manzanas.

Lo que hicimos aquí fue a calcular el original de 4 mediante la función $y = 1{,}25 \cdot x$.

Se llama **original** de un valor ***b*** de la variable ***y*** al valor de la variable ***x*** que tiene como imagen el valor ***b***. Es decir, si la función se llama ***f***, es decir $y = f(x)$, es la solución de la ecuación $f(x) = b$.

Actividad resuelta

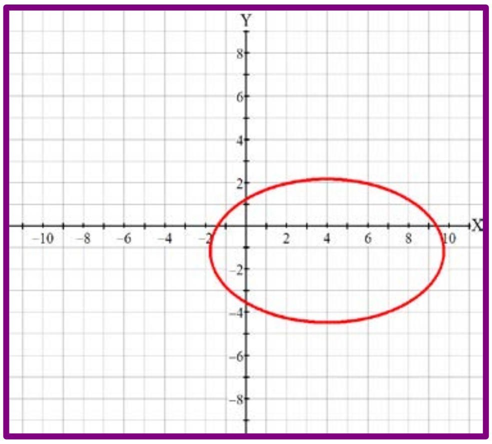
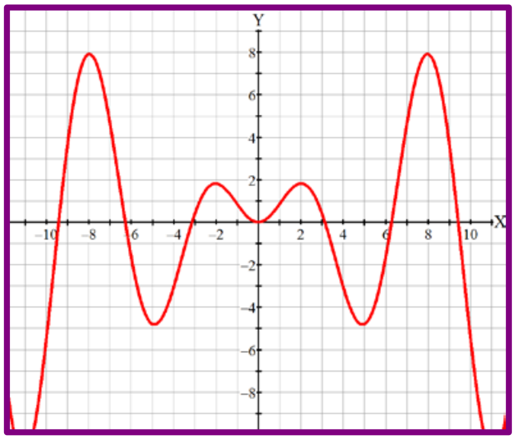
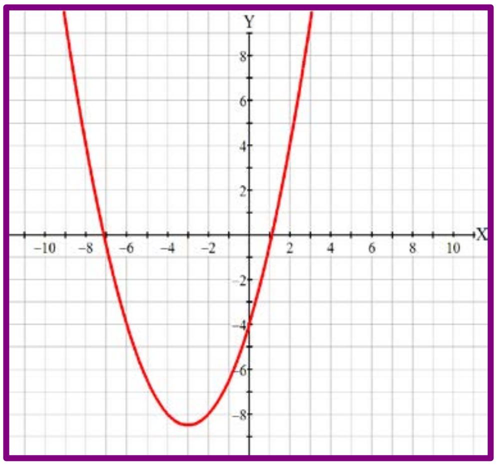
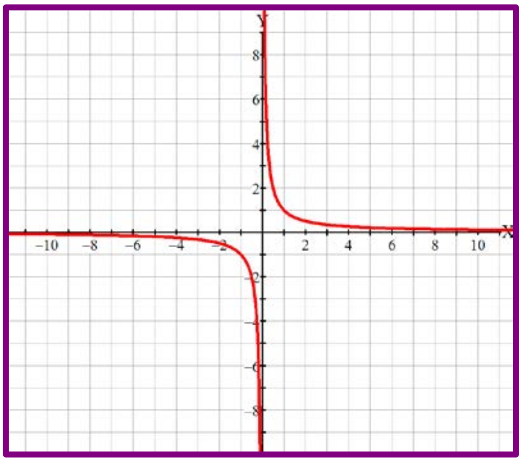
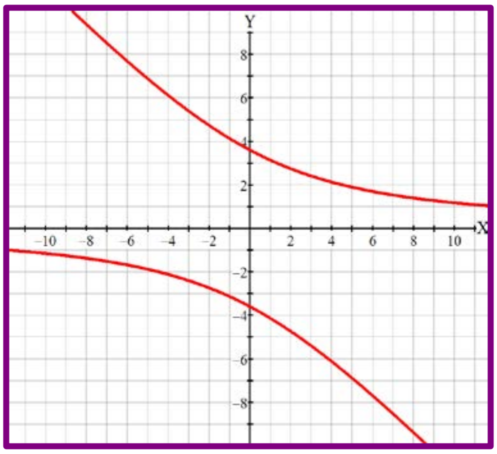
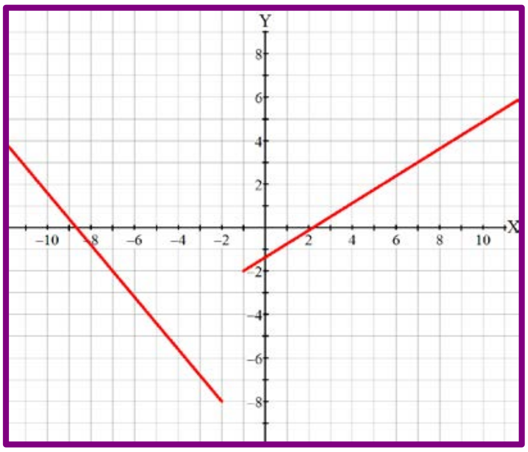
La función que relaciona el tiempo transcurrido en horas (x) con la distancia recorrida en km (y) es $y = 75 \cdot x$. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 525 km?

Lo que tenemos que calcular es el original de 525 mediante la función $y = 75 \cdot x$ por lo que tenemos:

$$525 = 75 \cdot x \Rightarrow x = \frac{525}{75} = 7 \text{ horas}$$

Actividades propuestas

S1. Indique cuales de las siguientes gráficas representan funciones.

S2. Calcule la imagen de $x = 1$ mediante las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$	$f(x) = x^2 + 8x + 21$	$f(x) = 7x - 3$

S3. Calcule el original de $y = -6$ mediante las funciones:

$f(x) = 7x + 8$	$f(x) = x^2 + 5x$	$f(x) = 3x^2 - 10x - 3$

2.2.2 Representación de funciones

Si una función viene dada por una fórmula, para representarla gráficamente procederemos de la siguiente forma:

1. Damos valores a la variable ***x*** y obtenemos para cada uno de los valores dados su imagen**.** Es decir, obtenemos una tabla de valores.
2. Representamos esos pares de valores en los ejes de coordenadas.
3. Por último, se unen los puntos obtenidos.

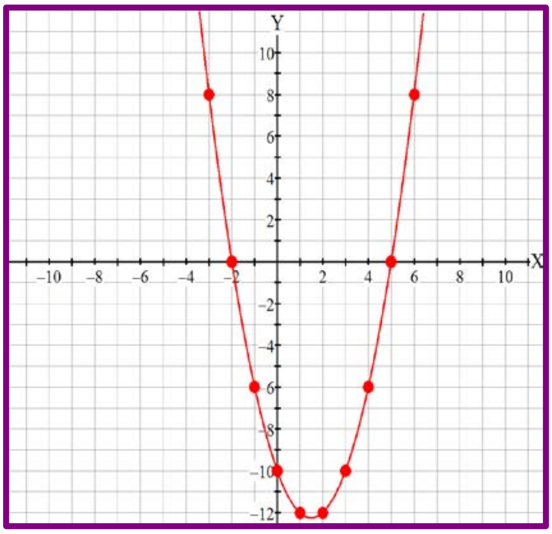
Actividad resuelta

Represente gráficamente la función $f(x) = x^2 - 3x - 10$.

Construimos la tabla.

x	$y = x^2 - 3x - 10$
-3	$(-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 10 = 9 + 9 - 10 = 8$
-2	$(-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$
-1	$(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 10 = 1 + 3 - 10 = -6$
0	$0^2 - 3 \cdot 0 - 10 = 0 - 0 - 10 = -10$
1	$1^2 - 3 \cdot 1 - 10 = 1 - 3 - 10 = -12$
2	$2^2 - 3 \cdot 2 - 10 = 4 - 6 - 10 = -12$
3	$3^2 - 3 \cdot 3 - 10 = 9 - 9 - 10 = -10$
4	$4^2 - 3 \cdot 4 - 10 = 16 - 12 - 10 = -6$
5	$5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$
6	$6^2 - 3 \cdot 6 - 10 = 36 - 18 - 10 = 8$

Marcamos los puntos en la gráfica y los unimos. Obtenemos la gráfica siguiente.



Actividades propuestas

S4. Represente gráficamente las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$	$f(x) = \dfrac{x+2}{2}$
$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$	$f(x) = -3x + 2$	$f(x) = -x^2 + 8x - 7$

2.3 Estudio gráfico de funciones

Para conocer mejor una función, se puede realizar el estudio de su gráfica. En este estudio vamos a analizar una serie de características de la función. Estas características se ven de forma muy clara en su representación gráfica y son las siguientes:

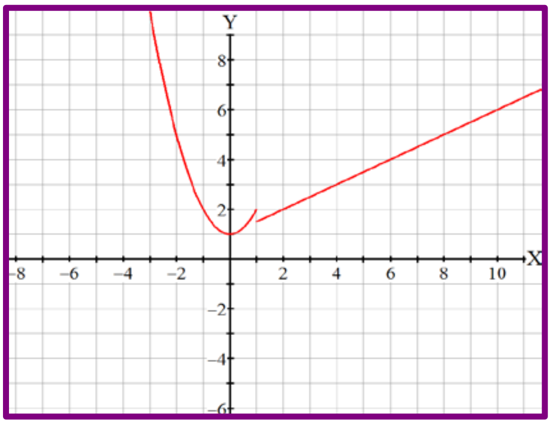
- Continuidad
- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Puntos de corte con los ejes

2.3.1 Continuidad de una función

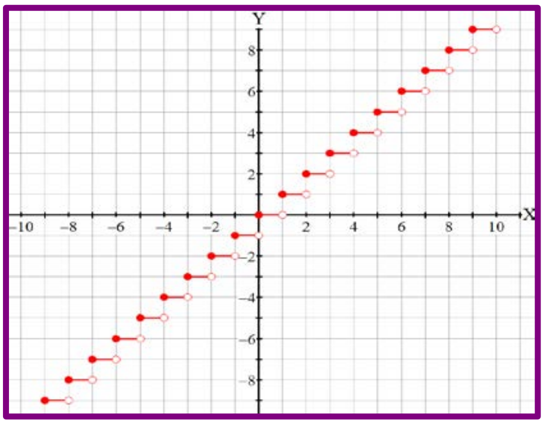
Una función se denomina continua entre dos valores del eje de abscisas cuando su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Los puntos donde no es continua la función se llaman puntos de discontinuidad.

Actividad resuelta

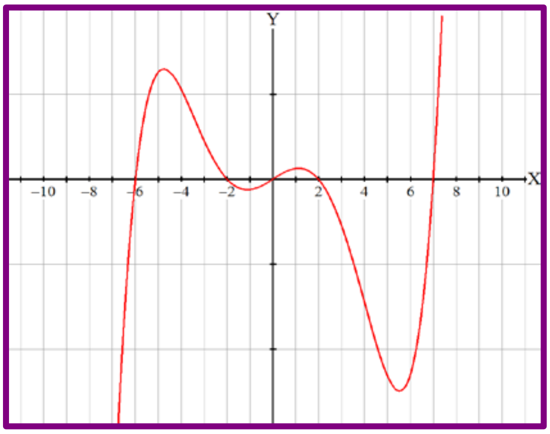
Estudie la continuidad de las siguientes funciones:



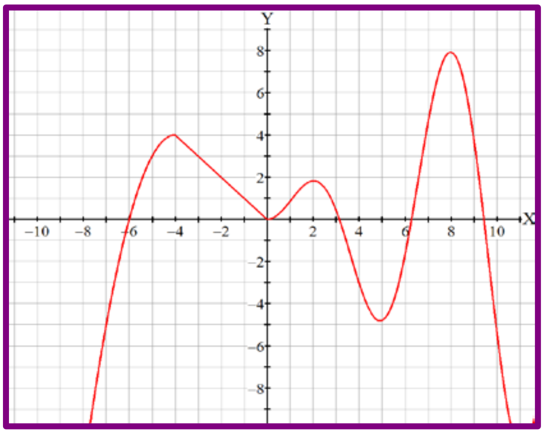
Esta función es continua para cualquier valor de x excepto para x = 1. Es decir, esta función es discontinua para x = 1.



Esta función es continua para cualquier valor de x excepto para los números enteros en los que es discontinua.



Esta función es continua para cualquier valor de x.



Esta función es continua para cualquier valor de x.

2.3.2 Crecimiento y decrecimiento

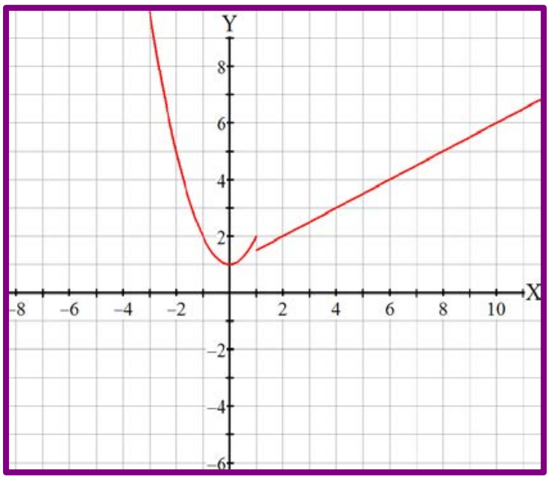
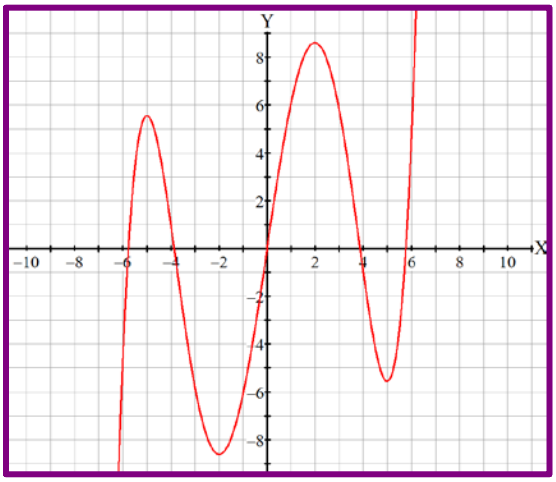
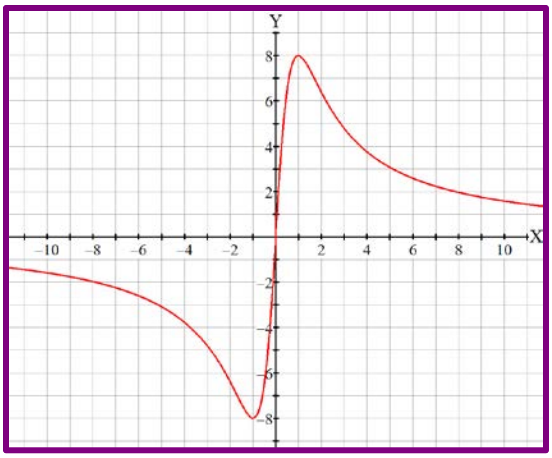
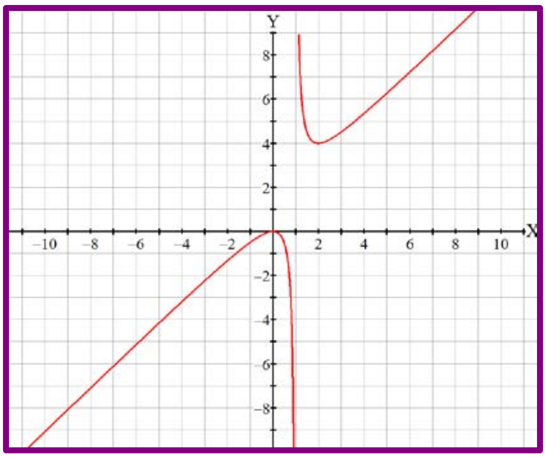
Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar valor de la variable x, aumenta el valor de la variable y. Es decir, una función es creciente cuando al recorrer su gráfica de izquierda la derecha la función va hacia arriba.

Una función es **decreciente** en un intervalo cuando, al aumentar el valor de la variable x, disminuye el valor de la variable y. Es decir, una función es decreciente cuando al recorrer su gráfica de izquierda a derecha la función va hacia abajo.

Una función es **constante** en un intervalo cuando mantiene el mismo valor en todo el intervalo.

Actividad resuelta

Estudie el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones:

	
Esta función es decreciente hasta x = 0 y es creciente de x = 0 en adelante.	Esta función es creciente hasta $x = -5$, de $x = -2$ a $x = 2$ y de $x = 5$ en adelante. Es decreciente de $x = -5$ a $x = -2$ y de $x = 2$ a $x = 5$.
	
Esta función es decreciente hasta $x = -1$ y de $x = 1$ en adelante. Es creciente entre $x = -1$ y $x = 1$.	Esta función es creciente hasta $x = 0$ y de $x = 2$ en adelante. Es decreciente de $x = 0$ a $x = 1$ y de $x = 1$ a $x = 2$.

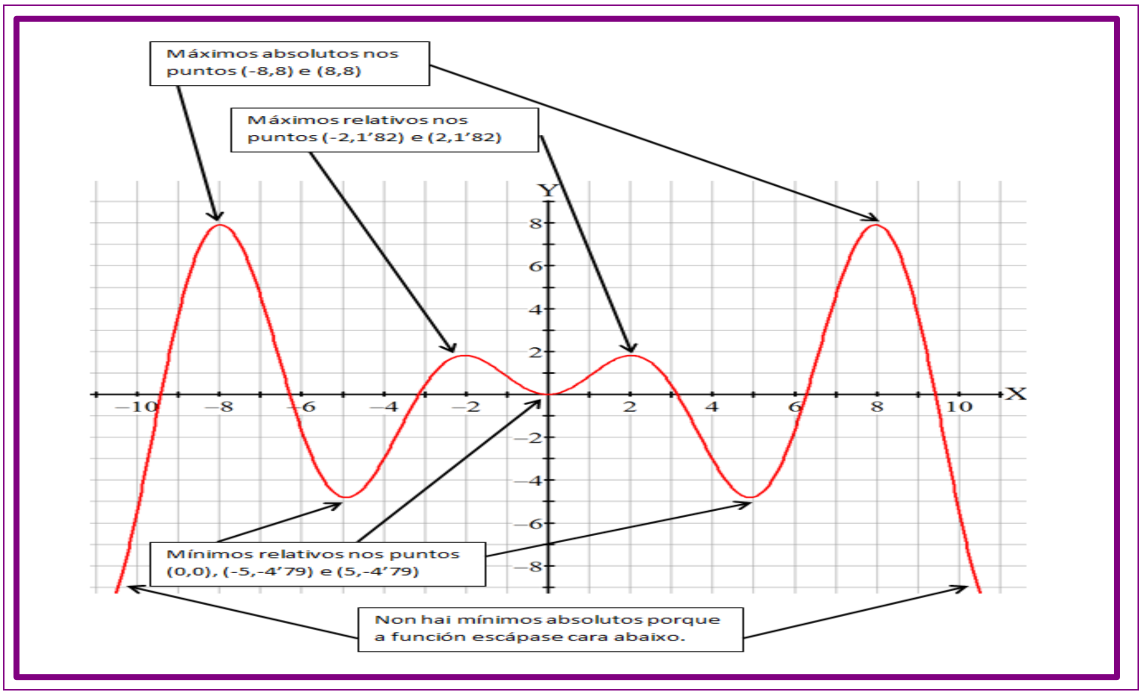
2.3.3 Máximos y mínimos

Se llama **máximo absoluto** de una función al punto en el que la ordenada toma el mayor valor. Es decir, al punto que en la gráfica está más alto.

Se llama **mínimo absoluto** de una función al punto en el que la ordenada toma el menor valor. Es decir, al punto que en la gráfica está más bajo.

Se llama **máximo relativo** de una función a los puntos en los que su ordenada es mayor que la de todos los puntos de su alrededor, tanto a su izquierda como a su derecha.

Se llama **mínimo relativo** de una función a los puntos en los que su ordenada es menor que la de todos los puntos de su alrededor, tanto a su izquierda como a su derecha.



2.3.4 Puntos de corte con los ejes

Una función sólo puede cortar el eje Y o de ordenadas una única vez ya que por la definición de función cada valor de la variable **x** debe tener una única imagen.

Todos los puntos del eje de ordenadas tienen como primera coordenada cero por lo que, como el punto de corte también tiene que estar en la función, el punto de corte de la función con el eje de ordenadas tendrá por coordenadas $(0, f(0))$.

En cambio, como puede ver en la gráfica anterior, una función puede cortar el eje de abscisas (X) muchas veces. Los puntos del eje de abscisas tienen como segunda coordenada cero por lo que los puntos de corte de la función con el eje de abscisas tendrán que verificar que su imagen sea cero.

Así los puntos de corte de una función con el eje de abscisas son de la forma (a,0) donde **a** es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Actividad resuelta

Calcule los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$:

Para calcular o punto de corte con el eje Y, calculamos $f(0)$:

$$f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 0 + 0 + 6 = 6$$

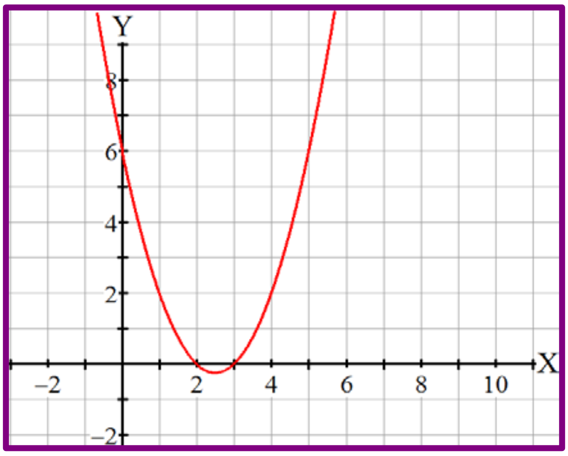
Por lo tanto, la función $f(x)$ corta el eje de ordenadas en el punto (0,6).

Para calcular donde corta la función $f(x)$ el eje de abscisas (X), tenemos que resolver la ecuación $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

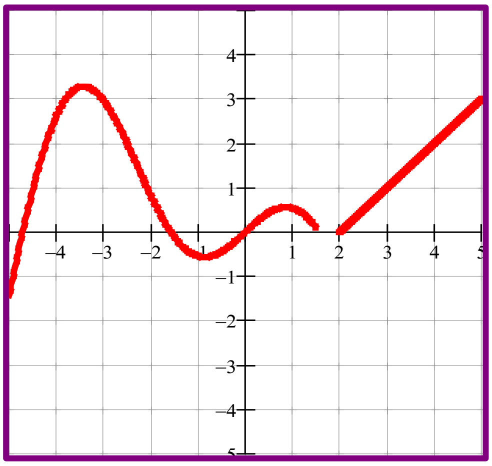
Por lo tanto la función $f(x)$ corta el eje de abscisas en los puntos (3,0) y (2,0).

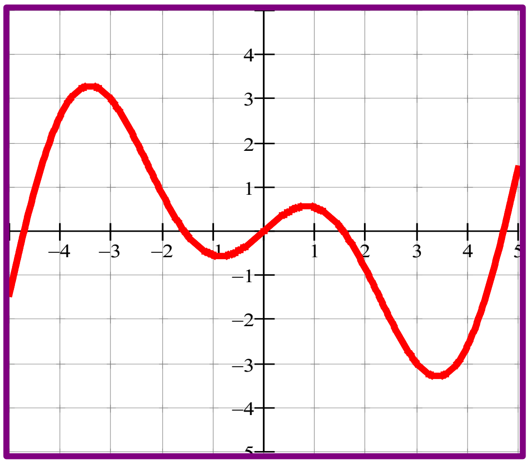
Puede comprobarlo en la gráfica de la función que tiene a continuación:



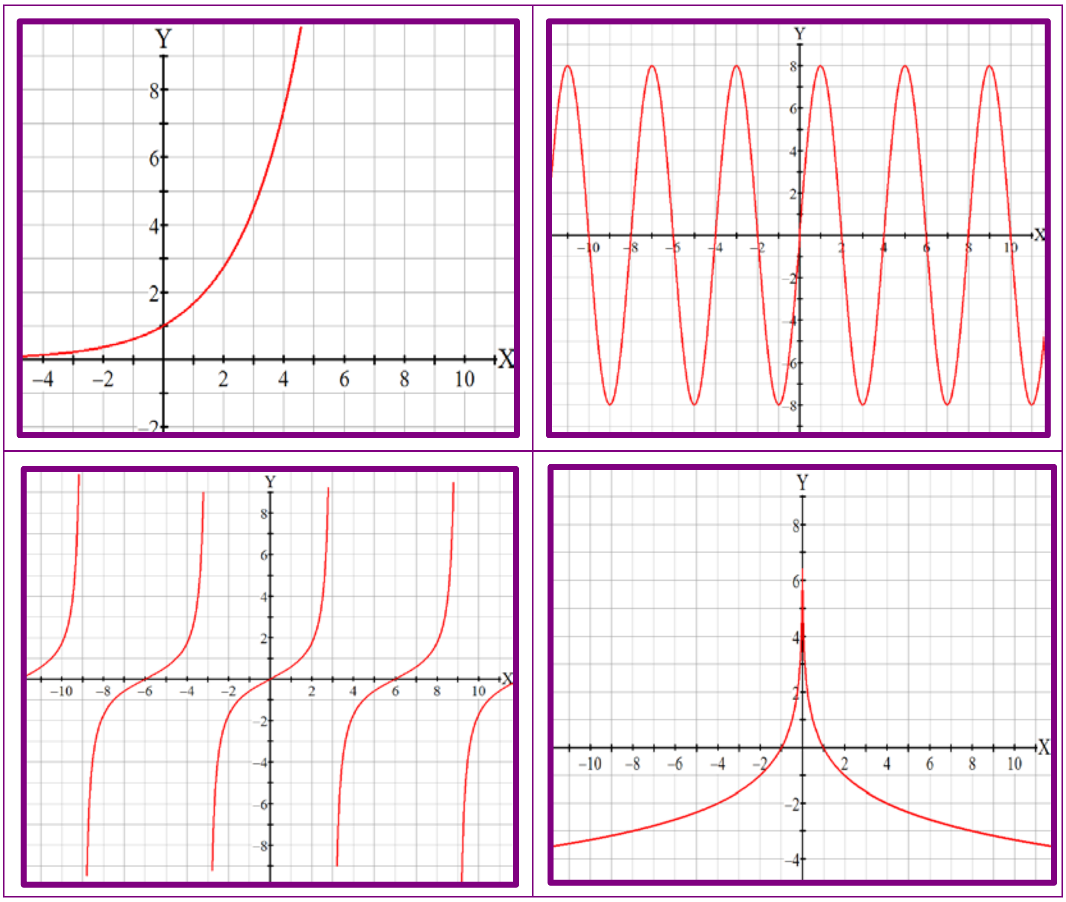
Actividades propuestas

S5. Indique donde son continuas y donde discontinuas las siguientes funciones:





S6. Indique donde son crecientes y donde decrecientes las siguientes funciones:



S7. Indique los máximos y mínimos, tanto relativos como absolutos, que presentan las funciones de la actividad ejercicio anterior.

S8. Indique los puntos de corte con los ejes de las funciones de la actividad 6.

S9. Calcule los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

.$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$f(x) = \dfrac{x+2}{2}$
$f(x) = -3x + 2$	$f(x) = -x^2 + 8x - 7$

2.4 Funciones lineales y afines

2.4.1 Concepto de función lineal. Principales elementos y características. Representación gráfica

A función **lineal**, o función de proporcionalidad directa; tiene estas características:

- Se expresa de forma $y = m \cdot x$.
- Su gráfica es una línea recta.

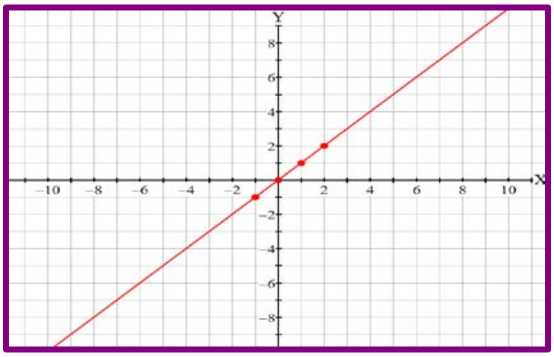
Al número ***m*** se le llama **pendiente** de la función lineal o pendiente de la recta y, como su nombre indica, mide la inclinación de la recta.

Actividades resueltas

Represente gráficamente la siguiente función lineal e indique cuál es su pendiente. Indique también si la pendiente es positiva o negativa y si la función es creciente o decreciente:

$$y = x$$

x	$y=x$
-1	-1
0	0
1	1
2	2

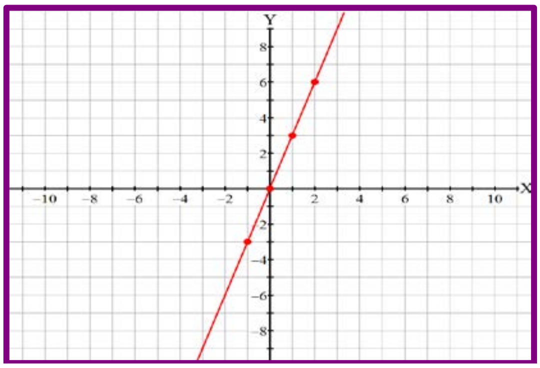


La pendiente es positiva y es $m = 1$. La función es creciente siempre.

Represente gráficamente la siguiente función lineal e indique cual es su pendiente. Indique también si la pendiente es positiva o negativa y si la función es creciente o decreciente:

$$y = 3x$$

x	$y=3x$
-1	-3
0	0
1	3
2	6

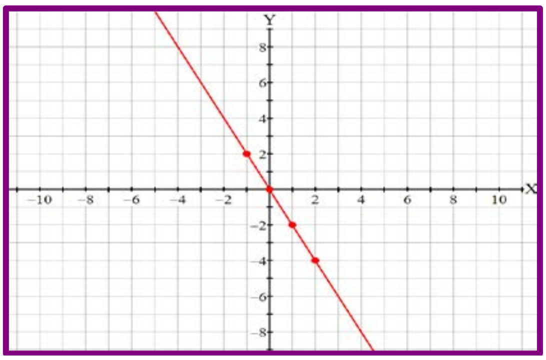


La pendiente es positiva y es $m = 3$. La función es creciente siempre.

Represente gráficamente la siguiente función lineal e indique cual es su pendiente. Indique también si la pendiente es positiva o negativa y si la función es creciente o decreciente:

$$y = -2x$$

x	$y=-2x$
-1	2
0	0
1	-2
2	-4

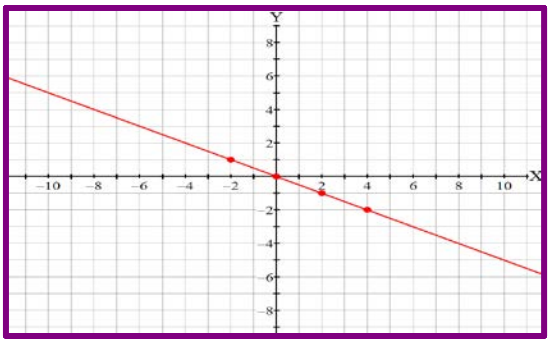


La pendiente es negativa y es $m = -2$. La función es decreciente siempre.

Represente gráficamente la siguiente función lineal e indique cual es su pendiente. Indique también si la pendiente es positiva o negativa y si la función es creciente o decreciente:

$$y = \frac{-1}{2}x$$

x	$y = \frac{-1}{2}x$
-2	1
0	0
2	-1
4	-2



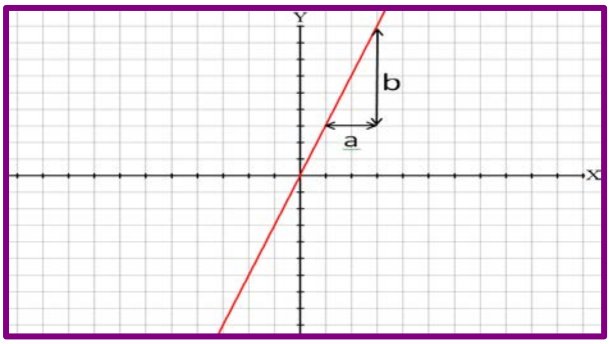
La pendiente es negativa y es $m = \frac{-1}{2}$. La función es decreciente siempre.

La **pendiente** m de una recta $y = mx$ es la medida de su crecimiento:

- Si m es positiva, la recta es creciente.
- Si m es negativa, la recta es decreciente.
- Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

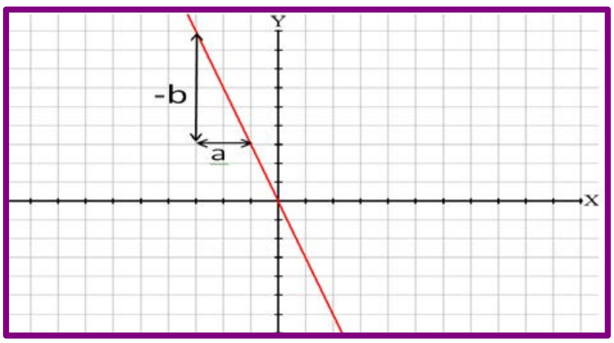
La pendiente de una recta indica su inclinación, teniendo en cuenta su situación con respecto al eje X y al eje Y. Veamos como:

La recta $y = \frac{b}{a}x$, "b" indica la situación en el eje Y y "a" en el eje X.



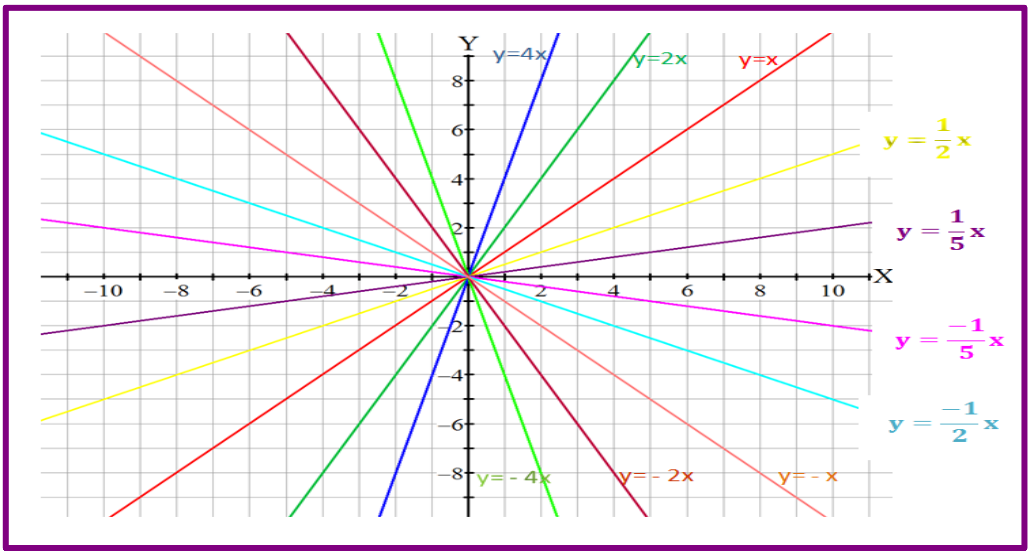
Por cada "a" unidades que avanza en el eje X, sube "b" unidades en el eje Y.

Si la pendiente es negativa, $y = \frac{-b}{a}x$, la situación es la siguiente:



Por cada "a" unidades que avanza en el eje X, baja "b" unidades en el eje Y.

Aquí están representadas varias funciones lineales. Es necesario señalar que todas ellas pasan por el punto (0,0) y también por el punto (1,***m***) siendo ***m*** la pendiente de la recta.



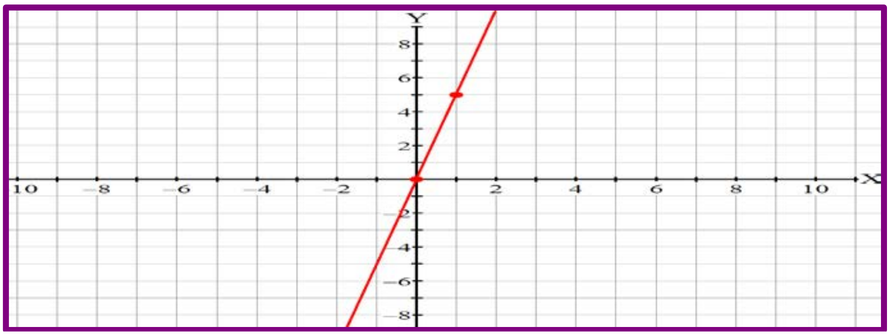
Como la representación gráfica es una recta, cuando nos dan la expresión de la función, si queremos dibujar la gráfica, basta con calcular dos puntos.

Actividad resuelta

Represente gráficamente la función lineal $y = 5x$.

x	$y=5x$
0	0
1	5

Su representación gráfica es:



Actividades propuestas

S10. ¿Cuáles de las siguientes funciones son lineales?

$y = 7x$	$y = -4x + 8$	$y = \frac{-2}{3}x$	$y = \frac{7}{2}x$

S11. Indique si son crecientes o decrecientes las siguientes funciones:

$y = 7x$	$y = -4x$	$y = \frac{-2}{3}x$	$y = \frac{7}{2}x$

S12. Represente las funciones:

$y = 3x$	$y = -5x$	$y = \frac{-3}{4}x$	$y = \frac{5}{2}x$

S13. En una función de proporcionalidad directa cuando ***x*** vale 3, ***y*** vale 12. Escriba la expresión algébrica de la función, calcule la pendiente e indique si es creciente o decreciente.

2.4.2 Concepto de función afín. Principales elementos y características. Representación gráfica

La función **afín** tiene las siguientes características:

- Se expresa de forma $y = m \cdot x + n$ con $n \neq 0$.
- Su gráfica es una línea recta.

Al número ***m*** se le llama **pendiente** y juega el mismo papel que en la función lineal, es la pendiente de la recta.

Al número **n** se le llama ordenada en el origen por ser el valor que tiene la ordenada (y) cuando ***x*** vale cero. Es decir, la recta $y = mx + n$ pasa por el punto $(0, n)$.

La gráfica de la función afín $y = mx + n$ se obtiene desplazando la función lineal $y = mx$ ***n*** unidades (hacia arriba si ***n*** es positivo y hacia abajo si ***n*** es negativo).

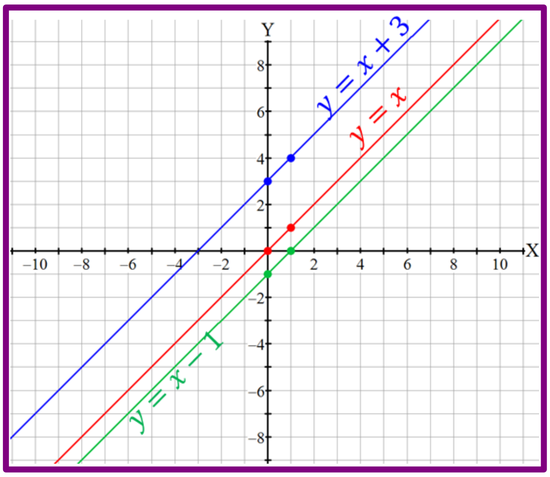
Actividades resueltas

Represente gráficamente las siguientes funciones $y = x$; $y = x + 3$ e $y = x - 1$. Indique cual es la pendiente de cada una. ¿Cómo son las tres gráficas?

x	*y=x*
0	0
1	1

x	*y=x+3*
0	3
1	4

x	*y=x-1*
0	-1
1	0



Todas tienen pendiente 1 y son rectas paralelas.

La **pendiente** m de una recta $y = mx + n$ es la medida de su crecimiento:

- Si m es positiva, la recta es creciente.
- Si m es negativa, la recta es decreciente.
- Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

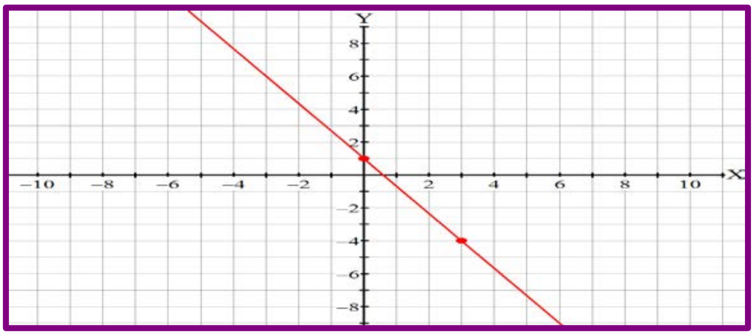
Como su representación gráfica es una recta, cuando nos dan la expresión de la función afín, si queremos dibujar la gráfica, basta con calcular dos puntos.

Actividad resuelta

Represente gráficamente la función afín $y = \frac{-5}{3}x + 1$.

x	$y = \frac{-5}{3}x + 1$
0	1
3	-4

Su representación gráfica es:



Actividades propuestas

S14. Señale cuales de las funciones siguientes son afines:

$y = 7x$	$y = -4x + 8$	$y = \frac{-2}{3}x + 10$	$y = \frac{7}{2}x - 3$

S15. Indique si son crecientes o decrecientes las siguientes funciones:

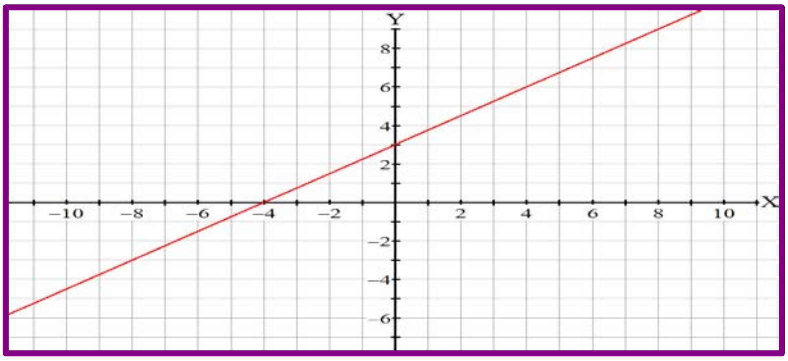
$y = 7x - 3$	$y = -4x + 8$	$y = \frac{-2}{3}x + 10$	$y = \frac{7}{2}x - 3$

S16. Represente las funciones:

$y = 7x - 3$	$y = -4x + 8$	$y = \frac{-2}{3}x + 5$	$y = \frac{7}{2}x - 3$

S17. La gráfica de una función afín pasa por los puntos de coordenadas (-2, -7) y (3, 8). Escriba la expresión de la función afín. ¿Cuál es su pendiente?

S18. A partir de la gráfica, determine la ordenada en el origen, la pendiente y la expresión algébrica de la función afín.



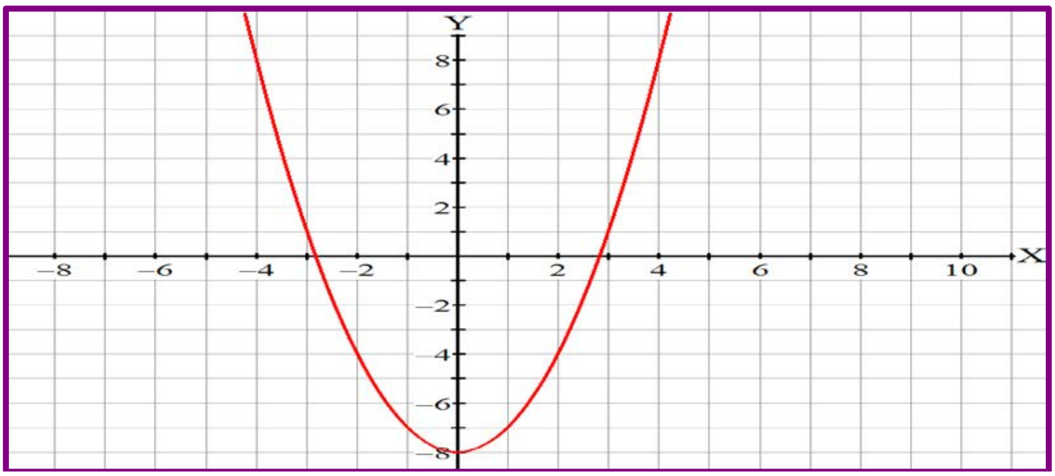
2.5 Funciones cuadráticas

2.5.1 Concepto de función cuadrática. Vértice y eje de simetría

Las funciones cuadráticas son las que se expresan mediante un polinomio de grado 2. Son de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ con a} \neq 0$$

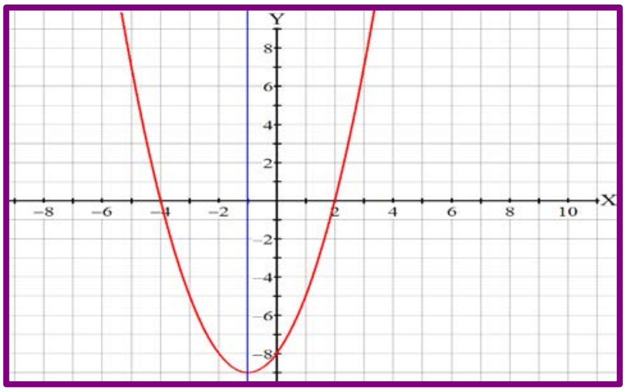
La gráfica de una función cuadrática es siempre una parábola.



En la gráfica anterior observamos:

- El punto más bajo de la curva es, en este caso, el punto de coordenadas (0, -8). Este punto más bajo se llama **vértice** de la parábola.
- La curva es simétrica respecto del eje OY, es decir, el eje de ordenadas es un eje de simetría.
- La función es decreciente para valores negativos de *x* (*x* < 0) y creciente para valores positivos de *x* (x > 0).
- La curva es convexa: está abierta hacia arriba (tiene forma de U).

Pero no siempre es así. Por ejemplo:



$y = x^2 + 2x - 8$

El vértice es el punto (-1,-9).

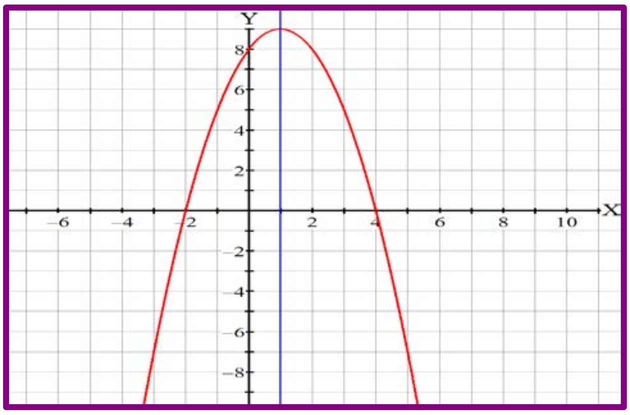
El vértice es el mínimo de la función.

La curva es simétrica respeto a la recta $x = -1$ (de color azul).

Tiene un eje de simetría que pasa por el vértice.

La función es decreciente para valores de x que están a la izquierda del vértice y es creciente para los valores de x que están a la derecha del vértice.

La función es convexa (tiene forma de U).



$y = -x^2 + 2x + 8$

El vértice es el punto (1,9).

El vértice es el máximo de la función.

La curva es simétrica respeto a la recta x=1 (de color azul).

Tiene un eje de simetría que pasa por el vértice.

La función es creciente para valores de x que están a la izquierda del vértice y es decreciente para los valores de x que están a la derecha del vértice.

La función es cóncava (tiene forma de ∩).

Aunque como puede ver, todas tienen unas características comunes:

- Si *a* es positivo (*a* es el coeficiente de x^2) la función es convexa (U) y si es negativo es cóncava (∩).
- El vértice es un mínimo (cuando es U) o un máximo (cuando es ∩).
- La recta vertical que pasa por el vértice es un eje de simetría.

2.5.2 Representación de las funciones cuadráticas

Gráfica de las funciones de tipo $y = ax^2$

Veamos ahora las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 4x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = \frac{1}{4}x^2$

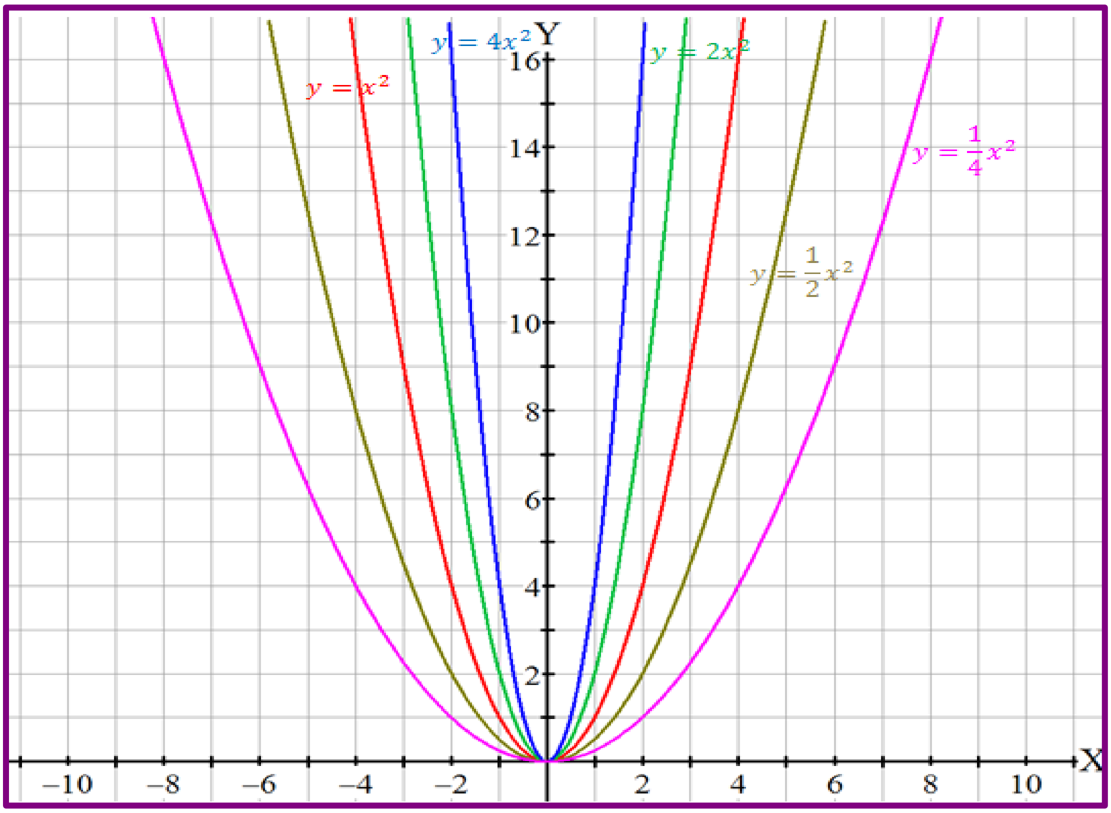
x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

x	$y = 2x^2$
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8

x	$y = 4x^2$
-2	16
-1	4
0	0
1	4
2	16

x	$y = \frac{1}{2}x^2$
-2	2
-1	$1/2$
0	0
1	$1/2$
2	2

x	$y = \frac{1}{4}x^2$
-2	1
-1	$1/4$
0	0
1	$1/4$
2	1



Todas las parábolas tienen el vértice en el mismo punto (0,0) y son convexas (forma de U), pero cuanto mayor es el valor del coeficiente **a**, más cerrada es la parábola. El vértice es un mínimo.

¿Qué ocurre cuando el coeficiente ***a*** es negativo? Fíjese:

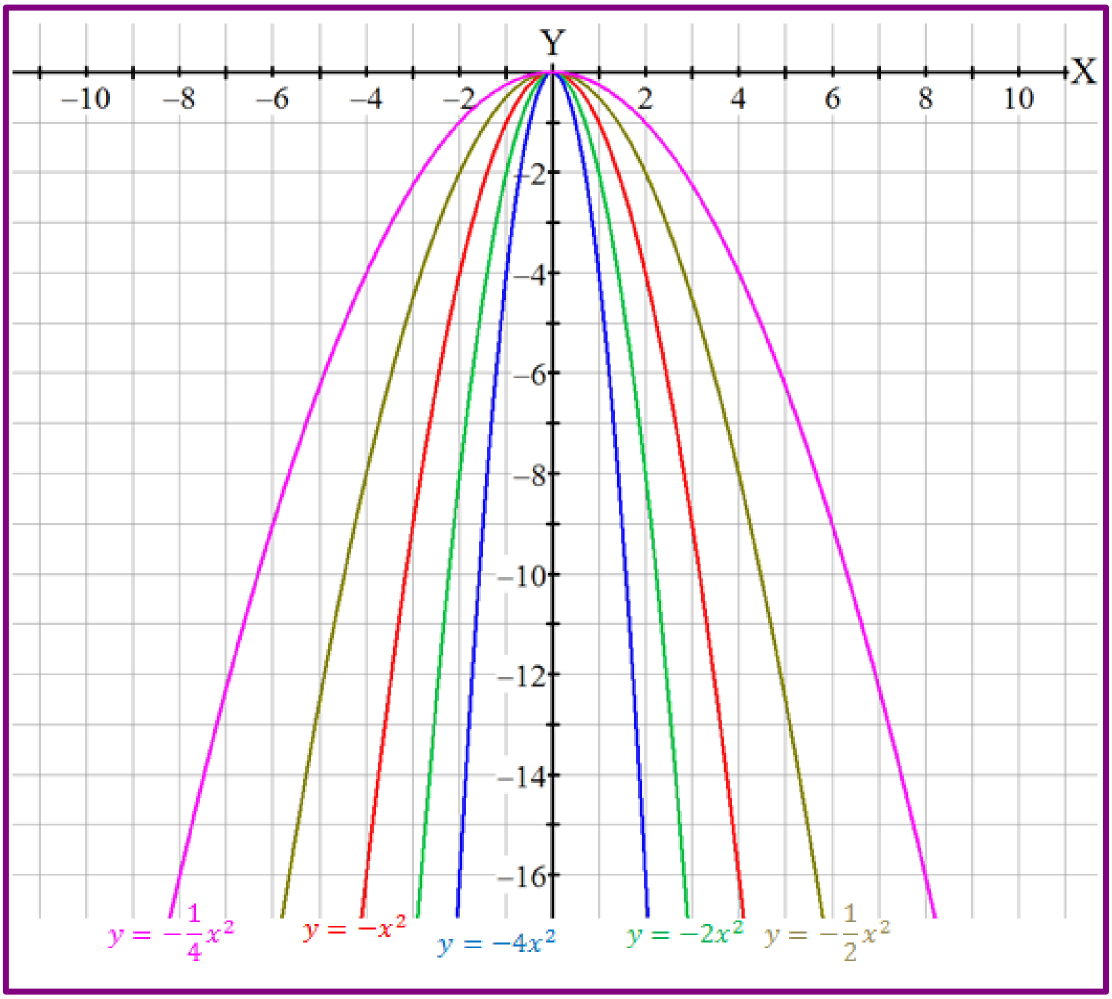
x	$y = -x^2$
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4

x	$y = -2x^2$
-2	-8
-1	-2
0	0
1	-2
2	-8

x	$y = -4x^2$
-2	-16
-1	-4
0	0
1	-4
2	-16

x	$y = -\frac{1}{2}x^2$
-2	-2
-1	$-1/_2$
0	0
1	$-1/_2$
2	-2

x	$y = -\frac{1}{4}x^2$
-2	-1
-1	$-1/_4$
0	0
1	$-1/_4$
2	-1



Ya ve el resultado: si el coeficiente **a** es negativo, la parábola es cóncava, es decir, está abierta hacia abajo (tiene forma de ∩). El vértice de la parábola ahora es un máximo.

Gráfica de las funciones de tipo $y = ax^2 + c$

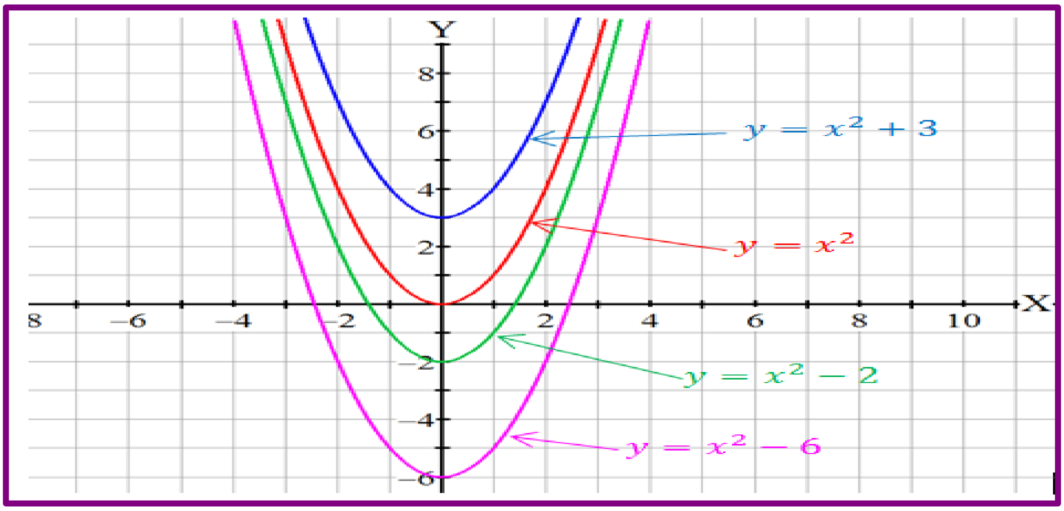
A continuación representaremos las funciones de segundo grado $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 2$ e $y = x^2 - 6$ y compararemos las gráficas obtenidas:

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

x	$y = x^2 + 3$
-2	7
-1	4
0	3
1	4
2	7

x	$y = x^2 - 2$
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2

x	$y = x^2 - 6$
-2	-2
-1	-5
0	-6
1	-5
2	-2



Las cuatro parábolas tienen la misma forma, la única diferencia que hay es que, comparadas con $y = x^2$, unas están más arriba y otras están más abajo.

Así tenemos:

- La parábola $y = x^2 + 3$ es igual que $y = x^2$ pero desplazada 3 unidades hacia arriba.
- La parábola $y = x^2 - 2$ es igual que $y = x^2$ pero desplazada 2 unidades hacia abajo.
- La parábola $y = x^2 - 6$ es igual que $y = x^2$ pero desplazada 6 unidades hacia abajo.

Entonces, el parámetro libre ***c*** tiene como efecto subir “c” unidades a la parábola, si ***c*** es positivo, o bajarla “c” unidades si es negativo.

Gráfica de la función cuadrática completa $y = ax^2 + bx + c$

Para representar una parábola debemos tener en cuenta que cuando nosotros representamos una función sólo estamos representando un fragmento de la gráfica. Lo que pasa es que no representamos las partes de la gráfica en las que no hay cambios en la función.

Por lo tanto, antes de indicar como hacemos para representar la función de segundo grado completa, estudiaremos cuál es la parte de la gráfica que debemos dibujar.

Claro está que la gráfica tiene que incluir el vértice de la parábola ya que en ese punto cambia el crecimiento de la función. Por lo tanto, lo primero que tenemos que hacer es calcular cuál es el vértice de la parábola para saber como debemos dibujar los ejes y la escala que debemos poner en ellos.

Puede demostrarse que, para cualquier parábola, la primera coordenada del vértice viene dada por la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Una vez calculada la primera coordenada del vértice debemos calcular su segunda coordenada. Para eso sustituimos en la expresión de la función $y = ax^2 + bx + c$ el valor obtenido para la primera coordenada del vértice y hacemos las cuentas correspondientes.

Actividad resuelta

Calcule el vértice de la función $y = 2x^2 - 8x + 7$.

En primer lugar calculamos la primera coordenada del vértice que viene dada por la expresión

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

En este caso:

$$a = 2,\ \ b = -8,\ \ c = 7$$

Por lo tanto:

$$x_v = \frac{-(-8)}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

La segunda coordenada se obtiene sustituyendo en $y = 2x^2 - 8x + 7$ la variable *x* por 2 y hacer las cuentas. Así:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 7 = 8 - 16 + 7 = -1$$

Así, el vértice de la parábola $y = 2x^2 - 8x + 7$ es el punto $(2, -1)$.

Una vez calculado el vértice de la parábola debemos pensar en la forma de la parábola.

- Si ***a*** (el número que multiplica a x^2) es positivo, la parábola es ∪ y no tendremos que dibujar nada por debajo del vértice.
- Si ***a*** (el número que multiplica a x^2) es negativo, la parábola es ∩ y no tendremos que dibujar nada por encima del vértice.

Además, para representar la función debemos dar valores a la variable x que estén cerca de la primera coordenada del vértice, tanto a un lado como al otro.

Por último, también debemos calcular los puntos de corte con los ejes que fue explicado en el apartado 2.3.4 de esta unidad.

Actividad resuelta

Represente la función $y = 2x^2 - 8x + 7$.

En primer lugar, debemos calcular el vértice de la parábola que ya hemos hecho en la actividad resuelta anterior. El vértice es el punto $(2, -1)$.

En segundo lugar, como el valor del coeficiente de x^2 es 2, que es positivo, la parábola será ∪ por lo que no dibujaremos nada por debajo del vértice. Es decir, no dibujaremos nada por debajo del valor de $y = -1$.

Ahora le daremos valores a la variable x para construir la tabla de valores. Como la primera coordenada del vértice es $x = 2$, le daremos a x dos valores mayores que 2, es decir, que estén a la derecha del 2 (3 y 4); y otros dos valores menores que 2, es decir, que estén a su izquierda (1 y 0):

x	$y = 2x^2 - 8x + 7$
2	$2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 7 = 8 - 16 + 7 = -1$
3	$2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 7 = 18 - 24 + 7 = 1$
4	$2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 7 = 32 - 32 + 7 = 7$
1	$2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 7 = 2 - 8 + 7 = 1$
0	$2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 7 = 0 - 0 + 7 = 7$

Ahora calcularemos los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje Y: es el punto $(0, f(0))$ que ya está calculado en la tabla y es $(0{,}7)$.
- Con el eje X: debemos resolver la ecuación.

$2x^2 - 8x + 7 = 0$. Esta ecuación se resuelve así:

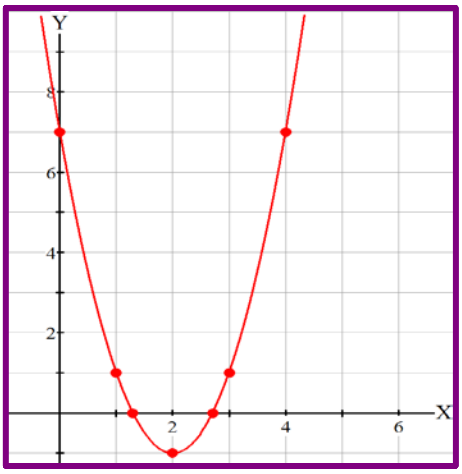
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8 + \sqrt{8}}{4} = \dfrac{8 + 2{,}8184}{4} = 2{,}7071 \\ \dfrac{8 - \sqrt{8}}{4} = \dfrac{8 - 2{,}8184}{4} = 1{,}2929 \end{cases}$$

Así, los puntos de corte con el eje X son: $(2'7071{,}0)$ y $(1'2929{,}0)$.

Ahora la representamos:



Actividad resuelta

Represente la función $y = -2x^2 - 4x + 5$.

En primer lugar, debemos calcular el vértice de la parábola. La primeira coordenada del vértice es:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2\cdot(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$$

Ahora calculamos la segunda coordenada del vértice:

$$f(-1) = -2\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) + 5 = -2 + 4 + 5 = 7$$

Así el vértice es el punto $(-1,7)$.

En segundo lugar, como el valor del coeficiente de x^2 es -2 que es negativo, la parábola será ∩, por lo que no dibujaremos nada por encima del vértice. Es decir, no dibujaremos nada por encima del valor de $y = 7$.

Ahora le daremos valores a la variable *x* para construir la tabla de valores:

x	$y = -2x^2 - 4x + 5$
-1	$-2\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) + 5 = -2 + 4 + 5 = 7$
0	$-2\cdot 0^2 - 4\cdot 0 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$
1	$-2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 5 = -2 - 4 + 5 = -1$
-2	$-2\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) + 5 = -8 + 8 + 5 = 5$
-3	$-2\cdot(-3)^2 - 4\cdot(-3) + 5 = -18 + 12 + 5 = -1$

Ahora calcularemos los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje Y: es el punto $(0, f(0))$ que ya está calculado en la tabla y es $(0,5)$.
- Con el eje X: debemos resolver la ecuación $-2x^2 - 4x + 5 = 0$. Esta ecuación se resuelve así:

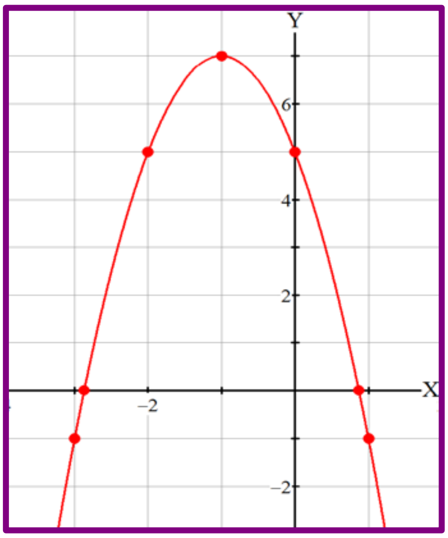
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 5}}{2\cdot(-2)} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{-4} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4+\sqrt{56}}{-4} = \dfrac{4+7{,}4833}{-4} = -2{,}8708 \\ \dfrac{4-\sqrt{56}}{-4} = \dfrac{4-7{,}4833}{-4} = 0{,}8708 \end{cases}$$

Así, los puntos de corte con el eje X son: $(-2'8708{,}0)$ e $(0'8708{,}0)$.

Ahora la representamos:



Actividades propuestas

S19. De las funciones cuadráticas siguientes, ¿cuáles son cóncavas y cuáles convexas?

$y = \frac{-3}{2}x^2$	$y = \frac{3}{5}x^2$	$y = 7x^2$	$y = -0,32x^2$

S20. Compruebe que el efecto del parámetro ***c*** en las parábolas del tipo $y = ax^2 + c$ es desplazarlas hacia arriba o abajo, dibujando la gráfica de las parábolas $y = 2x^2 + 3$, $y = 2x^2$ e $y = 2x^2 - 3$.

S21. Compare las gráficas de las siguientes funciones: $y = -x^2$ e $y = -x^2 + 4$. ¿Qué observa?

S22. Calcule las coordenadas del vértice de las parábolas:

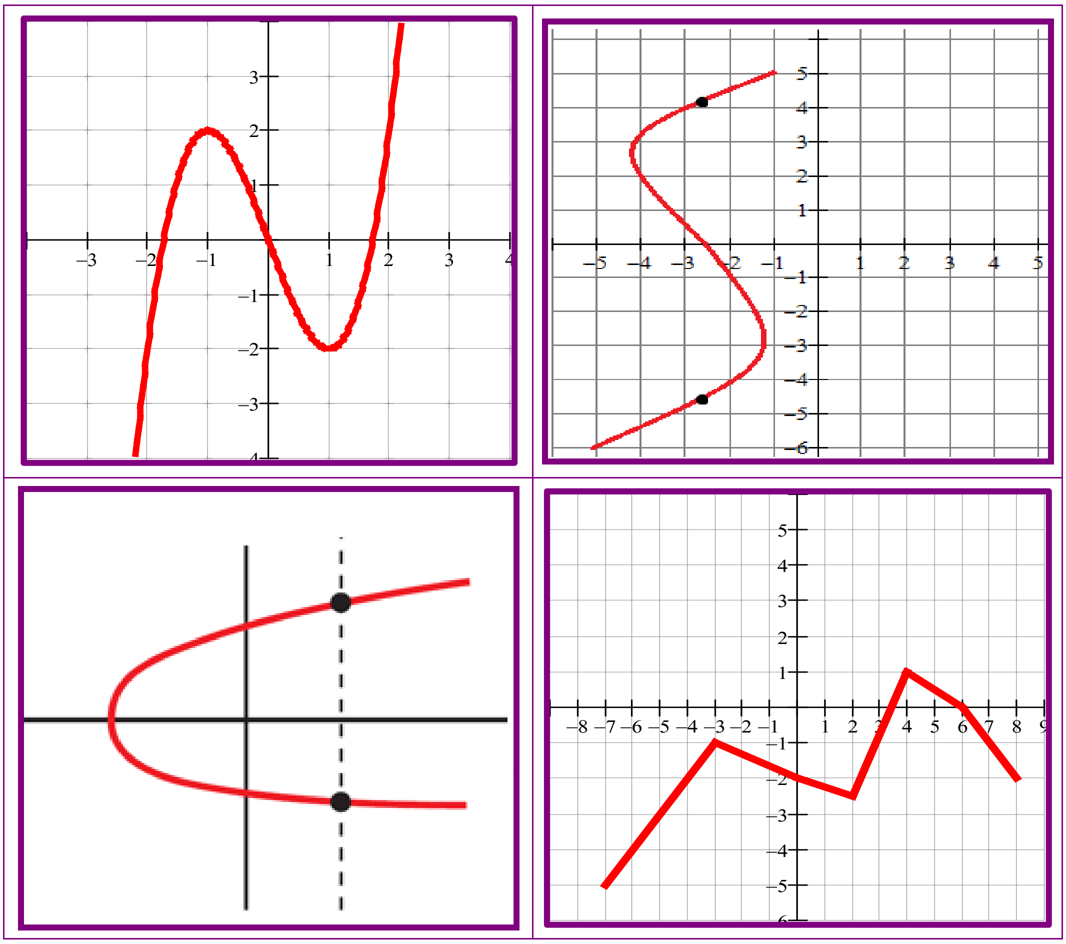
$y = x^2 - 8$	$y = x^2 - x + 5$	$y = -x^2 - 2x + 4$	$y = 3x^2 + 6x - 1$

S23. Represente gráficamente las funciones: $y = x^2 - 9x$, $y = x^2 - 6x + 1$ e $y = x^2 - 2$.

S24. Sin dibujar la gráfica, determine si el eje de simetría y el vértice de las parábolas están a la izquierda o a la derecha del eje OY: $y = x^2 - 3x + 5$; $y = -x^2 - 4x$.

3. Actividades finales

S25. Explique porque cada una de estas gráficas es o no es una función.



S26. Calcule las imágenes de $x = 0$ mediante las siguientes funciones:

$f(x) = x^3 + 3x + 2 + \dfrac{x+1}{x-3}$	$g(x) = 5(x^2 + 1)$
$h(x) = 3^{x+2} - 3x - 5$	$i(x) = \dfrac{x+5}{x+4} - \dfrac{x-3}{x-5}$

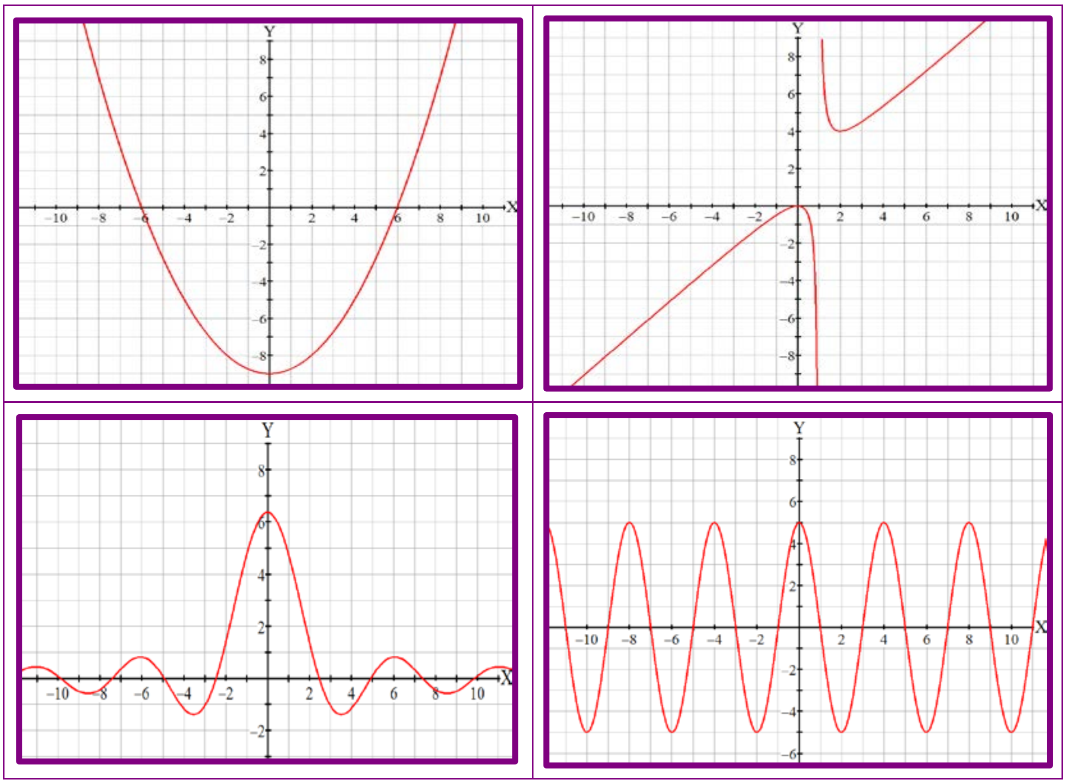
S27. Calcule los originales de 5 mediante las siguientes funciones:

$f(x) = 3x - 4$	$g(x) = x^2 + 3x + 9$
$h(x) = 5$	$i(x) = x^2$

S28. Represente gráficamente las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{-3x+5}{7}$	$f(x) = \dfrac{3x}{4}$
$f(x) = x^2 - x + 1$	$f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

S29. Dadas las siguientes funciones, indique: donde son continuas y donde discontinuas, donde son crecientes y donde decrecientes, sus máximos, mínimos y los puntos de corte con los ejes.



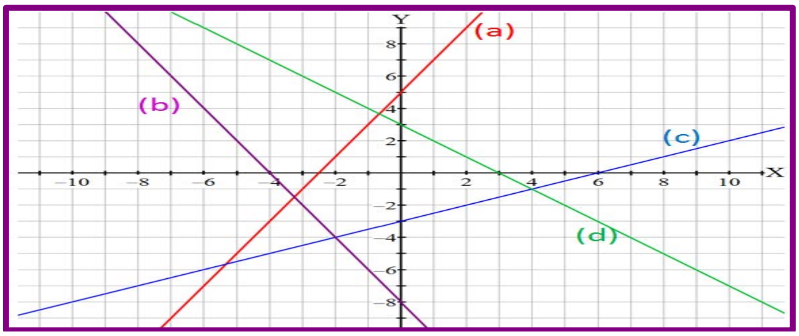
S30. Calcule los puntos de corte con los ejes de las funciones:

$f(x) = 3x - 4$	$g(x) = x^2 + 3x + 9$
$h(x) = 5$	$i(x) = x^2$

S31. El volumen **V** de líquido que contiene un tubo es proporcional a la altura **h** que el líquido alcanza en el tubo. Cuando la altura del líquido en el tubo es de 4 cm, el volumen de líquido es de 6 cm3. Calcule el volumen de líquido cuando la altura sea 7 cm.

S32. En Gran Bretaña usan la milla para medir distancias. En el resto de Europa, las distancias anchas se miden en km. Si 5 millas son 8 km, escribe la función que pasa las distancias de km a millas.

S33. Calcule la expresión de las siguientes funciones:



S34. Escriba las expresiones de dos funciones paralelas a la función afín $y = 3x - 4$.

S35. Calcule el punto en el que cortan el eje de ordenadas las siguientes funciones:

$y = 3x + 8$	$y = -x + 6$
$2x + 3y = 3$	$8x - y = 1$

S36. La gráfica de una función es una línea recta y paralela a la de la ecuación $y = -3x + 7$ y corta el eje de ordenadas en el punto (0,3). Calcule la expresión de esa función.

S37. El punto de coordenadas (8,3) está en la gráfica de una función afín de pendiente $\frac{1}{2}$. Calcule dicha función.

S38. El punto de coordenadas (5,3) está en la gráfica de una función afín que tiene como ordenada en el origen 13. Calcule dicha función.

S39. Calcule la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines:

$4x + y = 5$	$-x - 2y = 8$	$3x + 3y = 5$	$4x - 2y = 6$
$x - 3y = 7$	$2x + 3y = 5$	$x - y = 14$	$2x - 5y = 1$

S40. La función que permite calcular la temperatura en grados Fahrenheit a partir de la temperatura en grados Celsius (grados centígrados) es: ºF = 32 + 1,8 ºC.

a) ¿Qué tipo de función es?

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Y su ordenada en el origen?

c) En verano, cuando estamos a 30 ºC, ¿cuánto marca un termómetro Fahrenheit?

S41. Sabemos que la función cuadrática $y = ax^2 + bx$ pasa por los puntos $(-1, -5)$ y $(1, -3)$. Determine el valor de los coeficientes ***a*** y ***b***.

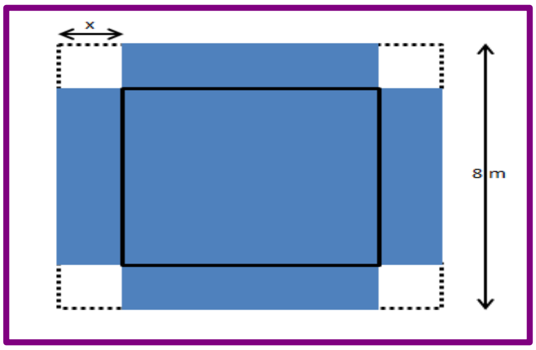
S42. Encuentre la función cuadrática que tiene el vértice en el punto $(2, -1)$ y pasa por el punto $(0,3)$.

S43. Tenemos un cuadrado de cartón de 8 metros de lado y queremos utilizarlo para hacer una caja sin la tapa. El procedimiento es el siguiente:

1º Cortamos en cada esquina un cuadrado.

2º Doblamos el cartón por las líneas negras del dibujo de forma que las caras sean perpendiculares.

Calcule la función que expresa la superficie del fondo de la caja en función del lado del cuadrado que cortamos.



S44. El perímetro de un rectángulo es de 24 metros. Llamamos *x* a la longitud de su base. Encuentre la expresión de la función que nos da el área en función de la longitud de la base. ¿Para qué valor de la longitud de la base obtenemos el área máxima?

S45. Una pinza de tender la ropa cae por la ventana. El espacio recorrido por la pinza viene dado por la expresión $s = 4{,}9 \cdot t^2$, siendo ***t*** el tiempo transcurrido desde que nos cayó la pinza (expresado en segundos) y s es el espacio expresado en metros. Represente esta función y calcule el tiempo que tardará en llegar al suelo si la ventana de mi piso está a 30,62 metros de altura.

S46. Calcule los puntos de corte con el eje de abscisas (X) de las siguientes funciones. ¿Hay alguna relación entre el número de puntos que cortan el eje de abscisas y el discriminante de la ecuación de segundo grado asociada a las funciones dadas?

$y = x^2 - 5x + 6$	$y = -x^2 - 5$	$y = x^2 - 8x + 16$	$y = x^2 - 5x$

S47. Represente la función $y = (x - 2) \cdot (x - 4)$. Calcule también el vértice y los puntos de corte con los ejes.

S48. Represente la función $y = (1 - x) \cdot (3 + x)$. Calcule también el vértice y los puntos de corte con los ejes.

S49. Represente la función $y = 16 - (x+3)^2$. Calcule también el vértice y los puntos de corte con los ejes.

S50. Utilizando el discriminante de una ecuación de segundo grado y sin representar la función, indique si las siguientes funciones cortan el eje de abscisas o no y, en el caso de cortarlo, en cuantos puntos lo hace.

$y = x^2 + 5x + 6$	$y = -x^2 - 5x - 8$	$y = x^2 - 4x + 4$	$y = x^2 + x + 1$

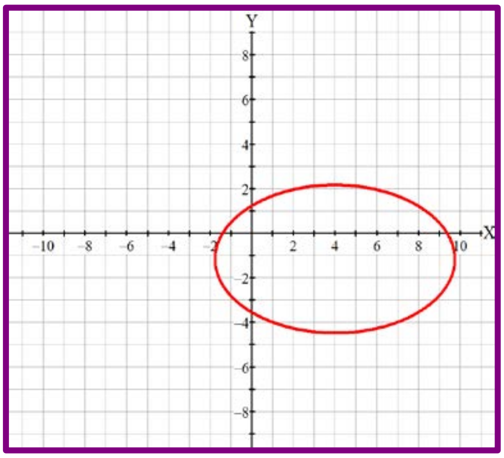
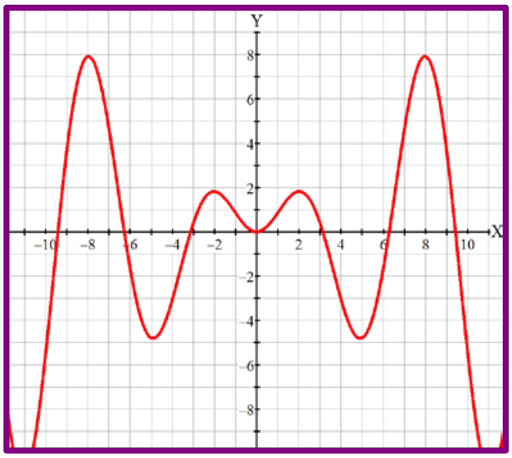
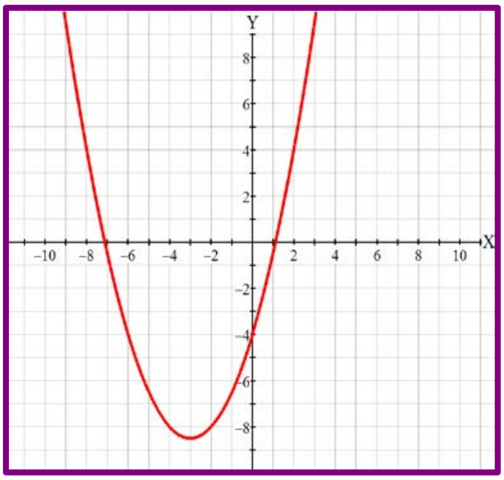
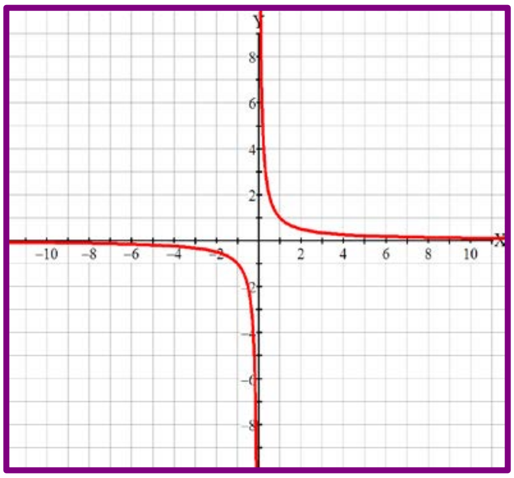
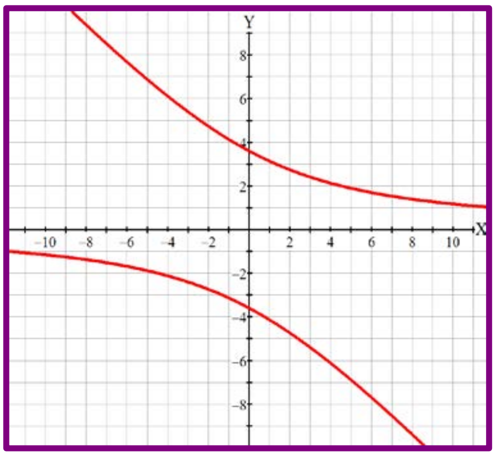
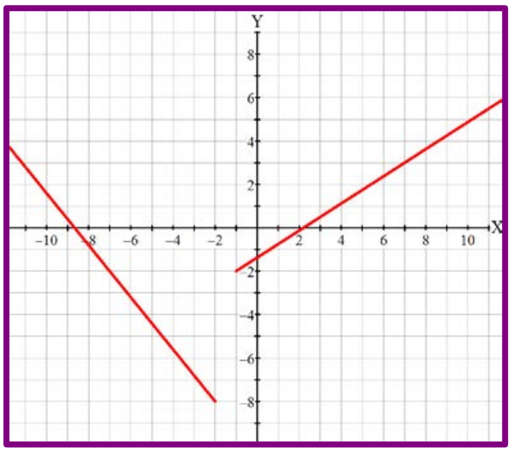
S51. Calcule el valor de k para que la parábola $y = 6x^2 + 2x + k$ corte el eje X en un único punto.

S52. Una alfombra rectangular tiene en la base 4 metros más de largo que su altura. Calcule la expresión que nos da la superficie de la alfombra en función de la longitud de la altura.

4. Solucionario

4.1 Soluciones de las actividades propuestas

S1.

	
No es la gráfica de una función.	Es la gráfica de una función.
	
Es la gráfica de una función.	Es la gráfica de una función.
	
No es la gráfica de una función.	Es la gráfica de una función.

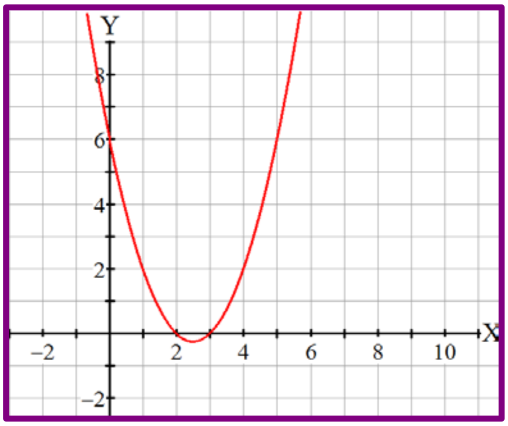
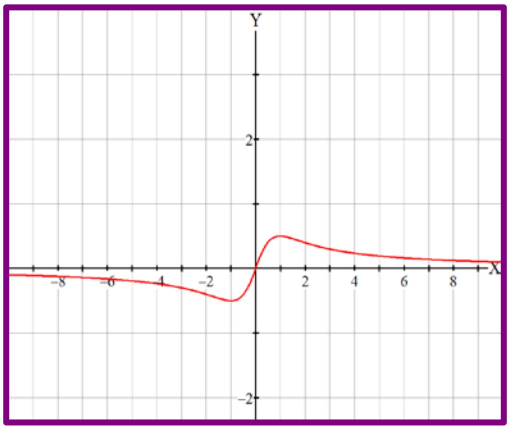
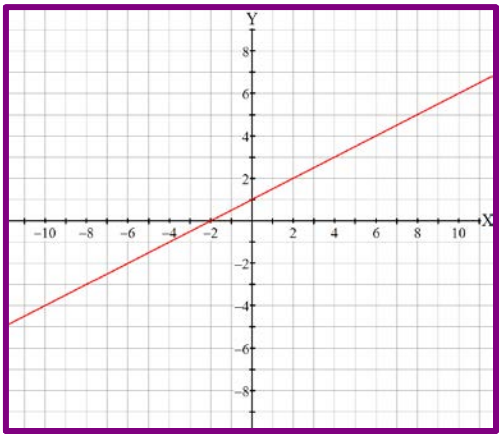
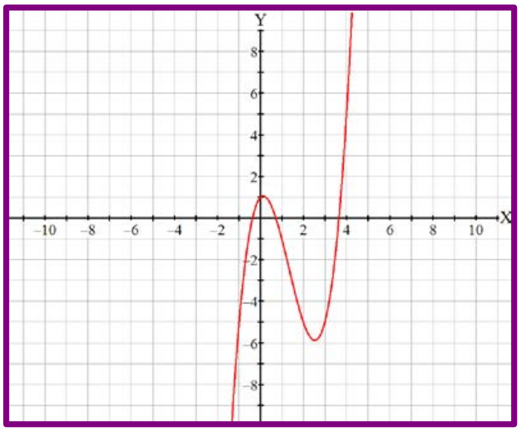
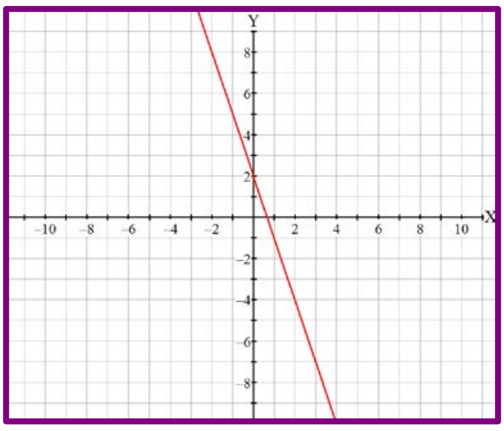
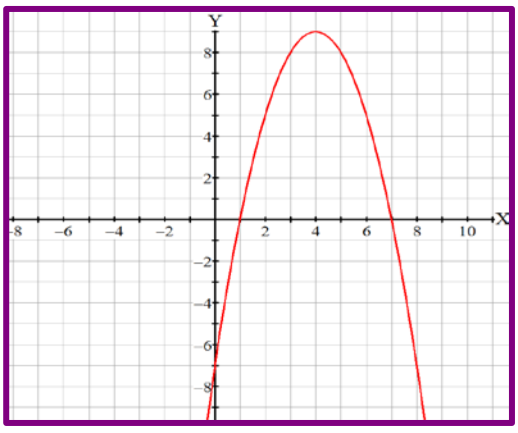
S2.

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}\,; f(1) = -2$	$f(x) = x^2 + 8x + 21\,; f(1) = 30$	$f(x) = 7x - 3\,; f(1) = 4$

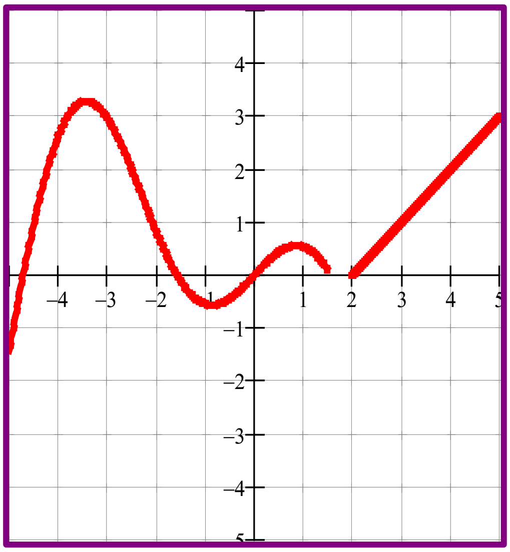
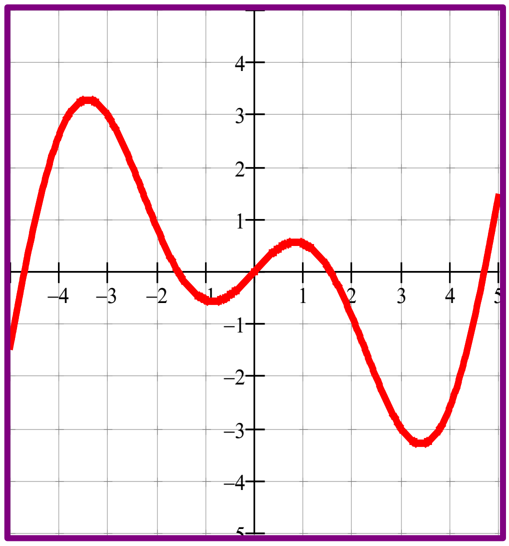
S3.

$f(x) = 7x + 8$ Original de -6 es $x = -2$	$f(x) = x^2 + 5x$ Originales de -6 es $x = -2\ y\ x = -3$	$f(x) = 3x^2 - 10x - 3$ Originales de -6 es $x = 3\ y\ x = \frac{1}{3}$

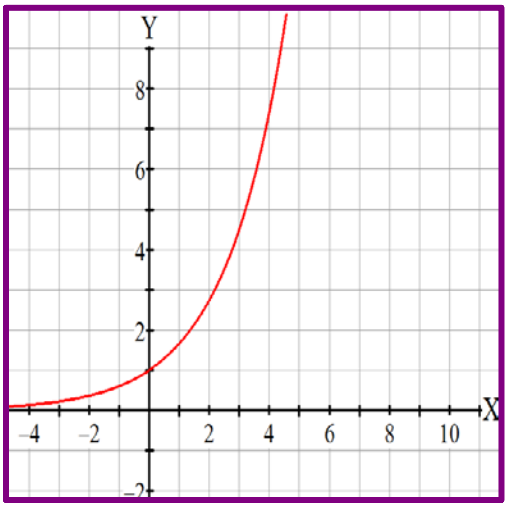
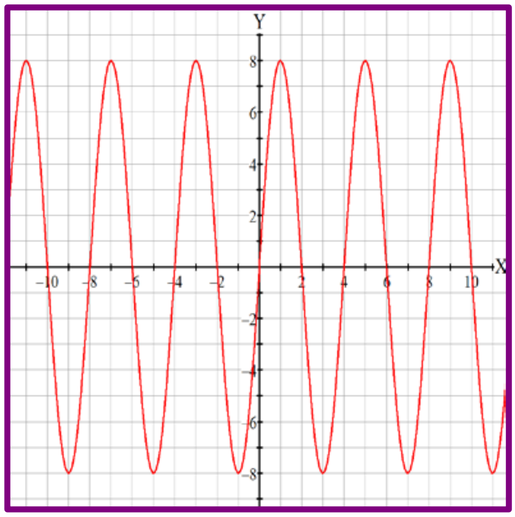
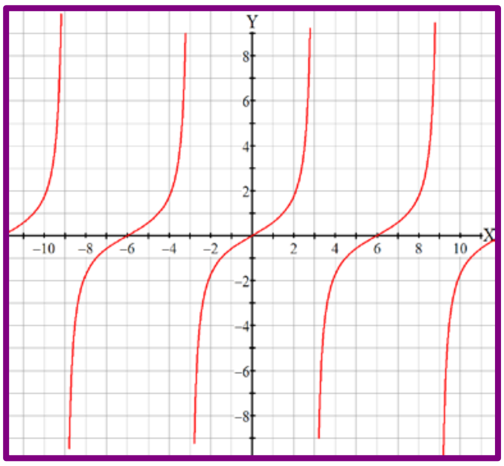
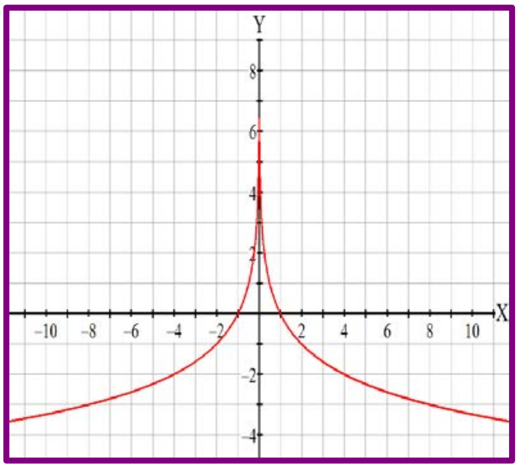
S4.

$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
	
$f(x) = \dfrac{x+2}{2}$	$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$
	
$f(x) = -3x + 2$	$f(x) = -x^2 + 8x - 7$
	

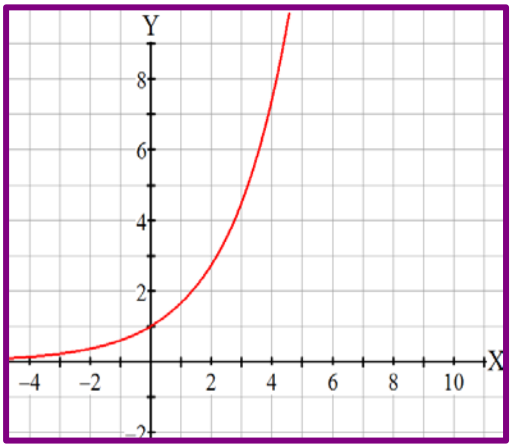
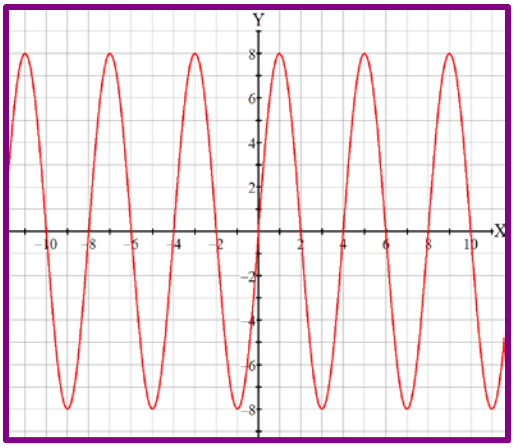
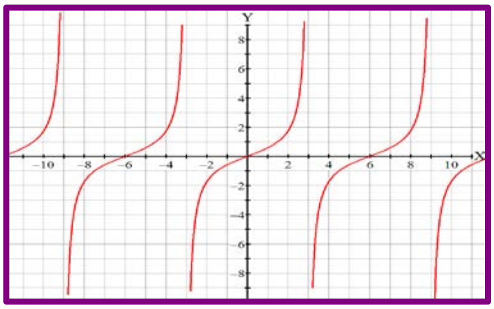
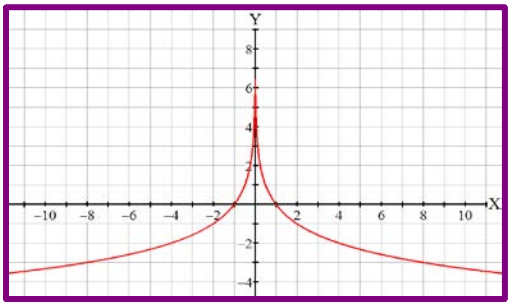
S5.

	
Es continua excepto en el punto x=1,5 y x=2.	Es continua siempre.

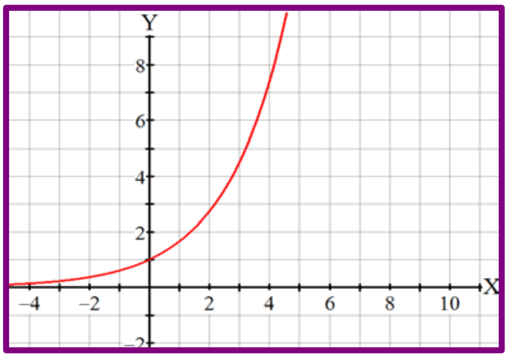
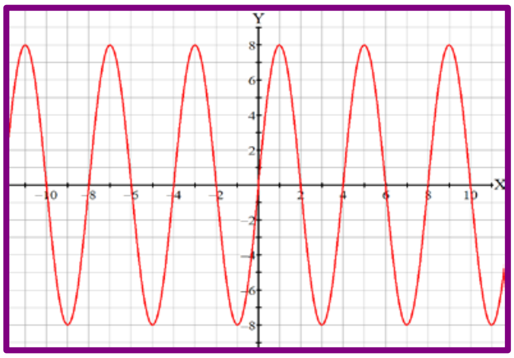
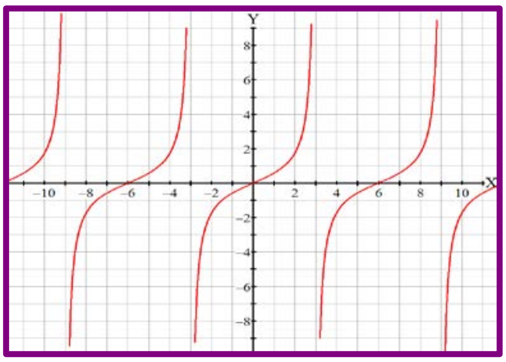
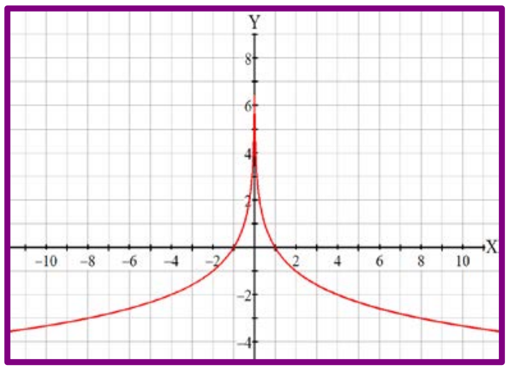
S6.

	
Siempre es creciente.	Es decreciente en los intervalos (-11,-9), (-7,-5), (-3,-1), (1,3), (5,7) e (9,11). Es creciente en los intervalos: (-9,-7), (-5,-3), (-1,1), (3,5), (7,9), (11,13)...
	
Siempre es creciente.	Es creciente hasta el cero y decreciente del cero en adelante.

S7.

	
No tiene ni máximos ni mínimos.	Máximos, tanto absolutos como relativos, en los puntos (11,8), (-7,8), (-3,8), (1,8), (5,8), (9,8),... Mínimos, tanto absolutos como relativos, en los puntos: (-9,-8), (-5,-8), (-1,-8), (3,-8), (7,-8), (11,-8)...
	
No tiene ni máximos ni mínimos.	Tiene un máximo relativo y absoluto en el punto (0,6’5).

S8.

	
Corte en el eje Y: (0,1) No corta el eje X.	Corte en el eje Y: (0,0) Corte en el eje X: todos los de la forma (nº par,0)
	
Corte en el eje Y: (0,0) Corte en el eje X: todos los de la forma (múltiplo de 6,0)	Corte en el eje Y: (0,6’5) Corte en el eje X: (-1,0) e (1,0)

S9.

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ Corte en el eje Y: (0,6). Corte en el eje X: (2,0) y (3,0)	$f(x) = \frac{x+2}{2}$ Corte en el eje Y (0,1). Corte en el eje X: (-2,0)
$f(x) = -3x + 2$ Corte en el eje Y: (0,2). Corte en el eje X: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$	$f(x) = -x^2 + 8x - 7$ Corte en el eje Y: (0,-7). Corte en el eje X: (1,0) y (7,0)

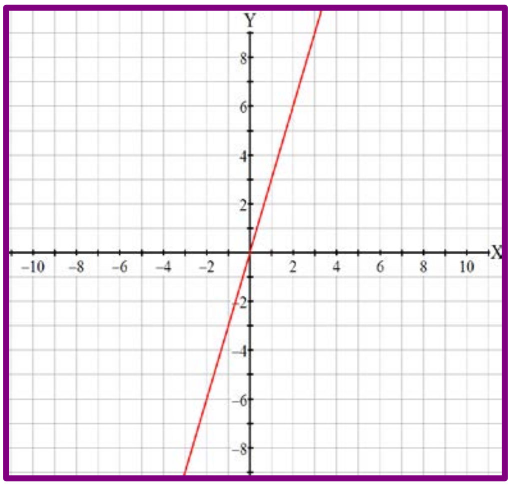
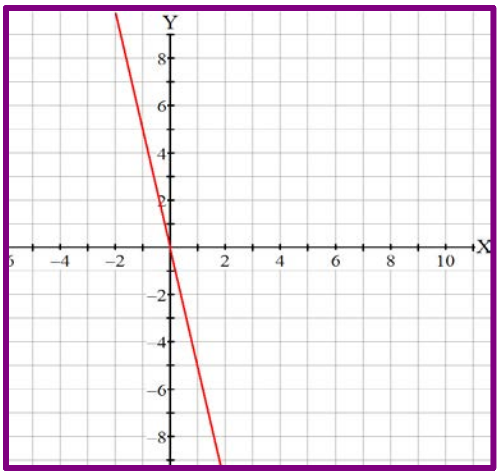
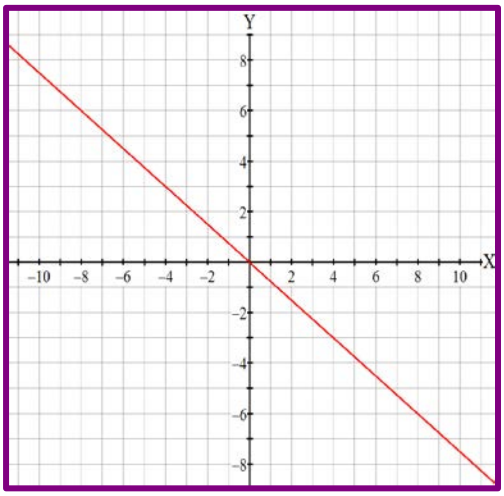
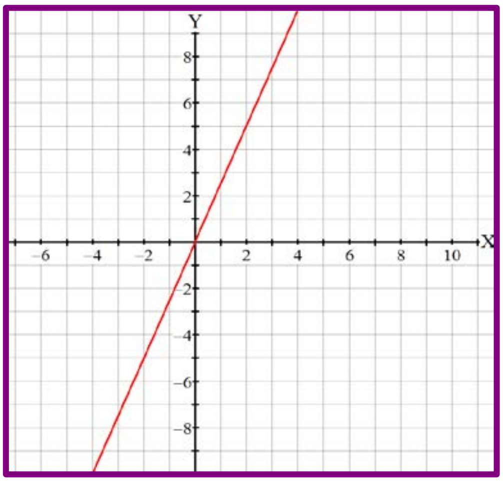
S10.

$y = 7x$ Lineal	$y = -4x + 8$ No lineal	$y = \frac{-2}{3}x$ Lineal	$y = \frac{7}{2}x$ Lineal

S11.

$y = 7x$ Creciente	$y = -4x$ Decreciente	$y = \frac{-2}{3}x$ Decreciente	$y = \frac{7}{2}x$ Creciente

S12.

$y = 3x$	$y = -5x$
	
$y = \frac{-3}{4}x$	$y = \frac{5}{2}x$
	

S13. $y = 4x$, *pendiente = 4 y la función es creciente.*

S14.

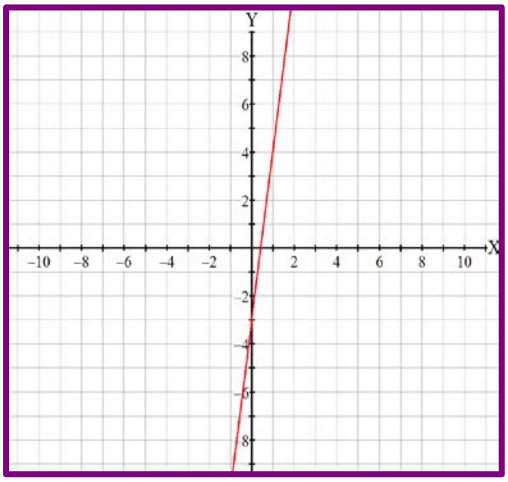
$y = 7x$ No es afín.	$y = -4x + 8$ Es afín.	$y = \frac{-2}{3}x + 10$ Es afín.	$y = \frac{7}{2}x - 3$ Es afín.

S15.

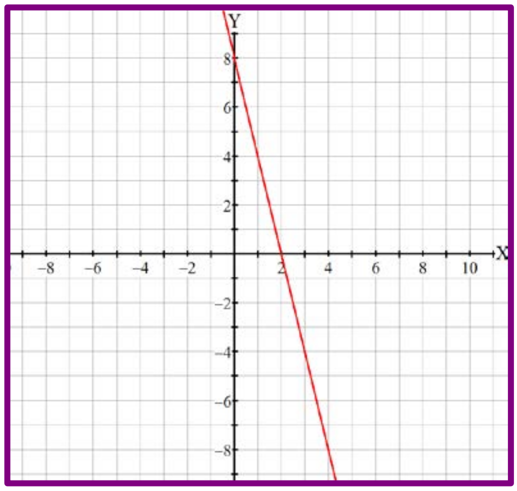
$y = 7x - 3$ Creciente	$y = -4x + 8$ Decreciente	$y = \frac{-2}{3}x + 10$ Decreciente	$y = \frac{7}{2}x - 3$ Creciente

S16.

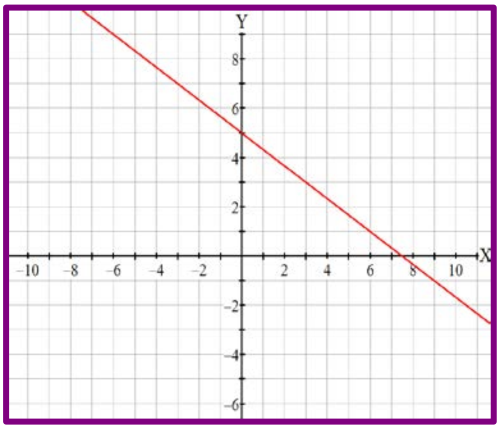
$y = 7x - 3$



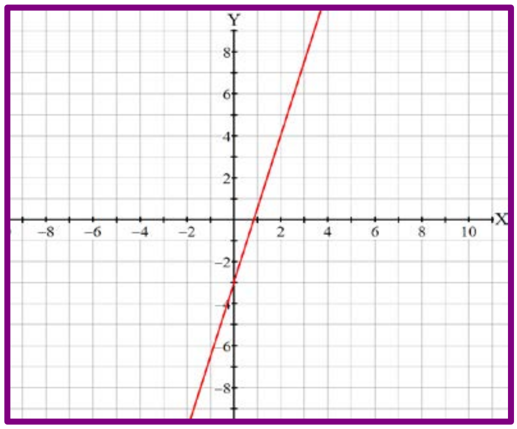
$y = -4x + 8$



$y = \frac{-2}{3}x + 5$



$y = \frac{7}{2}x - 3$



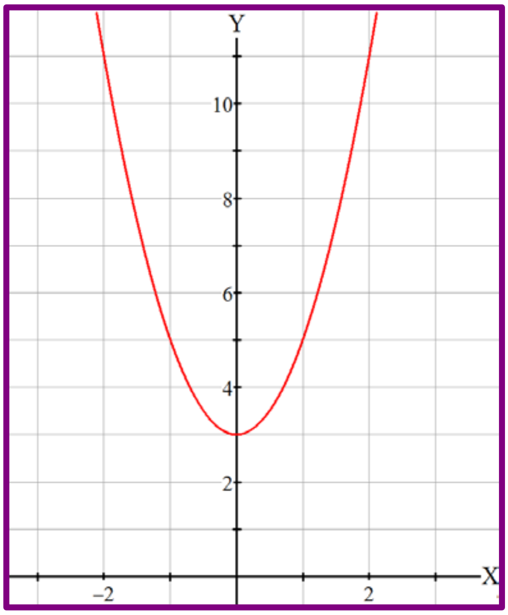
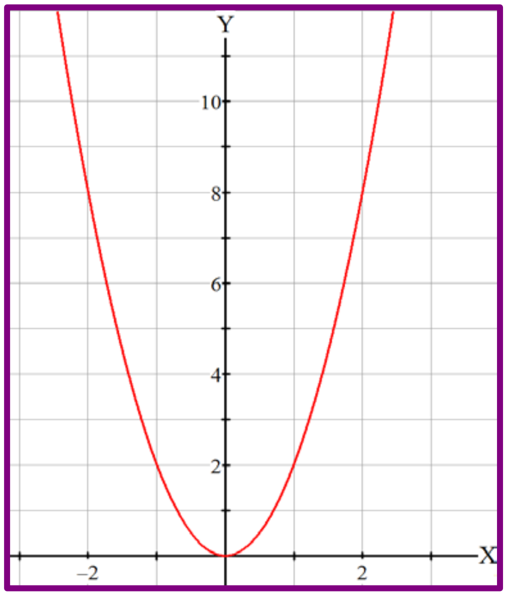
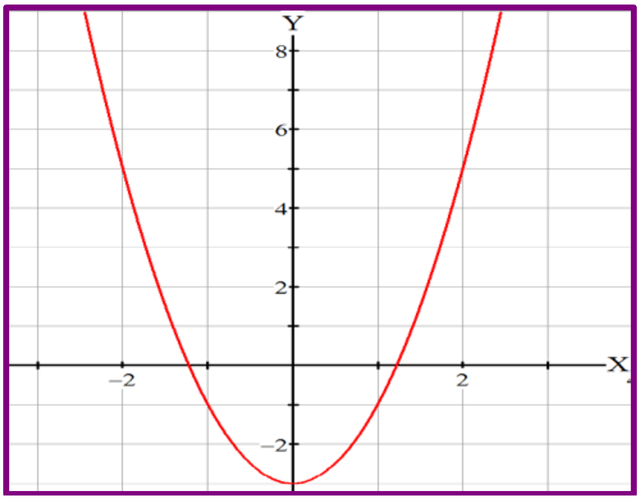
S17. $y = 3x - 1$. *La pendiente vale 3.*

S18. *Ordenada en el origen = 3, Pendiente = ¾, Expresión* $y = \frac{3}{4}x + 3$

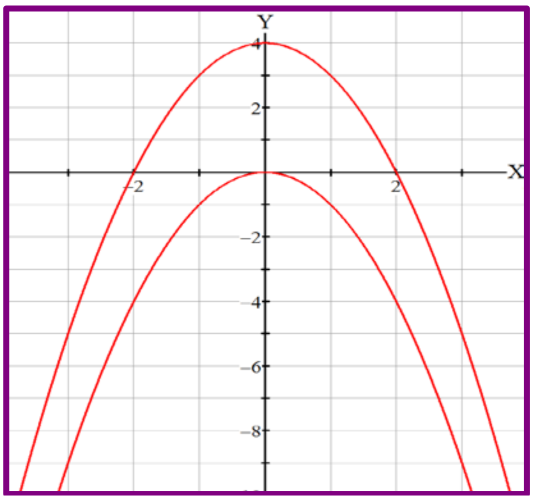
S19.

$y = \frac{-3}{2}x^2$ Cóncava	$y = \frac{3}{5}x^2$ Convexa	$y = 7x^2$ Convexa	$y = -0{,}32x^2$ Cóncava

S20.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y = 2x^2 + 3$</td><td>$y = 2x^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = 2x^2 - 3$</td></tr>
</table>

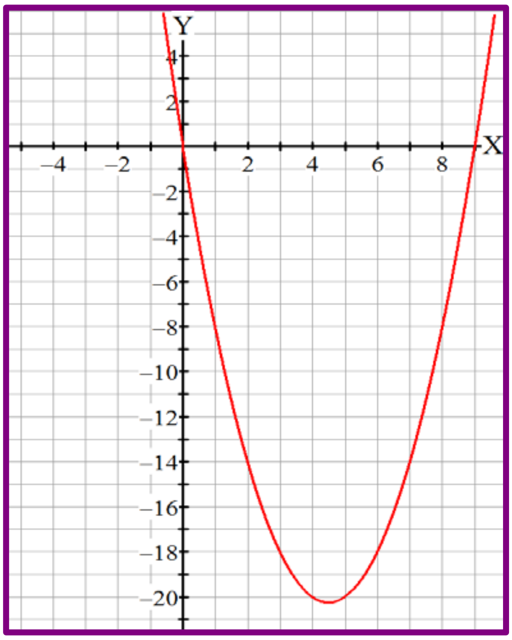
S21. *La segunda es igual que la primera pero desplazada cuatro unidades hacia arriba.*



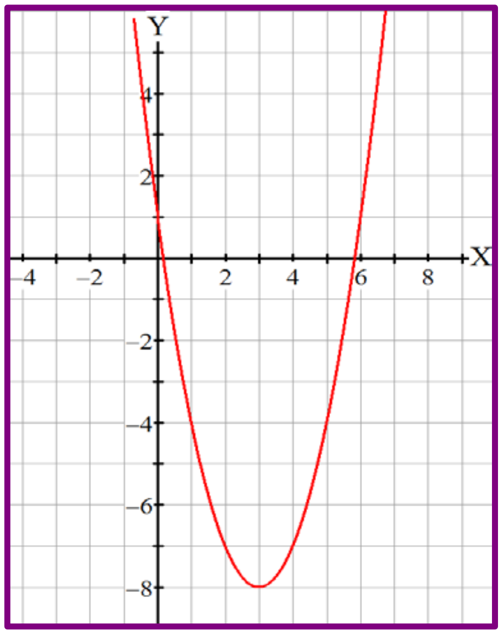
S22.

$y = x^2 - 8$ Vértice: $(0, -8)$	$y = x^2 - x + 5$ Vértice: $\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{4}\right)$	$y = -x^2 - 2x + 4$ Vértice: $(-1{,}5)$	$y = 3x^2 + 6x - 1$ Vértice: $(-1, -4)$

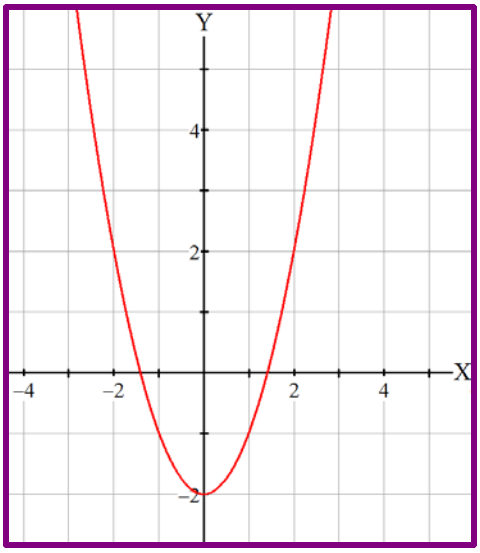
S23.



$y = x^2 - 9x$



$y = x^2 - 6x + 1$



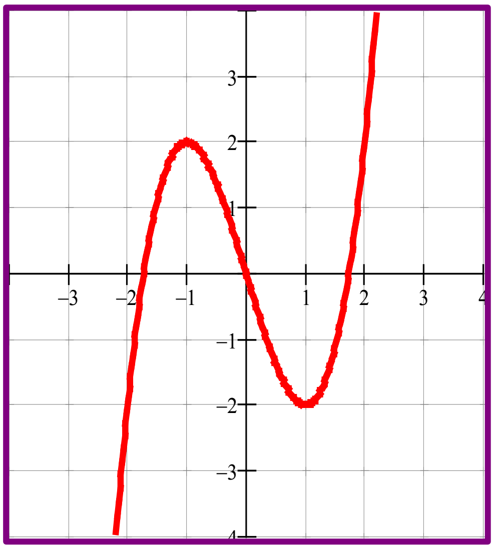
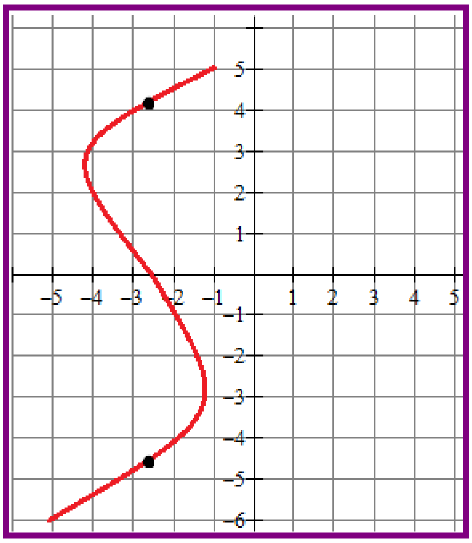
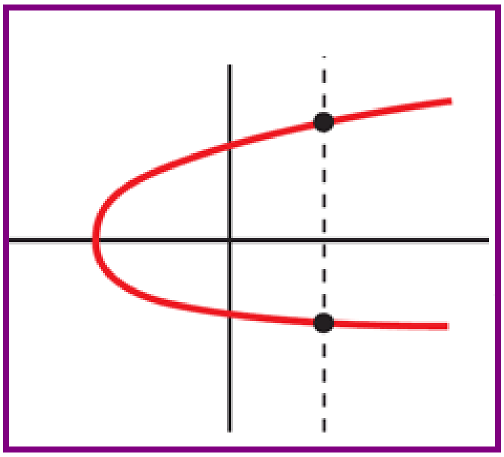
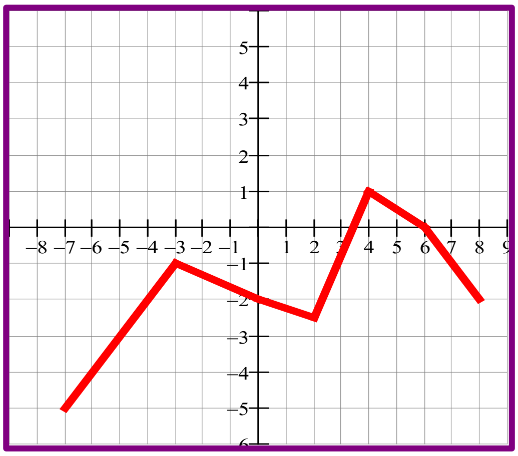
$y = x^2 - 2$

S24.

$y = x^2 - 3x + 5$ A la derecha	$y = -x^2 - 4x$ A la izquierda

4.2 Soluciones de las actividades finales

S25.

	
Es la gráfica de una función.	No es la gráfica de una función.
	
No es la gráfica de una función.	Es la gráfica de una función.

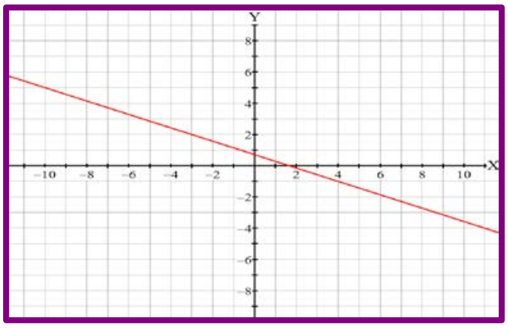
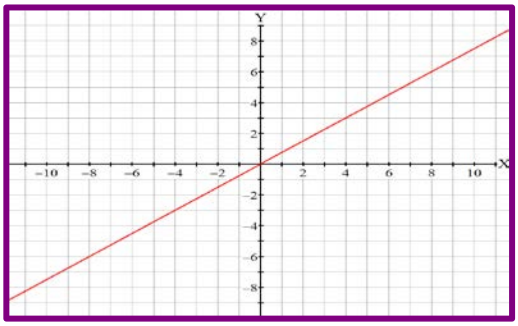
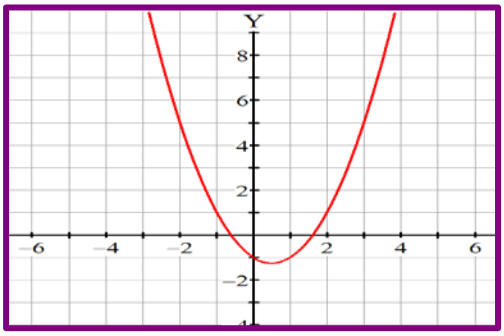
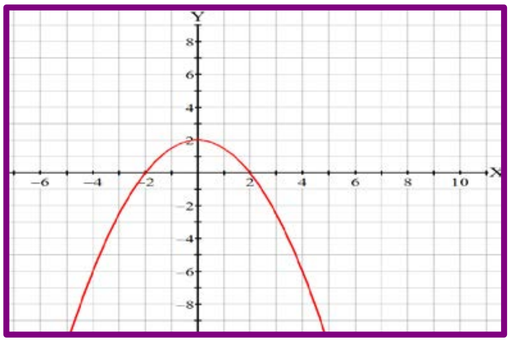
S26.

$f(0)=\frac{5}{3}$	$g(0)=5$	$h(0)=4$	$i(0)=\frac{13}{20}$

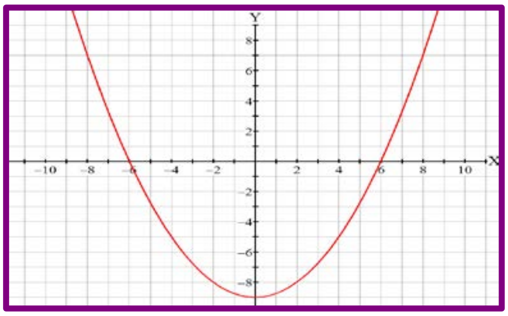
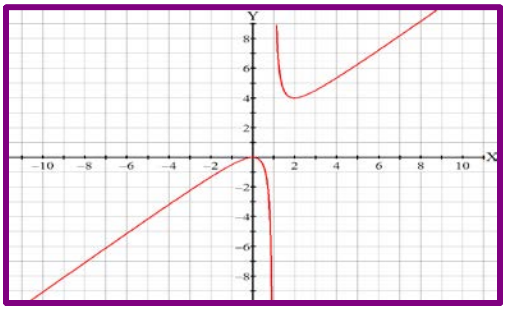
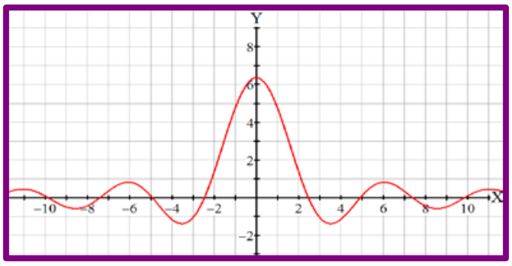
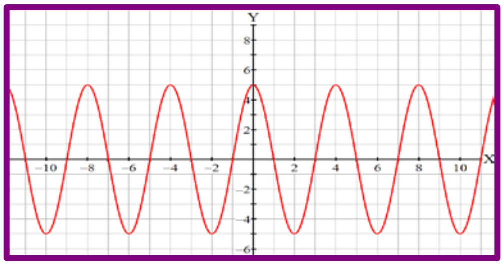
S27.

$f(x)=3x-4$. El original de 5 es x=3.	$g(x)=x^2+3x+9$ El original de 5 no existe.
$h(x)=5$. Cualquier número es original de 5.	$i(x)=x^2$ Los originales de 5 son $x=\sqrt{5}$ y $x=-\sqrt{5}$.

S28.

$f(x) = \dfrac{-3x+5}{7}$	$f(x) = \dfrac{3x}{4}$
	
$f(x) = x^2 - x + 1$	$f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$
	

S29.

	
Es continua. Decrece hasta x=0 y crece de x=0 en adelante. Tiene un mínimo absoluto y relativo en el punto (0,-9). Corte en el eje Y: (0,-9). Corte en el eje X: (6,0) y (-6,0).	Es continua excepto en x=1. Es creciente hasta x=0 y de x=2 en adelante. Decrece de x=0 a x=1 y de x=1 a x=2. Tiene un máximo relativo en el (0,0) y un mínimo relativo en el (2,4). Corta los ejes en el punto (0,0).
	
Es continua. Crece hasta x=-11, de x=-8,5 hasta x=-6, de x= -3,5 hasta x=0, de x=3,5 a x=6, de x=8,5 hasta x=11. Decrece de x=-11 a x=-8,5; de x=-6 a x=-3,5; de x=0 a x=3,5; de x=6 a x=8,5. Corta el eje Y en el punto (0,6'5) y el eje X en los puntos (-10,0), (-7'5,0), (-5,0), (-2'5,0),(2'5,0), (5,0), (7'5,0), (10,0).	Es continua. Crece en los intervalos (-10,-8), (-6,-4), (-2,0), (2,4), (6,8), (10,12),… Decrece en los intervalos: (-12,-10), (-8,-6),(-4,-2) (0,2), (4,6), (8,10). Tiene máximos, que son absolutos y relativos, en los puntos: (-12,5), (-8,5), (-4,5), (0,5), (4,5), (8,5), (12,5)… Tiene mínimos, que son absolutos y relativos, en los puntos: (-10,-5), (-6,-5), (-2,-5), (2,-5), (6,-5), (10,-5). Corta el eje Y en el punto (0,5). Corta el eje X en los puntos de la forma (nº impar,0).

S30.

$f(x) = 3x - 4.$ (0,-4) e $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$	$g(x) = x^2 + 3x + 9$ (0,9) y no corta el eje de abscisas.
$h(x) = 5$ (0,5) y no corta el eje de abscisas.	$i(x) = x^2$ Corta ambos ejes en el mismo punto, el punto (0,0).

S31. *10,5 cm^3.*

S32. $y = \frac{5}{8}x$, *donde y=millas y x=km.*

S33. *(a)* $y = 2x + 5$ *(b)* $y = -2x - 8$ *(c)* $y = \frac{1}{2}x - 3$ *(d)* $y = -x + 3.$

S34. *Cualquiera con pendiente 3. Por ejemplo* $y = 3x$ *y* $y = 3x + 1.$

S35.

$y = 3x + 8$ (0,8)	$y = -x + 6$ (0,6)
$2x + 3y = 3$ (0,1)	$8x - y = 1$ (0,-1)

S36. $y = -3x + 3.$

S37. $y = \frac{1}{2}x - 1.$

S38. $y = -2x + 13.$

S39.

$4x + y = 5$ Pendiente:-4, Ordenada en el origen: 5	$-x - 2y = 8$ Pendiente:-1/2, Ordenada en el origen: -4	$3x + 3y = 5$ Pendiente:-1, Ordenada en el origen: $\frac{5}{3}$	$4x - 2y = 6$ Pendiente:2, Ordenada en el origen: -3
$x - 3y = 7$ Pendiente:$\frac{1}{3}$, Ordenada en el origen: $-\frac{7}{3}$	$2x + 3y = 5$ Pendiente:$-\frac{2}{3}$, Ordenada en el origen: $\frac{5}{3}$	$x - y = 14$ Pendiente:1, Ordenada en el origen: -14	$2x - 5y = 1$ Pendiente:$\frac{2}{5}$, Ordenada en el origen: $-\frac{1}{5}$

S40. *a) Es una función afín. b) Pendiente = 1'8; Ordenada en el origen = 32*

c) F = 32 + 1,8·30 = 86 ºF.

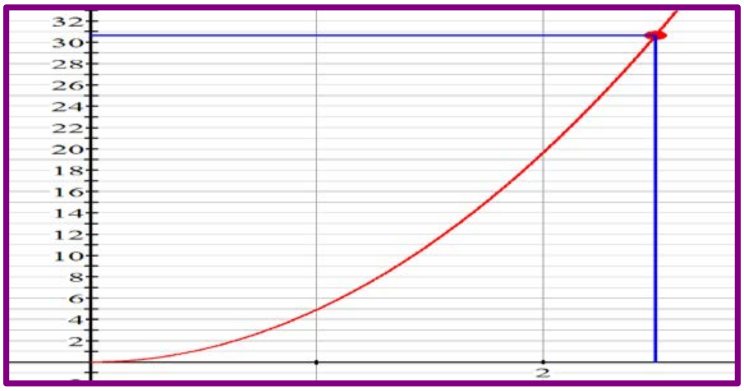
S41. $a = -4, b = 1.$ *Así* $y = -4x^2 + x$

S42. $y = x^2 - 4x + 3$

S43. $y = (8 - 2x)^2 \Rightarrow y = 4x^2 - 32x + 64$

S44. $\mathrm{y = (12 - x) \cdot x \Rightarrow y = 12x - x^2}$. El área máxima se obtiene en el vértice que es para x=6 metros, es decir, el área máxima se obtiene para el cuadrado.

S45. Resolvemos la ecuación $4{,}9 \cdot t^2 = 30{,}62$ y obtenemos que $t = 2{,}5$ segundos.



S46. El discriminante indica el número de soluciones de la ecuación de segundo grado y las soluciones de la ecuación son las primeras coordenadas de los puntos de corte con el eje X.

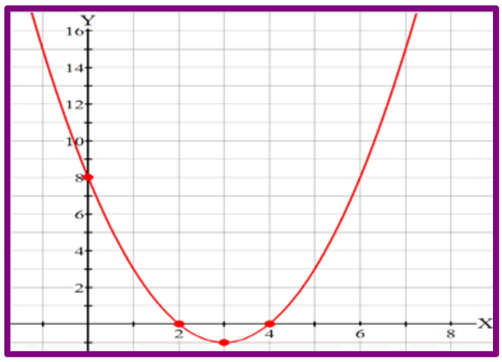
$y = x^2 - 5x + 6$ $(2{,}0)$ e $(3{,}0)$	$y = -x^2 - 5$ No corta al eje X	$y = x^2 - 8x + 16$ $(4{,}0)$	$y = x^2 - 5x$ $(0{,}0)$ y $(5{,}0)$

S47.

Vértice $(3, -1)$

Puntos de corte con el eje X: $(2, 0)$ y $(4{,}0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0{,}8)$

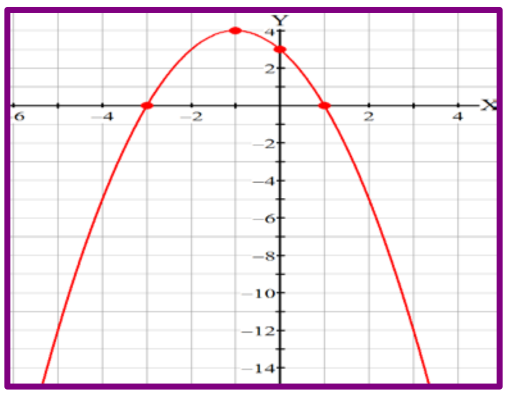


S48.

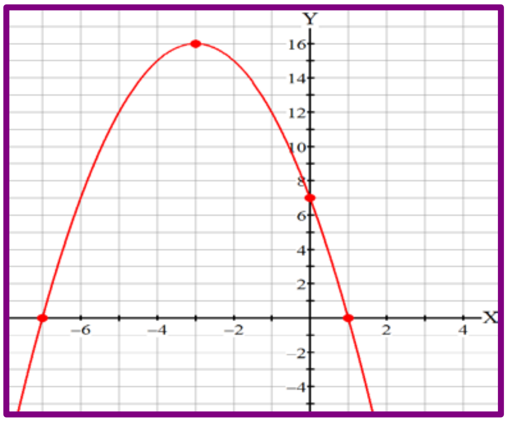
Vértice $(-1{,}4)$

Puntos de corte con el eje X: $(1, 0)$ y $(-3{,}0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0{,}3)$



S49.

Vértice $(-3,16)$ Puntos de corte con el eje X: $(1,0)$ y $(-7,0)$ Punto de corte con el eje Y: $(0,7)$	

S50.

$y = x^2 + 5x + 6$	$y = -x^2 - 5x - 8$	$y = x^2 - 4x + 4$	$y = x^2 + x + 1$
Discriminante positivo, por lo que corta el eje X en dos puntos.	Discriminante negativo, por lo que no corta el eje X.	Discriminante igual a 0, por lo que corta el eje X en un único punto.	Discriminante negativo, por lo que no corta el eje X.

S51. $k = \frac{1}{6}$ ya que el discriminante de la ecuación de segundo grado asociada a la función tiene que valer 0.

S52. $y = x \cdot (x + 4)$ *o bien* $y = x^2 + 4x.$

5. Glosario

E	▪ Eje de abscisas	Eje de las X o eje horizontal.
	▪ Eje de ordenadas	Eje de las Y o eje vertical.
F	▪ Función	Relación entre dos magnitudes en la que a cada valor de una magnitud se le asocia un único valor de la otra.
	▪ Función afín	Función que tiene como expresión un polinomio de 1º grado con término independiente distinto de cero y su representación gráfica es una línea recta.
	▪ Función constante	Función que mantiene siempre el mismo valor.
	▪ Función creciente	Función en la que al aumentar el valor de la variable x, aumenta el valor de la variable y.
	▪ Función decreciente	Función en la que al aumentar valor de la variable x, disminuye el valor de la variable y.
	▪ Función lineal	Función que tiene como expresión un polinomio de 1º grado sin término independiente y su representación gráfica es una línea recta.
I	▪ Imagen	Valor que le corresponde a un número mediante una función.
M	▪ Máximo absoluto	Punto en el que la ordenada toma el mayor valor.
	▪ Máximo relativo	Punto en el que su ordenada es mayor que la de todos los puntos de su alrededor.
	▪ Mínimo absoluto	Punto en el que la ordenada toma el menor valor.
	▪ Mínimo relativo	Punto en el que su ordenada es menor que la de todos los puntos de su alrededor.
O	▪ Ordenada en el origen	Término independiente de una función afín. Coincide con la segunda coordenada del punto en el que la función corta el eje de ordenadas.
P	▪ Pendiente	Coeficiente de primer grado en una función lineal o afín. Indica la inclinación de la recta.
V	▪ Vértice	Punto en el que la parábola cambia su crecimiento.

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- *Libros para a educación secundaria a distancia de adultos. Ámbito tecnolóxico-matemático.* Consellería de Educación e Ordenación Universitaria.
- *Matemáticas ESO 1.* Ed. Anaya 2016.
- *Matemáticas ESO 2.* Ed. Anaya.2016.
- *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas ESO 3.* Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas ESO 3.* Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas enseñanzas académicas ESO 3.* Ed. Santillana.
- *Matemáticas enseñanzas aplicadas ESO 3.* Ed. Santillana.

Enlaces de Internet

En estos enlaces puede encontrar trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://www.colexioabrente.com/descargas/mate/3eso/3eso3.2boletinfunciones.pdf
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_lineal/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_afin/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Tablas_y_expresiones_algebraicas/teg_0.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Interpretacion_graficas/Indice_graficas.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_cuadratica_parabola/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_4eso_B_funciones2/impresos/quincena9.pdf
- https://www.matematicasonline.es/terceroeso/mat3eso14.html
- http://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html
- http://www.vitutor.com/fun/1/graficas.html

- http://www.vitutor.com/fun/2/c_3_e.html
- http://www.vitutor.com/fun/2/c_4_e.html
- http://www.vitutor.com/fun/2/c_5_e.html
- http://www.vitutor.com/fun/2/r_e.html
- http://www.vitutor.com/fun/2/e_c.html
- https://matesenelinsti.files.wordpress.com/2012/05/repaso-funciones.pdf
- https://www.matematicasonline.es/terceroeso/mat3eso13.html
- https://www.math10.com/en/math-games/games/linear-functions/games-functions.html
- https://www.matesfacil.com/ESO/rectasparabolas/problemas-resueltos-rectas-parabolas.html
- http://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/3eso12funcioncuadratica.pdf