Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 3

Unidad didáctica 2

Geometría

Índice

1. Introducción

1.1 Descripción de la unidad didáctica

En esta unidad veremos cómo calcular los perímetros y las áreas de todos los polígonos y figuras circulares planas tanto aisladas como mezcladas unas con las otras. Estudiaremos también las áreas y volúmenes de figuras tridimensionales (poliedros, prismas, pirámides y cuerpos de revolución).

Seguiremos con el teorema de Tales y sus aplicaciones para el cálculo indirecto de longitudes y superficies y en los planos y escalas.

Finalizaremos la unidad con el estudio de las coordenadas geográficas.

1.2 Conocimientos previos

Para trabajar con esta unidad es necesario recordar los conceptos geométricos estudiados en los módulos anteriores, en especial:

- La clasificación, elementos y características de las figuras planas.
- La clasificación, nomenclatura, elementos y características de los poliedros y figuras de revolución.
- Los conceptos de figuras semejantes, razón de semejanza y escala.
- El teorema de Pitágoras
- La resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
- La resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

1.3 Criterios de evaluación

- Reconocer y describir los elementos y las propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas, incluyendo el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.
- Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener medidas de longitudes de ejemplos tomados de la vida real.
- Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

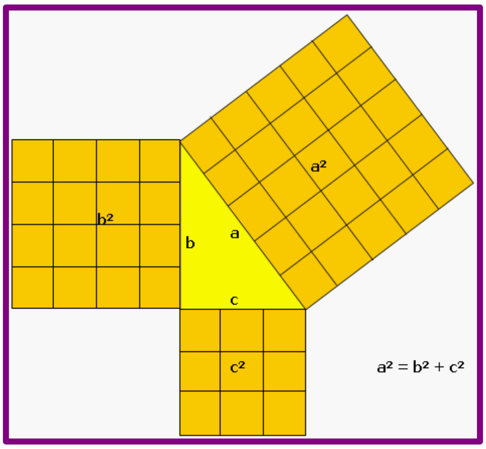
2. Secuencia de contenidos y actividades

2.1 Teorema de Pitágoras

Aunque el teorema de Pitágoras no es un contenido de esta unidad, lo incluimos aquí debido a la importancia que va a tener la utilización de este teorema en la resolución de las actividades.

En un triángulo rectángulo el lado de mayor longitud se llama **hipotenusa**, y los otros dos, de menor longitud y perpendiculares entre sí, **catetos**. En general llamaremos ***a*** a la hipotenusa y ***b*** y ***c*** a los catetos.

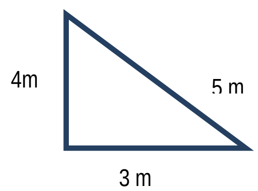
El **teorema de Pitágoras** afirma lo siguiente: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$. Esto quiere decir que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Esta relación es cierta sólo si el triángulo es rectángulo.



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Actividad resuelta

Determine si el triángulo siguiente es un triángulo rectángulo o no lo es.



Sí es rectángulo, ya que:

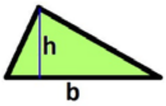
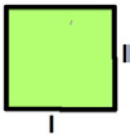
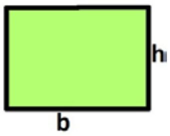
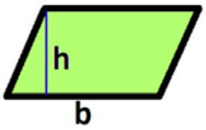
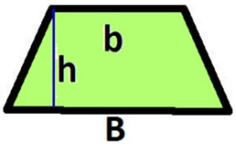
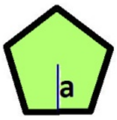
$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$25 = 25$$

2.2 Geometría en el plano

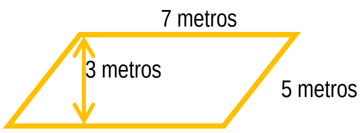
2.2.1 Perímetros y áreas de polígonos

Ya vimos en el módulo I la definición de polígono, su clasificación y la forma de calcular su área y su perímetro. En la tabla siguiente tenemos un resumen de todo esto.

Nombre	Figura	Perímetro	Área
Triángulo		$P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Cuadrado		$P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$ $= 4 \cdot l$	$A = l \cdot l$
Rectángulo		$P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$ $= 2b + 2h$	$A = b \cdot h$
Romboide		$P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$	$A = b \cdot h$
Rombo		$P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$ $= 4 \cdot longitud\ del\ lado$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio		$P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Polígonos regulares		$P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$ $= número\ de\ lados \cdot longitud\ del\ lado$	$A = \frac{P \cdot a}{2}$
Polígonos irregulares		$P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$	*Los descomponemos en cualquiera de las figuras anteriores, generalmente triángulos, y sumamos las áreas de cada uno de ellos.*

Actividades resueltas

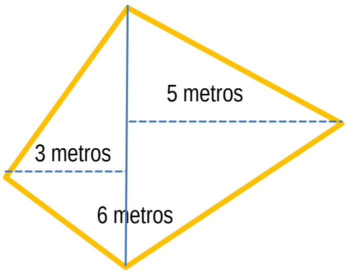
Calcule el área y el perímetro de la figura siguiente:



$$Área = base \cdot altura = 7 \cdot 3 = 21\ m^2$$

$$Perímetro = suma\ de\ los\ lados =$$
$$= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 10 + 14 = 24\ m$$

Calcule el área de la figura siguiente:



El área del triángulo de la izquierda es:

$$A_1 = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ m^2$$

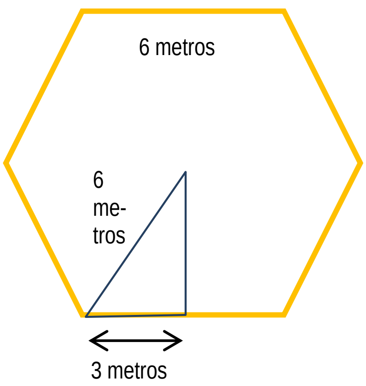
El área del triángulo de la derecha es:

$$A_2 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15\ m^2$$

El área total es:

$$A_T = 9 + 15 = 24\ m^2$$

Calcule el área y el perímetro de un hexágono regular de 6 metros de lado.



El perímetro es:

$$P = 6 \cdot 6 = 36\ metros$$

El área es:

$$A = \frac{Perímetro \cdot apotema}{2}$$

Para el cálculo de la apotema (que llamaremos *a*) precisamos aplicar el teorema de Pitágoras a este caso y tenemos que:

$$6^2 = 3^2 + a^2 \Rightarrow 36 - 9 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{27} = 5{,}196\ metros$$

Así, el área es:

$$A = \frac{36 \cdot 5{,}196}{2} = 93{,}528\ m^2$$

Actividades propuestas

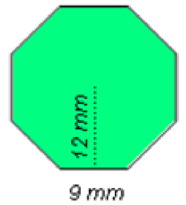
S1. Las diagonales de un rombo miden 15 cm y 22 cm. Calcule su área.

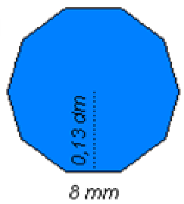
S2. Calcule el área y el perímetro de un triángulo rectángulo e isósceles de cateto 10 m.

S3. El perímetro de un triángulo isósceles mide 60 cm y el lado desigual 15 cm. ¿Cuánto miden cada uno de los otros lados?

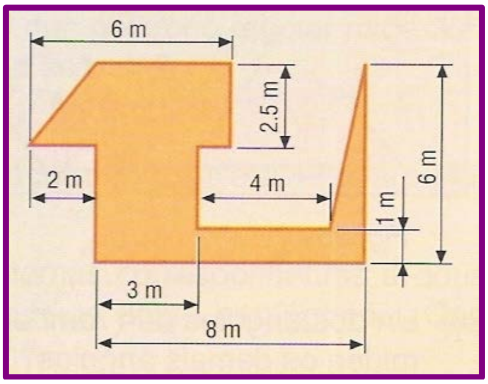
S4. Un atleta entrena en una pista rectangular de 42 m de largo por 18 m de ancho. ¿Cuántos metros llevará recorridos cuando haya dado 20 vueltas a la pista?

S5. Calcule el área de los polígonos regulares siguientes utilizando la fórmula idónea.

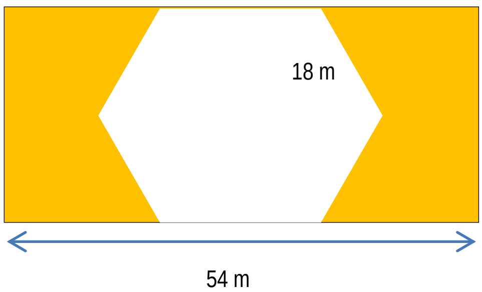




S6. Calcule el área de la figura siguiente por descomposición en figuras simples. Observe que para obtener las medidas que faltan debe sumar o restar algunas de las medidas que se indican.

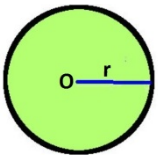
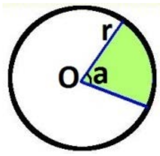
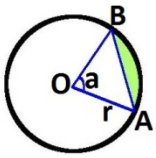
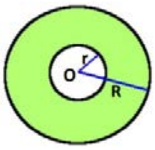
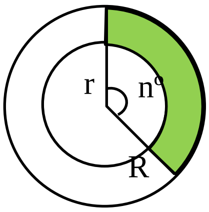


S7. Calcule el área de la parte coloreada de la figura siguiente.



2.2.2 Longitud y área de figuras circulares

Ya vimos en el módulo I otras figuras planas como el círculo y las formas que derivan de él. También vimos la forma de calcular su área y su perímetro. En la tabla siguiente tenemos un resumen de todo esto.

Nombre	Figura	Perímetro	Área
Círculo		$\boldsymbol{P = 2\pi r}$	$\boldsymbol{A = \pi \cdot r^2}$
Sector circular		$\boldsymbol{P = 2r + 2\pi r \cdot \frac{a}{360}}$	$\boldsymbol{A = \pi r^2 \cdot \frac{a}{360}}$
Segmento circular		$\boldsymbol{P = \overline{AB} + 2\pi r \cdot \frac{a}{360}}$	$\boldsymbol{A = A_{sector\ cirular} - A_{triángulo\ OAB}}$
Corona circular		$\boldsymbol{P = 2\pi(R + r)}$	$\boldsymbol{A = \pi(R^2 - r^2)}$
Trapecio circular		$\boldsymbol{P = longitud\ arco\ exterior}$ $\boldsymbol{+}$ $\boldsymbol{longitud\ arco\ interior}$ $\boldsymbol{+ 2 \cdot (R - r)}$	$A_{trapecio\ circ.} = \frac{n^o\ x\ \pi\ x\ (R^2 - r^2)}{360^o}$

Actividades resueltas

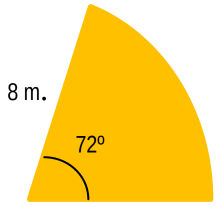
Calcule la longitud del arco de una circunferencia de radio 8 metros y que abarca un ángulo de 72º.

El arco de una circunferencia tiene por longitud $\boldsymbol{L = 2\pi r \cdot \frac{a}{360}}$, siendo *r* el radio de la circunferencia y *a* la amplitud del ángulo que abarca el arco. Por lo tanto, como en este caso $r = 8$ metros y $a = 72^o$, tenemos que: $\boldsymbol{L = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \frac{72}{360} = 10,05}$ metros

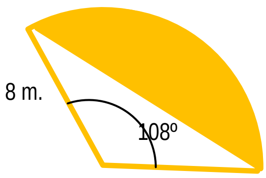
La longitud del arco de una circunferencia de radio 10 cm es de 12 cm. Calcule el ángulo que abarca dicho arco.

Aplicamos la expresión de la actividad anterior $L = 2\pi r \cdot \frac{a}{360}$, siendo *r* el radio de la circunferencia y *a* la amplitud del ángulo que abarca el arco. Por lo tanto, como en este caso $\mathrm{r} = 10$ cm y $\mathrm{L} = 12$ cm, tenemos que: $12 = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \frac{a}{360} \Rightarrow \frac{12 \cdot 360}{2 \cdot \pi \cdot 10} = a \Rightarrow a = 68{,}75^o$

Calcule el área del sector circular de una circunferencia de radio 8 metros y que abarca un ángulo de 72º.

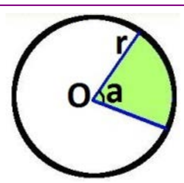
	El área de un sector circular es $\boldsymbol{A = \pi r^2 \cdot \frac{a}{360}}$, siendo *r* el radio de la circunferencia y *a* la amplitud del ángulo que abarca el arco. Por lo tanto, como en este caso $r = 8$ metros y $a = 72^{\circ}$, tenemos que: $\boldsymbol{A = \pi \cdot 8^2 \cdot \frac{72}{360} = 40,21}$ m²

Dada la figura siguiente, calcule el área de la región sombreada sabiendo que la longitud de la cuerda es de 12,94 metros.

	El área de un segmento circular es $\boldsymbol{A = A_{sector\ cirular} - A_{triángulo}}$. El área del sector circular es $\boldsymbol{A = \pi r^2 \cdot \frac{a}{360}}$, siendo *r* el radio de la circunferencia y *a* la amplitud del ángulo que abarca el arco. Por lo tanto, como en este caso $r = 8$ metros y $a = 108^{\circ}$, tenemos que: $\boldsymbol{A = \pi \cdot 8^2 \cdot \frac{108}{360} = 60,32}$ m² Para calcular el área del triángulo tenemos que calcular su altura para lo que utilizaremos el teorema de Pitágoras. Así, la altura es: $altura^2 = 8^2 - 6{,}47^2 \Rightarrow altura = 4{,}71$ metros Así el área del triángulo es: $A_{triángulo} = \frac{12{,}94 \cdot 4{,}71}{2} = 30{,}47$ metros El área de la zona sombreada es $60{,}32 - 30{,}47 = 29{,}85$ m²

Actividades propuestas

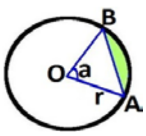
S8. Calcule el perímetro de los sectores circulares siguientes con los datos que se indican:

	$a = 45^{\circ} \quad r = 8\ cm$
	$a = 105^{\circ} \quad r = 10\ m$

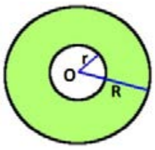
S9. Calcule el área de los sectores circulares de la actividad anterior.

S10. Si el área de un sector circular correspondiente a un círculo de 10 cm de radio es de 62,83 cm^2, ¿cuál es la amplitud del ángulo?

S11. Calcule el perímetro y el área de los segmentos circulares siguientes con los datos que se indican:

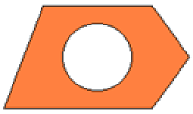
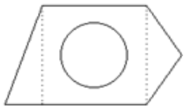
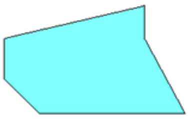
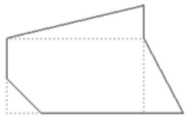
	$a = 45^{\circ} \quad r = 8\ cm \quad \overline{AB} = 6{,}12\ cm$
	$a = 105^{\circ} \quad r = 10\ m \quad \overline{AB} = 15{,}87\ m$

S12. Calcule el perímetro y el área de las coronas circulares siguientes con los datos que se indican:

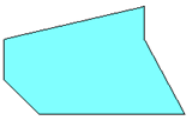
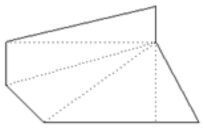
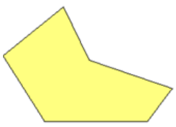
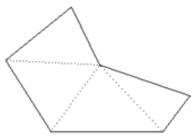
	$R = 9\ cm \quad r = 8\ cm$
	$R = 15\ m \quad r = 10\ m$

2.2.3 Perímetros y áreas de figuras planas en general

Muchas veces no es posible calcular el área de una figura porque no se corresponde con ninguna figura elemental de las estudiadas hasta ahora. En este caso hace falta descomponerla en figuras simples y calcular el área de cada una por separado. Veamos algunos ejemplos de descomposición de figuras complejas en figuras simples:

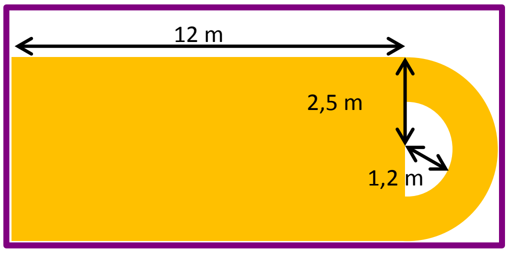
	
	

Otro procedimiento consiste en descomponer por triangulación la figura dada. En este caso la dificultad está en conocer las medidas de cada triángulo en que se descompone la figura.

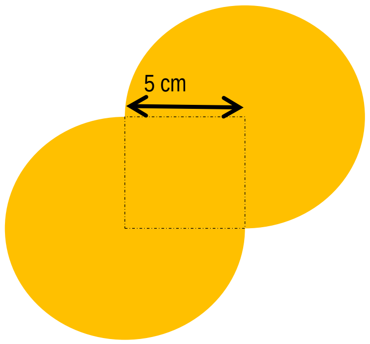
	
	

Actividades resueltas

Calcule el área de la figura siguiente:

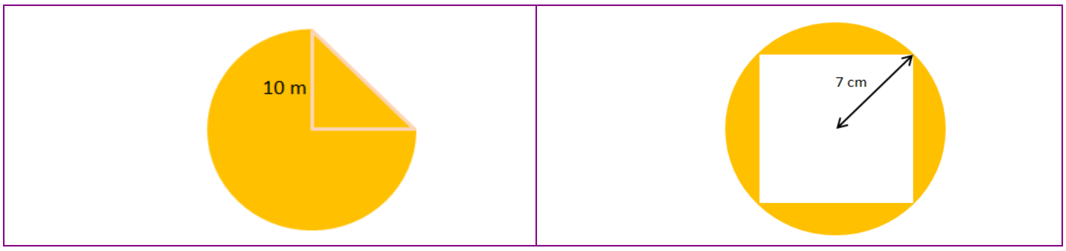
	Esta figura está compuesta por un rectángulo y por media corona circular. Área del rectángulo: $Área_{rectángulo} = 12 \cdot 5 = 60\ m^2$ Área de la media corona circular: $Área_{media\ corona} = \frac{\pi \cdot (2{,}5^2 - 1{,}2^2)}{2} = 7{,}56\ m^2$ Así, el área total es: $Área_{total} = 60 + 7{,}56 = 67{,}56\ m^2$

Calcule el área de la figura siguiente:

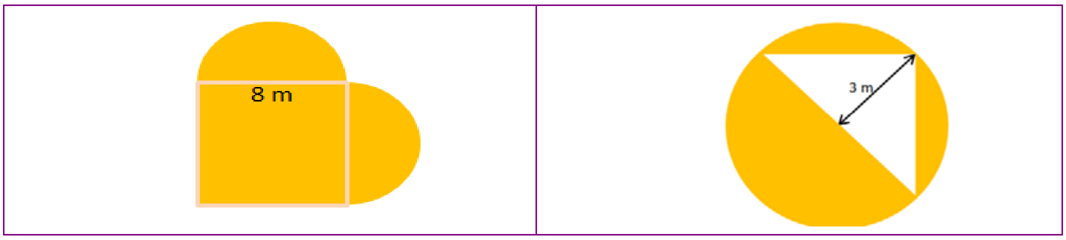
	Esta figura está compuesta por un cuadrado y dos figuras iguales que son dos sectores circulares. Área del cuadrado: $Área_{cuadrado} = 5^2 = 25\ cm^2$ Área del sector circular: $Área_{sector\ circular} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 270}{360} = 58{,}9\ cm^2$ Así, el área total es: $Área_{total} = 25 + 2 \cdot 58{,}9 = 142{,}8\ cm^2$

Actividades propuestas

S13. Calcule el área de las figuras siguientes:

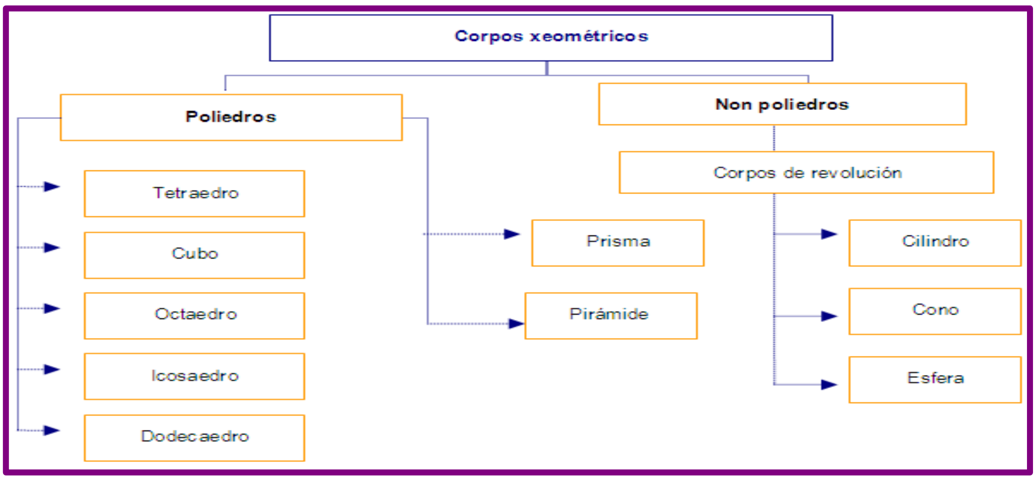


S14. Calcule el área de las figuras siguientes:



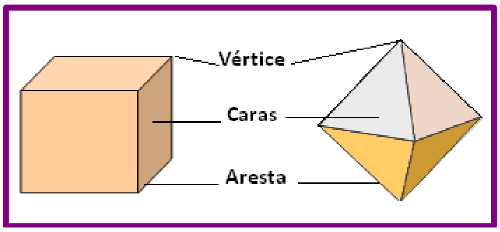
2.3 Geometría del espacio

Los cuerpos geométricos se dividen en poliedros (poliedros regulares, prismas y pirámides) y cuerpos de revolución (cilindros, esferas y conos).



Los **poliedros** son figuras tridimensionales limitadas por varios planos en forma de polígonos. Los elementos principales de un poliedro son:

- **Caras**: son los polígonos que limitan el poliedro.
- **Aristas**: son los segmentos comunes a dos caras.
- **Vértice**: es el punto del poliedro donde se juntan tres o más aristas.



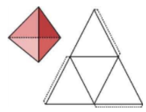
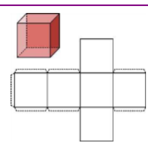
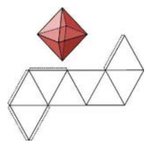
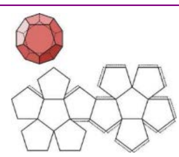
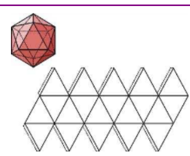
El número de caras, vértices y aristas está relacionado mediante la fórmula de Euler la cual enuncia:

caras + vértices = aristas + 2

2.3.1 Poliedros regulares

Un **poliedro regular** es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada uno de sus vértices converge el mismo número de caras.

Puesto que sus caras son polígonos regulares y en cada vértice deben coincidir por lo menos tres caras, las caras de los poliedros regulares sólo pueden ser triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares.

Nombre	Definición	Figura y desarrollo plano
▪ Tetraedro	Formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros.	
▪ Cubo o hexaedro	Formado por seis caras que son cuadrados.	
▪ Octaedro	Formado por ocho caras que son triángulos equiláteros.	
▪ Dodecaedro	Formado por doce caras que son pentágonos regulares.	
▪ Icosaedro	Formado por veinte caras que son triángulos equiláteros.	

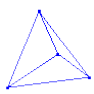
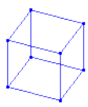
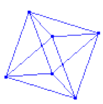
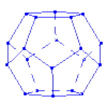
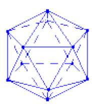
Áreas de los poliedros regulares. Como se puede ver en los desarrollos de la tabla anterior, las caras de cada uno de ellos son iguales, por lo que la superficie del poliedro se calcula multiplicando la superficie de una cara por el número de caras del poliedro.

También hay otra forma de calcular la superficie de los poliedros regulares en función de la longitud de la arista, que llamaremos "**a**". Así tenemos:

Nombre		Superficie	Volumen
	Tetraedro	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
	Cubo o hexaedro	$6a^2$	a^3
	Octaedro	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
	Dodecaedro	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
	Icosaedro	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$

Actividad propuesta

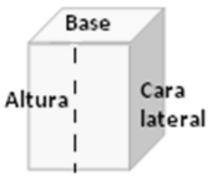
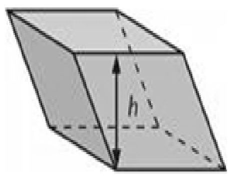
S15. Complete la tabla y compruebe que para los cinco poliedros regulares se cumple la fórmula de Euler: caras + vértices = aristas + 2

	Nombre	Caras	Vértices	Aristas	C + V = A + 2
	*Tetraedro*	*4*	*4*	*6*	*4+4=6+2*
					
					
					
					

2.3.2 Prismas

Un prisma es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos entre sí (que forman las bases) y las caras laterales (que son paralelogramos).

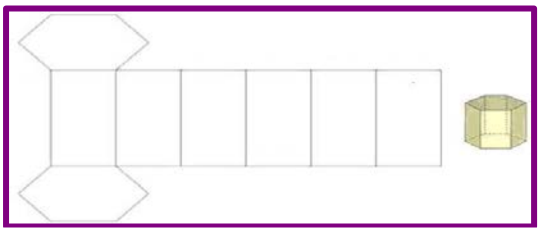
- La altura del prisma es la distancia entre las bases.
- **Un prisma es recto** si las caras laterales son perpendiculares a las bases. En este caso las caras laterales son rectángulos.
- Cuando las caras laterales no son perpendiculares a las bases, se dice que **el prisma es oblicuo**.
- Un prisma tiene tantas caras laterales como lados tienen los polígonos que forman las bases.
- Si las bases también son paralelogramos, los prismas se llaman **paralelepípedos**.

Prismas rectos. Tienen en las bases polígonos regulares (prismas regulares)	Prismas oblicuos. Las caras laterales no son perpendiculares a las bases
	

En función de que el tipo de polígono que forma las bases del prisma sea un triángulo, un cuadrado, un pentágono, etcétera, se denominan prismas triangulares, prismas cuadrangulares, prismas pentagonales, prismas hexagonales, etcétera.

Área o superficie de un prisma

Para calcular la superficie de un **prisma recto** podemos razonar a partir de su desarrollo plano:

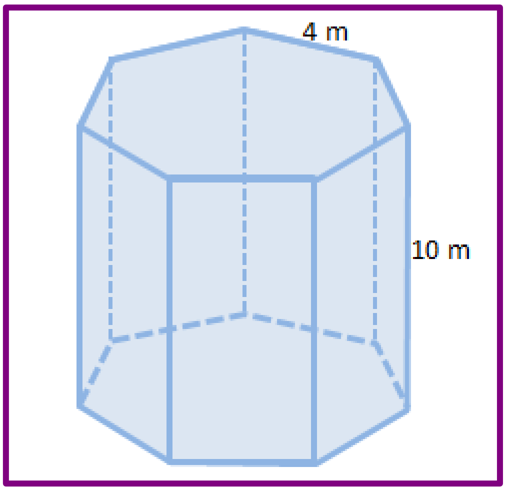


- **Área total** = área lateral + 2 área de la base
- **Área lateral**: A_L es la suma de las áreas de sus caras laterales (área lateral = perímetro de la base · altura (h))
- **Área de la base**: es el área del polígono correspondiente.

En el caso de un prisma oblicuo el cálculo del área es más complicado y puede verlo en el segundo enlace web del final del tema.

Actividad resuelta

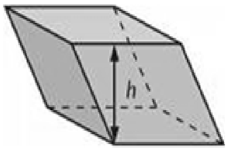
Calcule el área total del prisma siguiente: lado de la base 4 metros, altura 10 metros y apotema 4,15 metros.

	Se trata de un prisma recto heptagonal. 1º Calculamos el área lateral: $A_{lateral}$= perímetro de la base · altura = = (4 m · 7) · 10 cm = 280 m^2 2º Calculamos el área de la base: $A_{Base} = \frac{Perímetro\ de\ la\ base \cdot apotema}{2} = \frac{28 \cdot 4,15}{2} = 58,1\ m^2$ 3º Calculamos el área total: $Área_{total} = Área_{lateral} + 2 \cdot Área_{base} = 280 + 2 \cdot 58,1 = 396,2\ m^2$

Volumen de un prisma

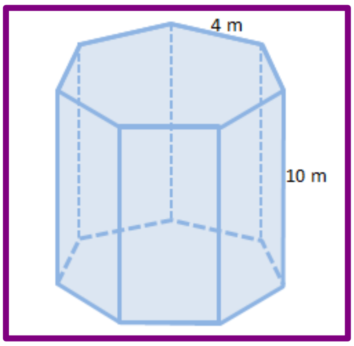
El volumen de un prisma cualquiera, recto u oblicuo, es el producto del área de la base por la altura.

Así, si la altura es *h* y el área de la base es A_B, el volumen será:

	$V_{prisma} = A_B \cdot h$

Actividad resuelta

Calcule el volumen del prisma siguiente: lado de la base 4 metros, altura 10 metros y apotema 4,15 metros.

	1º Calculamos el área de la base: $A_{Base} = \frac{perímetro\ de\ la\ base \cdot apotema}{2} = \frac{28 \cdot 4,15}{2} = 58,1\ m^2$ 2º Calculamos el volumen: $V = A_{Base} \cdot altura = 58,1 \cdot 10 = 581\ m^3$

Actividades propuestas

S16. Calcule la superficie de un ortoedro de dimensiones 12, 4 y 8 cm.

S17. Calcule el volumen de un cubo de 11 dm de arista.

S18. Calcule la superficie de un prisma hexagonal de lado de la base 15 cm y 0,5 m de altura.

S19. Las bases de un prisma recto son rombos de diagonales 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Calcule su volumen.

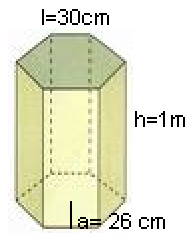
S20. La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios isósceles cuyas bases miden 11 cm y 16 cm, y la altura de la base es de 12 cm. Calcule el área total del prisma.

S21. Calcule el volumen de un prisma de base hexagonal de 10 cm de altura y de 3 cm de lado de la base.

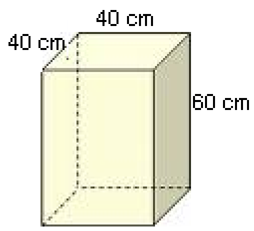
S22. Un prisma cuadrangular tiene una altura de 5 cm y la arista de su base mide 3 cm. Calcule su área total.

S23. Calcule el volumen de un prisma triangular de 6 cm de altura si la base es un triángulo equilátero de 8 cm de lado.

S24. Calcule la superficie y el volumen del cuerpo geométrico siguiente:



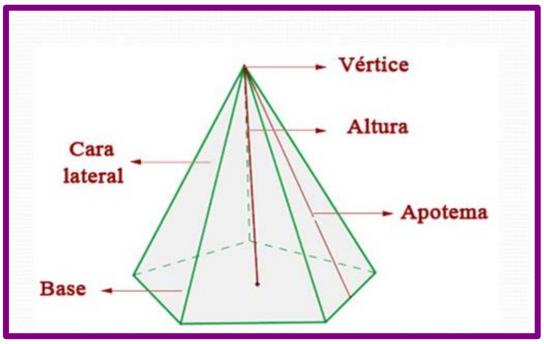
S25. Calcule la superficie y el volumen del cuerpo geométrico siguiente:



2.3.3 Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro que tiene como base un polígono cualquiera y como caras laterales triángulos con un vértice común, que se llama **vértice** de la pirámide.

- La altura de la pirámide es la distancia entre el vértice y el plano de la base.
- Una **pirámide es recta** si la altura es perpendicular a la base.
- Cuando la altura no es perpendicular a la base, se dice que la **pirámide es oblicua**.
- Las caras laterales de una pirámide son siempre triángulos.
- Una pirámide tiene tantas caras laterales como lados tiene la base.
- Una pirámide es regular si su base es un polígono regular.
- En una pirámide regular recta todas las aristas laterales son iguales y las caras laterales son triángulos isósceles. Las alturas de los triángulos se llaman **apotema** de la pirámide.

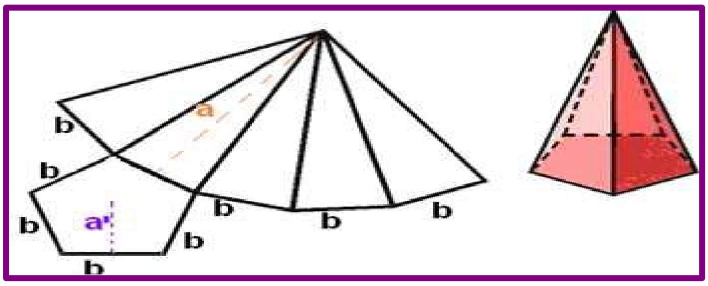


PIRÁMIDE RECTA DE BASE PENTAGONAL

En función de que el tipo de polígono que forma la base de la pirámide sea un triángulo, un cuadrado, un pentágono, etcétera, se denominan pirámides triangulares, pirámides cuadrangulares, pirámides pentagonales, pirámides hexagonales, etcétera.

Área o superficie de una pirámide

Para calcular la superficie de una **pirámide regular recta** podemos razonar a partir de su desarrollo plano:

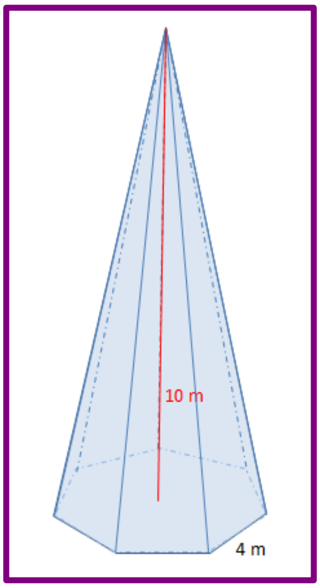


- **Área total** = área lateral + área de la base
- **Área lateral**: A_L es la suma de las áreas de sus caras laterales, que son triángulos iguales (área lateral = perímetro de la base · altura (h)/2).
- **Área de la base**: es el área del polígono correspondiente.

En el caso de una pirámide no regular habrá que calcular el área lateral triángulo a triángulo y después sumarlas.

Actividad resuelta

Calcule el área total de la pirámide siguiente de lado de la base 4 metros, altura 10 metros y apotema de la base 4,15 metros.



Se trata de una pirámide recta heptagonal.

1º Calculamos la apotema de la pirámide mediante el teorema de Pitágoras

$$apotema^2 = altura^2 + apotema\ base^2$$

$$apotema^2 = 10^2 + 4{,}15^2 = 117{,}2225 \Rightarrow apotema = 10{,}83\ m$$

2º Calculamos el área lateral:

$$A_{lateral} = \frac{perímetro\ de\ la\ base \cdot apotema\ de\ la\ pirámide}{2} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 10{,}83}{2} = 151{,}62\ m^2$$

3º Calculamos el área de la base:

$$A_{Base} = \frac{Perímetro\ de\ la\ base \cdot apotema}{2} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 4{,}15}{2} = 58{,}1\ m^2$$

4º Calculamos el área total:

$$Área_{total} = Área_{lateral} + Área_{base} = 151{,}62 + 58{,}1 = 209{,}72\ m^2$$

Volumen de una pirámide

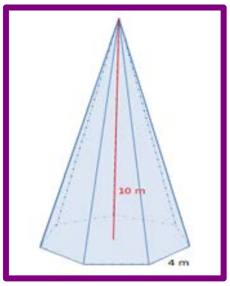
El volumen de una pirámide cualquiera, recta u oblicua, es el producto del área de la base por la altura, dividido por 3.

Así, si la altura es h y el área de la base es A_B, el volumen será:

$$V_{pirámide} = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

Actividad resuelta

Calcule el volumen de la pirámide siguiente de lado de la base 4 metros, altura 10 metros y apotema de la base 4,15 metros.



1º Calculamos el área de la base:

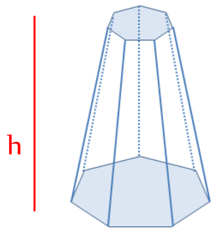
$$A_{Base} = \frac{perímetro\ de\ la\ base \cdot apotema}{2} = \frac{28 \cdot 4{,}15}{2} = 58{,}1\ m^2$$

2º Calculamos el volumen:

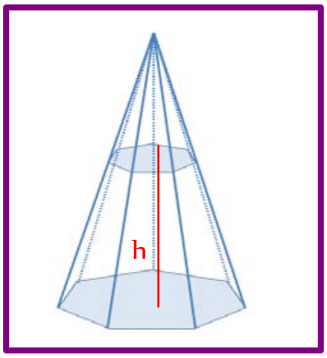
$$V = \frac{A_{Base} \cdot altura}{3} = \frac{58{,}1\ \cdot 10}{3} = 193{,}67\ m^3$$

Troncos de pirámide

Un **tronco de pirámide** es una pirámide a la que se le corta la parte del vértice con un corte paralelo a la base.



Para calcular su volumen tenemos que fijarnos en la figura siguiente:



En la figura de la izquierda tenemos un tronco de pirámide completado hasta formar una pirámide.

Podemos distinguir dos pirámides.

- Una grande desde la base inferior hasta el vértice.
- Una pequeña desde la base del medio hasta el vértice.

El volumen del tronco de pirámide es el volumen de la pirámide grande menos el volumen de la pirámide pequeña.

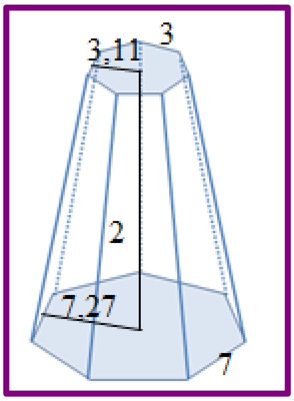
Para calcular el volumen solo tenemos que calcular la altura de la pirámide pequeña.

Para calcular su área tenemos que considerar que ahora tenemos dos bases y que las caras laterales son trapecios isósceles.

Veamos todo esto con un ejemplo.

Actividad resuelta

Un tronco de pirámide tiene sus bases regulares y heptagonales. La inferior tiene lados de 7 cm y su apotema mide 7,27 cm. Los lados de la cara superior miden 3 cm y su apotema 3,11 cm. Si tiene 2 cm de altura, calcule su superficie y su volumen.



1º Si completamos el tronco de pirámide hasta tener una pirámide completa obtenemos el triángulo de la parte inferior de la figura.

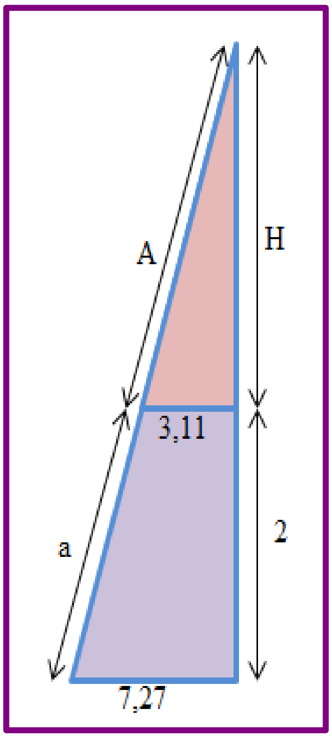
2º Calculamos *H*:

En la figura inferior tenemos dos triángulos semejantes. El de lados *H, A,* 3'11 y el de lados 2+*H, a*+*A*, 7'27.

Por lo tanto:

$$\frac{2+H}{H}=\frac{7,27}{3,11}\Rightarrow 3,11\cdot(2+H)=7,27\cdot H\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6,22+3,11\cdot H=7,27\cdot H\Rightarrow 6,22=4,16\cdot H\Rightarrow H=1,5\ cm$$



3º Calculamos *A* y *a*:

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo pequeño tenemos que:

$$A^2=H^2+3,11^2\Rightarrow A^2=1,5^2+3,11^2=11,92$$

Así $A=\sqrt{11,92}=3,45\ cm$ que es la apotema de la pirámide pequeña (la que no está)

Ahora aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo grande y tenemos que:

$$(A+a)^2=(H+2)^2+7,27^2\Rightarrow(A+a)^2=3,5^2+7,27^2=65,10$$

Así $A+a=\sqrt{65,10}=8,07\ cm$ que es la generatriz de la pirámide sin truncar.

La altura de las caras laterales de la pirámide truncada es:

$$a=8,07-3,45=4,62\ cm.$$

4º Calculamos el volumen del tronco de la pirámide

$$V=V_{grande}-V_{cortada}=\frac{\frac{7\cdot 7\cdot 7,27}{2}\cdot 3,5}{3}-\frac{\frac{7\cdot 3\cdot 3,11}{2}\cdot 1,5}{3}$$

$$=191,47\ cm^3$$

5º Calculamos la superficie.

Superficie inferior

$$\frac{7\cdot 7\cdot 7,27}{2}=178,12\ cm^2$$

Superficie superior

$$\frac{7\cdot 3\cdot 3,11}{2}=32,66\ cm^2$$

Superficie lateral

$$7\cdot\left(\frac{7+3}{2}\cdot 4,62\right)=161,7\ cm^2$$

Superficie total $=178,12+32,66+161,7=372,48\ m^2$

Actividades propuestas

S26. Calcule el área total de una pirámide cuadrangular de apotema 6 cm y 4 cm de lado del cuadrado de la base.

S27. Calcule el volumen de una pirámide que tiene de base un cuadrado de 10 cm y una altura de 12 cm.

S28. Calcule el área total de una pirámide de base hexagonal que tiene 6 cm de altura y 3 cm de lado de la base. Tendrá que utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo de la apotema de la base y de la apotema de la pirámide.

S29. Calcule el volumen de una pirámide hexagonal regular, que tiene una base de lado 30 cm, una apotema del hexágono de 26 cm y la altura de la pirámide es 26 cm.

S30. Calcule el área total de una pirámide pentagonal de 9 cm de altura, cuyo polígono de la base es regular con 6 cm de lado y una apotema de 4,13 cm.

S31. Calcule el volumen de una pirámide de base pentagonal de 14 cm de lado, 9,63 cm de apotema de la base y 60 cm de apotema lateral.

S32. Una pirámide tiene por base un hexágono cuyos lados miden 10 m y la apotema 8,66 m. La apotema lateral de la pirámide es de 44 m. Calcule el área total.

S33. Una pirámide regular tiene por base un cuadrado de 8 cm de lado y su altura es de 10 cm. Calcule su volumen.

S34. Calcule la superficie de una pirámide regular de 80 cm de altura y de base hexagonal y lado de la base 30 cm.

S35. Calcule el área total de una pirámide hexagonal de 13 cm de altura que tiene como radio de la base 6 cm.

S36. La mayor de las tres pirámides que hay en Gizeh (Egipto) es la de Keops. Su base es un cuadrado que mide 230 m de lado, y su altura es de 147 m. Calcule el volumen de la pirámide.

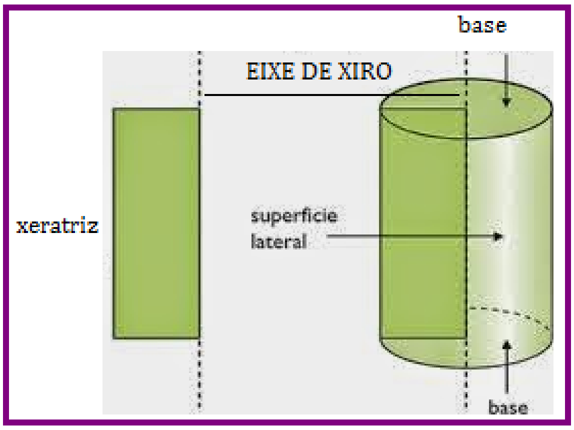
2.3.4 Cuerpos de revolución

Cuando giramos una figura plana alrededor de un eje obtenemos un cuerpo de revolución. Los tres cuerpos de revolución más importantes, y que vamos a estudiar, son el cilindro, el cono y la esfera.

Cilindro

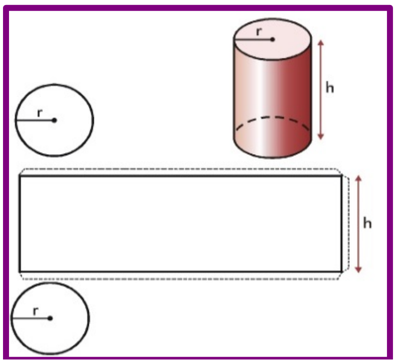
Un **cilindro recto** es un cuerpo geométrico generado a partir de un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

- Las **bases** de un cilindro recto son círculos.
- La distancia entre las bases se llama **altura**.
- La **generatriz** del cilindro corresponde a la longitud del lado opuesto al eje, es decir, coincide con la altura.



Área de un cilindro

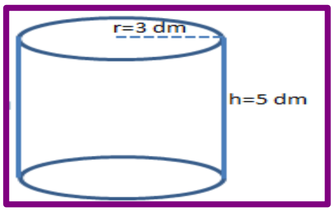
Al cortar un cilindro recto por su generatriz obtenemos su desarrollo en el plano y se aprecia que la pared lateral del cilindro es un rectángulo de base igual al perímetro del círculo, $2 \cdot \pi \cdot r$, y su altura, *h*, es la del cilindro.



$$\text{Área Lateral} = 2\pi r \cdot h$$
$$\text{Área Total} = \text{Área Lateral} + \text{Área de las dos bases}$$
$$A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Actividad resuelta

Calcule el área total de un cilindro de 3 dm de radio de la base y 5 dm de altura.

	$A_l = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}25\ dm^2$ $A_{tot} = 94{,}25 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 150{,}80\ \ dm^2$

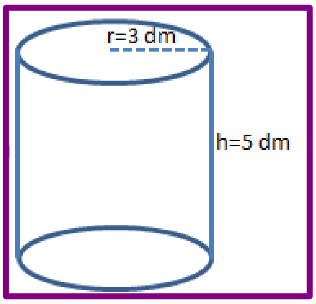
Volumen de un cilindro

El volumen de un cilindro se calcula igual que el volumen del prisma.
Así, si la altura es *h* y el área da base es A_B, el volumen será:

$$V_{cilindro} = A_B \cdot h$$

Actividad resuelta

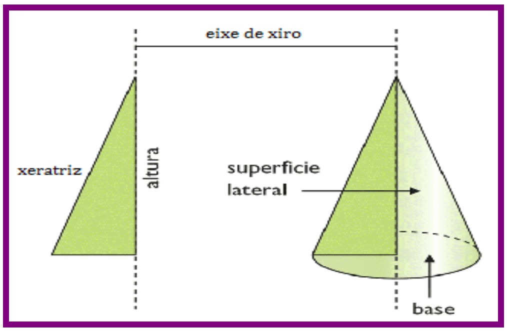
Calcule el volumen de un cilindro de 3 dm de radio de la base y 5 dm de altura.

	1º Calculamos el área de la base: $A_{Base} = \pi \cdot r^2 = 28{,}27\ dm^2$ 2º Calculamos el volumen: $V = A_{Base} \cdot altura = 28{,}27\ \cdot 5 = 141{,}35\ dm^3$

Cono

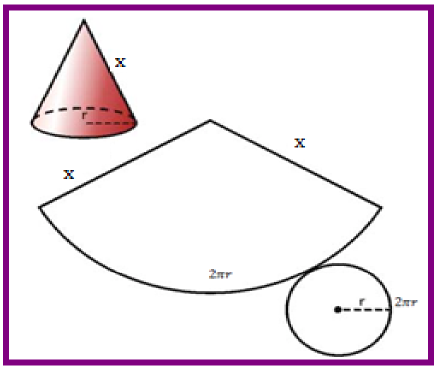
Haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos, se obtiene un **cono recto**.

- La **base** de un cono recto es un círculo.
- La **altura** es la distancia del vértice a la base.
- La **generatriz** del cono es la longitud de la hipotenusa del triángulo.



Área de un cono

Al cortar un cono recto por su generatriz obtenemos su desarrollo en el plano



Así, se puede apreciar que la superficie lateral de un cono recto es un sector circular de radio ***x*** y la porción de círculo que tiene este sector la podemos calcular de la forma siguiente:

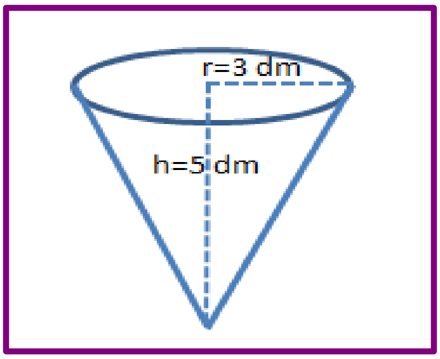
$$\frac{longitud\ de\ la\ circunferencia}{superficie\ del\ círculo} = \frac{longitud\ del\ arco}{superficie\ del\ sector}$$
$$\frac{2\pi x}{\pi x^2} = \frac{2\pi r}{A} \Rightarrow A = \frac{2\pi r \cdot \pi x^2}{2\pi x} = \pi r x$$

Por lo tanto:

$$\text{Área lateral} = \pi r x$$
$$\text{Área total} = \pi r x + \pi r^2$$

Actividad resuelta

Calcule el área total de un cono de 3 dm de radio de la base y 5 dm de altura.



1º Calculamos la longitud de la generatriz utilizando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} = 5{,}83\ dm$$

2º Calculamos la superficie lateral:

$$A_l = \pi \cdot 3 \cdot 5{,}83 = 54{,}95\ dm^2$$

3º Calculamos la superficie total:

$$A_{tot} = 54{,}95 + \pi \cdot 3^2 = 83{,}22\ \ dm^2$$

Volumen de un cono

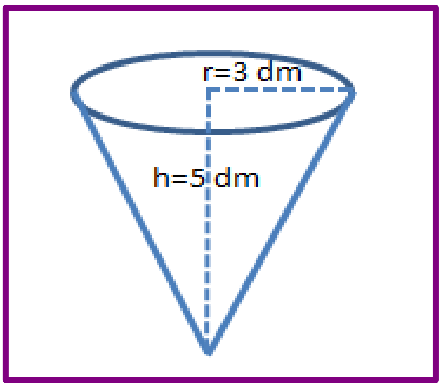
El volumen de un cono se calcula igual que el volumen de la pirámide.

Así, si la altura es *h* y el área de la base es A_B, el volumen será:

$$V_{cono} = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

Actividad resuelta

Calcule el volumen de un cono de 3 dm de radio de la base y 5 dm de altura.



1º Calculamos el área de la base:

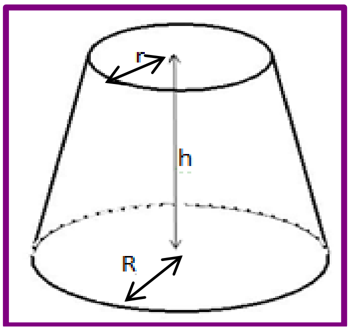
$$A_{Base} = \pi \cdot r^2 = 28{,}27\ dm^2$$

2º Calculamos el volumen:

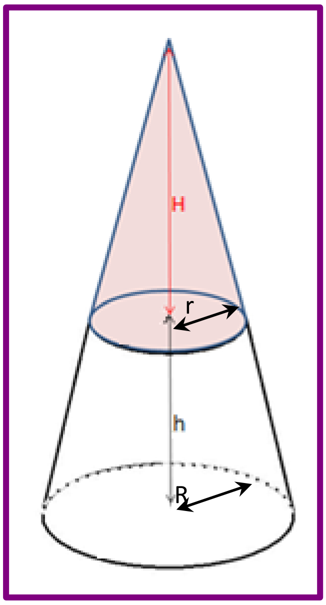
$$V = \frac{A_{Base} \cdot altura}{3} = \frac{28{,}27\ \cdot 5}{3} = 47{,}12\ dm^3$$

Tronco de cono

Un **tronco de cono** es un cono al que se le corta la parte del vértice con un corte paralelo a la base.



Para calcular su volumen tenemos que fijarnos en la figura siguiente:



En la figura de la izquierda tenemos un tronco de cono completado hasta formar un cono.

Podemos distinguir dos conos.

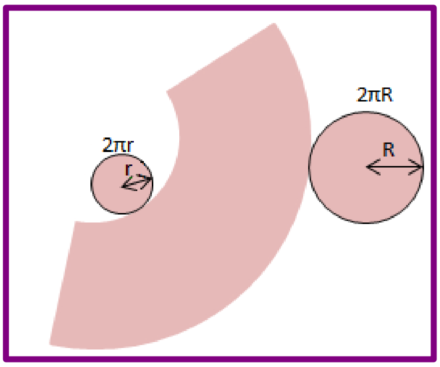
- Uno grande con la base de radio *R* y altura *h* + *H*.
- Uno pequeño con la base de radio *r* y altura *H.*

El volumen del tronco de cono es el volumen del cono grande menos el volumen del cono pequeño.

Para calcular le volumen solo tenemos que calcular *H*.

Esto lo haremos en la actividad resuelta siguiente.

Para calcular su área tenemos que fijarnos en la figura siguiente:



En la figura de la izquierda tenemos el desarrollo plano de un tronco de cono.

La superficie del tronco de cono está formada por:

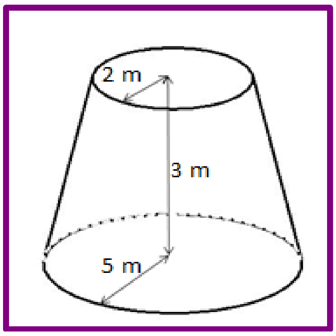
- Un círculo de radio *R*.
- Un círculo de radio *r*.
- La superficie lateral, que es un trapecio circular. Esta superficie es la superficie lateral del cono grande, del que hablábamos en la figura anterior, menos la superficie lateral del cono pequeño.

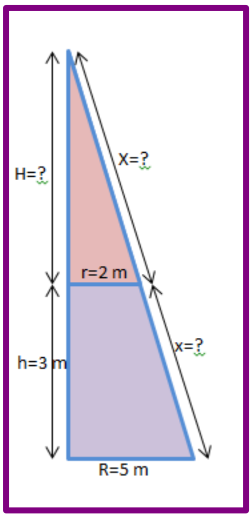
La superficie del tronco de cono es la suma de estas tres superficies.

La superficie lateral de un cono viene dada por la expresión $\pi r x$, siendo *x* la generatriz de los conos.
Por lo tanto, el único problema es calcular cuánto mide la generatriz de estos conos.

Actividad resuelta

Calcule el volumen y la superficie de un tronco de cono con radios R = 5 metros y r = 2 metros y que tiene una altura h = 3 metros.





1º Si completamos el tronco de cono hasta tener un cono completo, obtenemos el triángulo de la parte inferior de la figura.

2º Calculamos H:

En la figura inferior tenemos dos triángulos semejantes. El de lados *H, X, r* y el de lados *h + H, x + X, R.*

Por lo tanto

$$\frac{H+h}{H} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{H+3}{H} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (H+3) = 5 \cdot H \Rightarrow 2 \cdot H + 6 = 5H \cdot\Rightarrow 6 = 3 \cdot H \Rightarrow H = 2$$

Por lo tanto H=2 metros.

3º Calculamos *X* e *x:*

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo pequeño tenemos que

$$X^2 = H^2 + r^2 \Rightarrow X^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

Así $X = \sqrt{8} = 2{,}83\ m$, que es la generatriz del cono pequeño (el que no está)

Ahora aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo grande y tenemos que:

$$(X+x)^2 = (H+h)^2 + R^2 \Rightarrow (X+x)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

Así $X + x = \sqrt{50} = 7{,}07\ m$ que es la generatriz del cono sin truncar.

4º Calculamos el volumen del tronco de cono:

$$V = V_{grande} - V_{cortado} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 5}{3} - \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 2}{3} = 122{,}52\ m^3$$

5º Calculamos la superficie.

Superficie superior = $\pi \cdot 2^2 = 12{,}57\ m^2$

Superficie inferior = $\pi \cdot 5^2 = 78{,}54\ m^2$

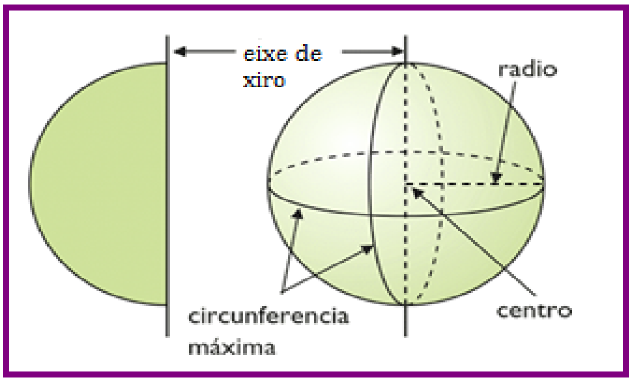
Superficie lateral = Superficie lateral entera – Superficie lateral cortada

$= \pi \cdot 5 \cdot 7{,}07 - \pi \cdot 2 \cdot 2{,}83 = 93{,}27\ m^2$

Superficie total $= 12{,}57 + 78{,}54 + 93{,}27 = 184{,}38\ m^2$

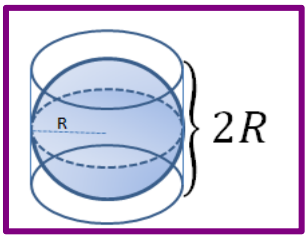
Esfera

Las esferas son cuerpos de revolución que se generan al hacer girar un semicírculo alrededor de su diámetro. La **esfera** queda determinada por su radio ***R***.



Área de una esfera

Para calcular la superficie de una esfera, imaginemos a esta envuelta en un cilindro que se ajusta a ella completamente.



Pues resulta que el área de la esfera es igual que el área lateral de ese cilindro.

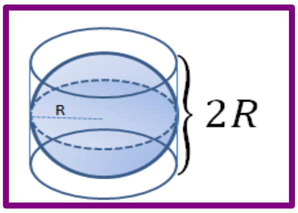
$$\boldsymbol{A}_{lateral\ do\ cilindro} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$

Por lo tanto la superficie de una esfera de radio *R* es:

$$\mathbf{A} = 4\pi R^2$$

Volumen de una esfera

Para calcular el volumen de una esfera, imaginémosla otra vez envuelta en un cilindro que se ajusta a ella completamente.



Pues resulta que el volumen de la esfera es igual a los dos tercios del volumen de ese cilindro.

Ya que el radio de la base del cilindro es el mismo que el de la esfera, ***R***, y la altura del cilindro es 2*R*, entonces el volumen del cilindro será:

$$\boldsymbol{V}_{cilindro} = A_{base} \cdot Altura = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

Entonces el volumen de una esfera de radio *R* es:

$$\mathbf{V} = \frac{2}{3} \cdot \mathrm{V}_{\mathrm{cilindro}} = \frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3$$

Actividad resuelta

Calcule la superficie y el volumen de una esfera de radio 2 metros.

1º Calculamos la superficie: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 50{,}27\ m^2$

2º Calculamos el volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 33{,}51\ m^3$

Actividades propuestas

S37. Indique la cantidad de chapa que se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 60 cm de radio de base y 1,8 m de altura.

S38. Las latas de refrescos tienen una forma cilíndrica de 12 cm de altura y 6 cm de diámetro. Calcule el volumen de refresco que cabe en él.

S39. Calcule el volumen de un cono de 11 cm de altura y 4 cm de radio.

S40. Calcule la superficie total de un tronco de madera con forma de cilindro recto, de 3 cm de altura y de diámetro de la base 30 cm.

S41. Determine el área total de un cono de 5 cm de radio y 20 cm de generatriz.

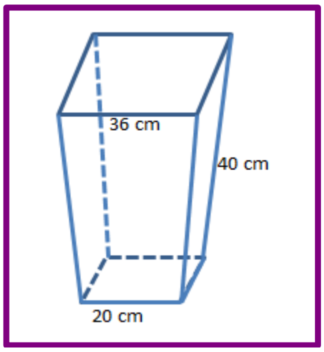
S42. Calcule la superficie esférica de un balón que tiene 20 cm de diámetro.

S43. Una cúpula semiesférica de un edificio tiene 10 m de diámetro y una altura de 5 m. Calcule su superficie.

S44. La pantalla de una lámpara de pie tiene forma de tronco de cono sin tener ninguna de las bases.

El diámetro de la base superior es de 19 cm y el de la inferior tiene 46 cm. La generatriz del tronco de cono mide 23 cm. Calcule la superficie de la pantalla.

S45. Una papelera tiene forma de tronco de pirámide de base cuadrada con las dimensiones que aparecen en la figura. Calcule el volumen de la papelera.

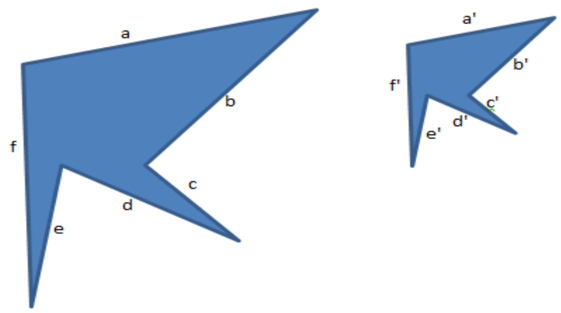


2.4 Teorema de Tales. Aplicaciones

2.4.1 Teorema de Tales

Figuras semejantes

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma pero diferente tamaño; por ejemplo un cuadro y su reproducción o un dibujo o figura y su copia reducida en la fotocopiadora. Así lo podemos observar en las figuras siguientes:



Cuando dos figuras son semejantes, la razón entre los lados homólogos es una constante que se denomina **razón de semejanza**. Así en la figura anterior podemos decir:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \frac{f}{f'} = r \quad \text{(razón de semejanza)}$$

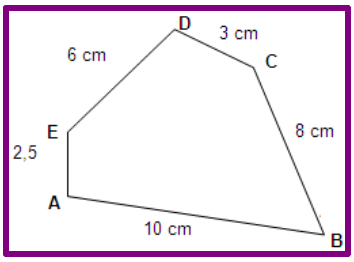
Cuando dos polígonos son semejantes, se da entre sus lados una relación de proporcionalidad: el cociente entre lados homólogos tiene el mismo valor y recibe el nombre de razón de semejanza. Se dice también que los lados son proporcionales.

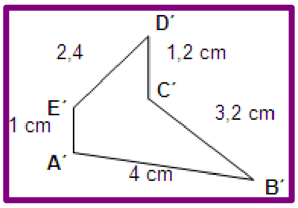
En general, para que dos polígonos sean semejantes tienen que tener los lados proporcionales y los ángulos iguales. Por lo tanto para decidir si dos polígonos son semejantes es necesario comprobar que todos los ángulos correspondientes son iguales y que todos los lados correspondientes son proporcionales con la misma razón de semejanza.

Para que dos polígonos sean semejantes no basta con que sus lados sean proporcionales.

Actividad resuelta

Indique si las figuras siguientes son semejantes o no lo son.





Claramente **no son semejantes** por no tener la misma forma, es decir **los ángulos de ambas figuras no son iguales**.

Es importante entender que en este ejercicio los lados sí que son proporcionales ya que:

$$\frac{10}{4} = \frac{8}{3{,}2} = \frac{3}{1{,}2} = \frac{6}{2{,}4} = \frac{2{,}5}{1} = 2{,}5$$

Actividad propuesta

S46. Indique cuáles de las figuras siguientes son necesariamente siempre semejantes:

Todos los cuadrados.	Todos los paralelogramos.
Todos los triángulos equiláteros.	Todos los rectángulos.
Todos los triángulos rectángulos.	Todos los triángulos isósceles.
Todos los pentágonos regulares.	Todos los rombos.
Todos los hexágonos.	Todos los hexágonos regulares

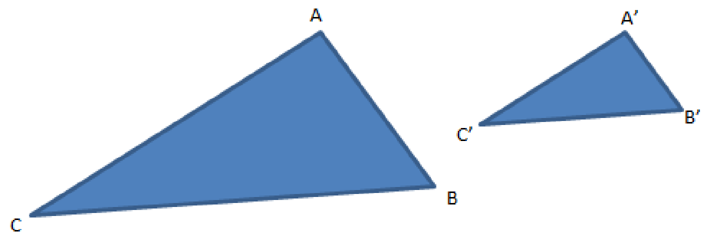
Triángulos semejantes

Como cualquier otra figura, dos triángulos son semejantes cuando tienen todos sus ángulos correspondientes iguales y además los lados correspondientes son proporcionales.

Pero para comprobar si dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar todo eso.

Para que dos triángulos sean semejantes se tiene que cumplir alguna de las tres condiciones siguientes:

- Todos los ángulos correspondientes de los triángulos son iguales.

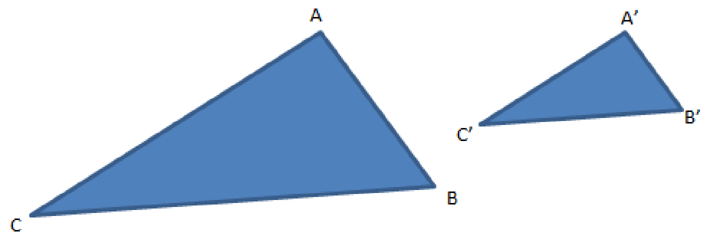


$$\hat{A} = \widehat{A'}$$

$$\hat{B} = \widehat{B'}$$

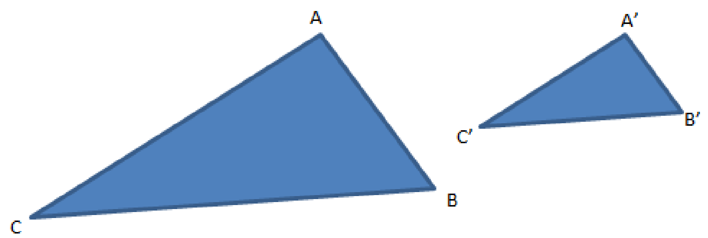
$$\hat{C} = \widehat{C'}$$

- Todos los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

- Dos lados correspondientes son proporcionales y el ángulo que forman es el mismo en ambos triángulos.

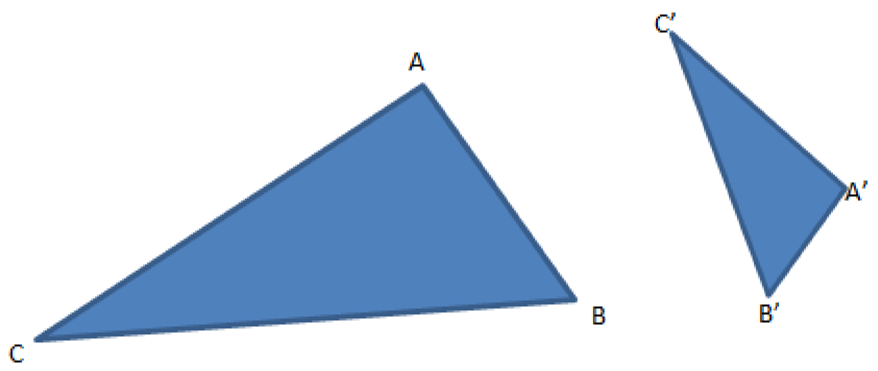


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\hat{B} = \widehat{B'}$$

Actividad resuelta

Calcule la longitud del lado A’B’, sabiendo que $\widehat{A} = 92^{o}$, $\widehat{B} = 47^{o}$, $\widehat{A'} = 92^{o}$, $\widehat{B'} = 47^{o}$, la longitud del lado AB es de 10 cm, la del lado BC de 25 cm y la del lado B’C’ de 5 cm.



1º Los triángulos son semejantes, pues al tener dos ángulos iguales el tercero también lo es (recuerde que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180º).

2º Como nos dan las longitudes de dos lados correspondientes (uno de cada triángulo), podemos calcular la razón de semejanza:

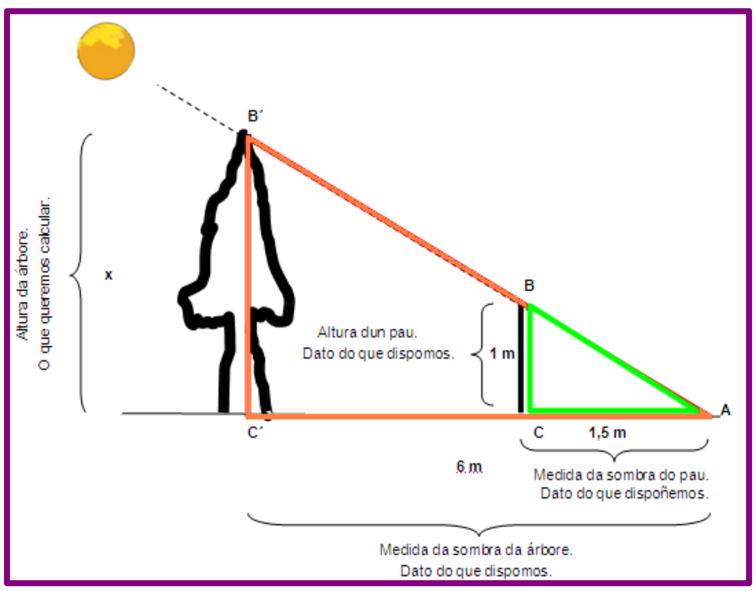
$$r = \frac{B'C'}{BC} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

3º Ahora calculamos la longitud del lado A’B’.

$$0{,}2 = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{10} \Rightarrow 0{,}2 \times 10 = A'B' \Rightarrow A'B' = 2\ cm$$

Actividad resuelta

Podemos calcular la altura de un árbol midiendo la longitud de su sombra y comparándola con la longitud de la sombra de un objeto conocido.



Aplicando las relaciones de proporcionalidad entre los lados de triángulos semejantes, en este caso los triángulos AB´C´ y ABC, calculamos:

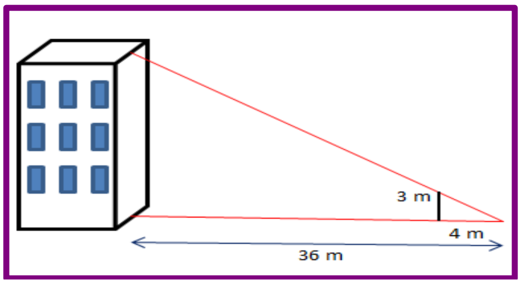
$$\frac{x}{1} = \frac{6}{1{,}5}$$

$$x = \frac{6 \cdot 1}{1{,}5}, \qquad x = 4m$$

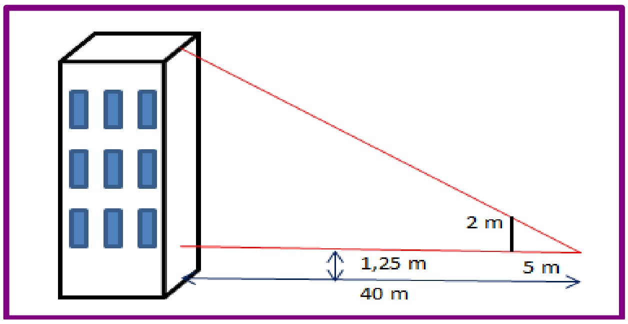
Así calculamos que la altura del árbol es de 4 metros.

Actividad propuesta

S47. Calcule la altura del edificio.

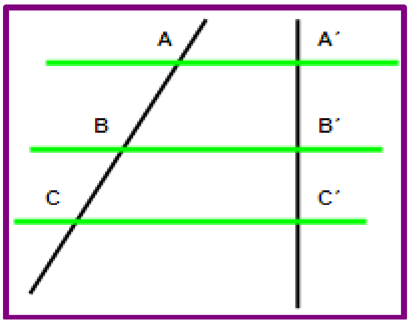


S48. Calcule la altura del edificio.



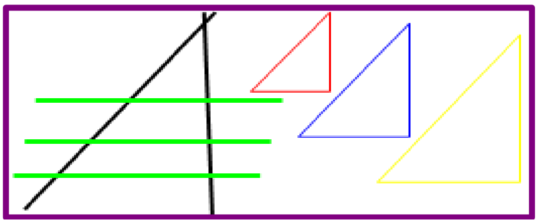
Teorema de Tales

Cuando dos o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, los segmentos de las rectas transversales son proporcionales.



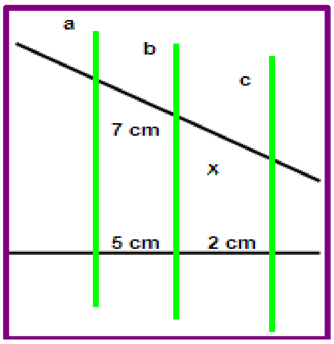
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Esto es una generalización de las condiciones de semejanza de triángulos pues, como podemos ver en la figura siguiente, si prolongamos las transversales hasta que se cortan obtenemos triángulos semejantes ya que todos ellos tienen los mismos ángulos.



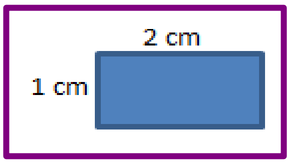
Actividad propuesta

S49. Las rectas *a*, *b* e *c* son paralelas. Calcule la longitud de *x*.



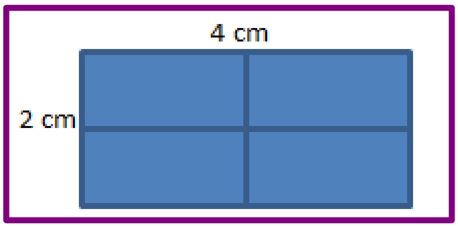
2.4.2 Relación entre áreas y volúmenes de figuras semejantes

Este es un rectángulo de dimensiones 1 cm x 2 cm,



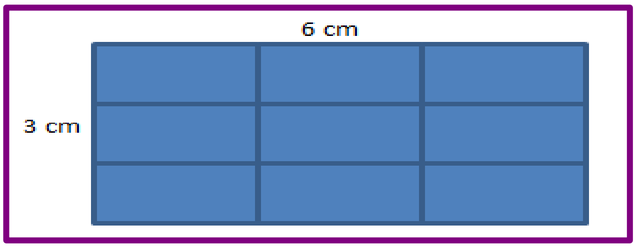
que tiene un área de 2 cm^2.

Un rectángulo semejante a él con razón de semejanza $r = 2$ es:



que tiene un área de 8 cm^2. El área del nuevo rectángulo es 4 veces mayor que la del rectángulo original. Resulta que 4 es el cuadrado de la razón de semejanza $r^2 = 2^2 = 4$.

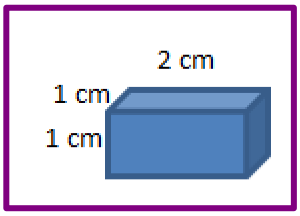
Otro rectángulo semejante al primero pero con razón de semejanza $r = 3$ es:



que tiene un área de 18 cm^2. El área del nuevo rectángulo es 9 veces mayor que la del rectángulo original. Resulta que 9 es el cuadrado de la razón de semejanza $r^2 = 3^2 = 9$.

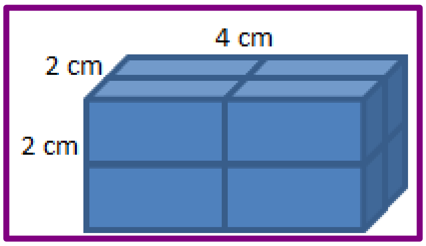
Estas relaciones las podemos generalizar para cualquier razón de semejanza: **Cuando una figura plana es transformada en otra semejante con una razón de semejanza *r*, el área de la nueva figura es el área de la figura original multiplicada por r^2.**

Este es un paralelepípedo de dimensiones 1 cm x 1 cm x 2 cm,



que tiene un volumen de 2 cm^3.

Un paralelepípedo semejante a él con razón de semejanza $r = 2$ es:



que tiene un volumen de 16 cm^3. El volumen del nuevo paralelepípedo es 8 veces mayor que el del paralelepípedo original. Resulta que 8 es el cubo de la razón de semejanza $r^3 = 2^3 = 8$.

Esta relación la podemos generalizar para cualquier razón de semejanza: **Cuando una figura es transformada en otra semejante con una razón de semejanza *r*, el volumen de la nueva figura es el volumen de la figura original multiplicada por r^3.**

Actividad resuelta

Las áreas de dos rectángulos semejantes son de 1 m^2 e 1 cm^2 respectivamente. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Lo primero que debemos hacer es poner las superficies en las mismas unidades. Vamos a expresarlas en cm^2.

$$1\ m^2 = 10.000\ cm^2$$

Así, la razón entre las superficies es:

$$\frac{10.000}{1} = 10.000$$

Pero la razón entre las áreas es r^2, por lo que:

$$r^2 = 10.000 \Rightarrow r = \sqrt{10.000} = 100$$

Así el primero de los rectángulos es 100 veces mayor que el segundo.

Actividades propuestas

S50. Las alturas de dos cilindros semejantes están en relación 4:5. Calcule la relación entre los volúmenes de los cilindros.

S51. Un producto para la limpieza de los baños se vende en dos tamaños: normal y familiar. El normal contiene 500 ml y el familiar contiene 750 ml. Los envases de ambos tamaños son semejantes. Si la altura del envase normal es de 12 cm, ¿cuál es la altura del envase familiar?

S52. Compramos un coche de juguete que está hecho a escala a partir de un coche real. La longitud del coche de juguete es 50 veces más pequeña que la longitud del coche real. Calcule la relación entre el volumen del coche real y el volumen del juguete.

2.4.3 Mapas y escalas

Los planos de una casa o los mapas de un lugar son **semejantes** a la realidad. En ellos, además de la distribución de lugares, importan los tamaños y las distancias, por eso llevan una escala.

- La escala es el cociente entre cada longitud de la reproducción, sea plano o mapa, y la correspondiente longitud en la realidad. Es decir, es la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.
- La escala utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad. Por ejemplo 1:2.000 quiere decir que 1 cm en el plano o mapa equivale a 2.000 cm en la realidad; o lo que es lo mismo: 1 cm en el mapa equivale a 20 metros en la realidad.

Actividades resueltas

Esta fotografía del retablo de la iglesia de la Virxe da Antiga de Monforte de Lemos está a escala 1:150. ¿Cuál es la altura del retablo en la realidad si en la foto mide 5 cm?

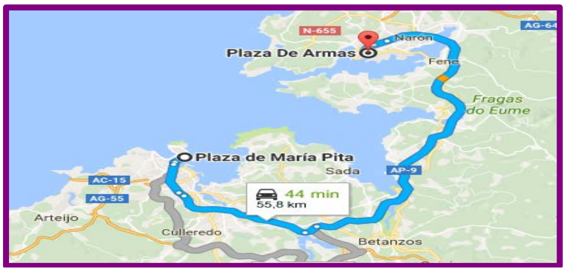
Ya que la fotografía y el retablo en la realidad son figuras semejantes, aplicamos la igualdad de razones de semejanza:

$$\frac{1}{150} = \frac{5}{x}$$

$$x = 150 \cdot 5 = 750\ cm$$

750 cm =7,5 metros es la altura del retablo

La distancia en línea recta entre A Coruña y Ferrol son 19,13 km, en el mapa la distancia en línea recta entre estas dos ciudades es de 3,826 cm. ¿A qué escala está dibujado el mapa?

	19,13 km=1913000 cm $\frac{3,826}{1.913.000}=\frac{1}{x}$ $x=\frac{1.913.000\cdot 1}{3,826}=500.000$ El mapa está a una escala 1:500.000

Actividades propuestas

S53. Tenemos un plano de una casa. En el plano el largo de un dormitorio es de 4 cm. En la realidad, el largo de ese dormitorio es de 3 metros. ¿Cuál es la escala del plano? ¿Cuántos metros mide el pasillo en la realidad si en el plano mide 7 cm?

S54. Un mapa está a escala 1:500.000. ¿A cuántos quilómetros estarán dos ciudades que en el mapa están separadas 12,5 cm?

2.5 Coordenadas geográficas. Longitud y latitud

2.5.1 Coordenadas geográficas

En los mapas se señalan líneas imaginarias que ayudan a localizar puntos en la superficie terrestre. Son las coordenadas geográficas.

En estas líneas imaginarias tenemos:

- **Ecuador**: línea imaginaria que divide a la Tierra en dos hemisferios: el hemisferio norte y el hemisferio sur.
- **Paralelos**: circunferencias imaginarias paralelas al ecuador. Hay unos paralelos con nombre propio: **trópico de Cáncer**, al norte, y **trópico de Capricornio**, al sur. Cerca de los polos se sitúan el **círculo polar ártico** y el **círculo polar antártico**.
- **Meridianos**: circunferencias imaginarias que cruzan los polos. El de referencia es el meridiano 0º o **meridiano de Greenwich**, a partir del cual se ordenan los demás al este y al oeste.

Al ser la Tierra esférica, tiene 360º de circunferencia. A cada meridiano y a cada paralelo le corresponde un grado.

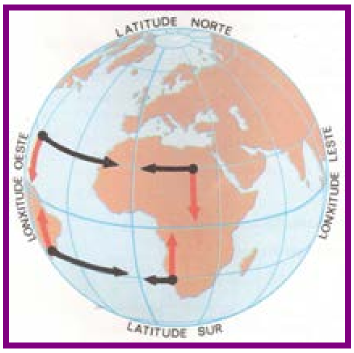
Los meridianos van desde el 180º al este al 180º al oeste partiendo en ambos casos del meridiano de Greenwich.

Los paralelos van desde el 90º norte al 90º sur, partiendo en ambos casos desde el ecuador hacia los polos.

2.5.2 Longitud y latitud

Los meridianos y los paralelos nos permiten situar con precisión cualquier punto de la superficie terrestre mediante la longitud y la latitud:

- **Longitud**: es la distancia, medida en grados, minutos y segundos, entre el meridiano 0º o de Greenwich y un punto cualquiera de la superficie terrestre. Los meridianos situados al oeste de Greenwich tienen longitud oeste. Los ubicados al este de Greenwich, longitud este.
- **Latitud**: es la distancia, medida en grados, minutos y segundos, entre el ecuador y un punto cualquiera de la superficie terrestre. Los lugares situados en el hemisferio norte tienen latitud norte. Los del hemisferio sur, latitud sur.



Las coordenadas geográficas de Santiago de Compostela son: Latitud: 42°52′49″ N; Longitud: 8°32′44″ O.

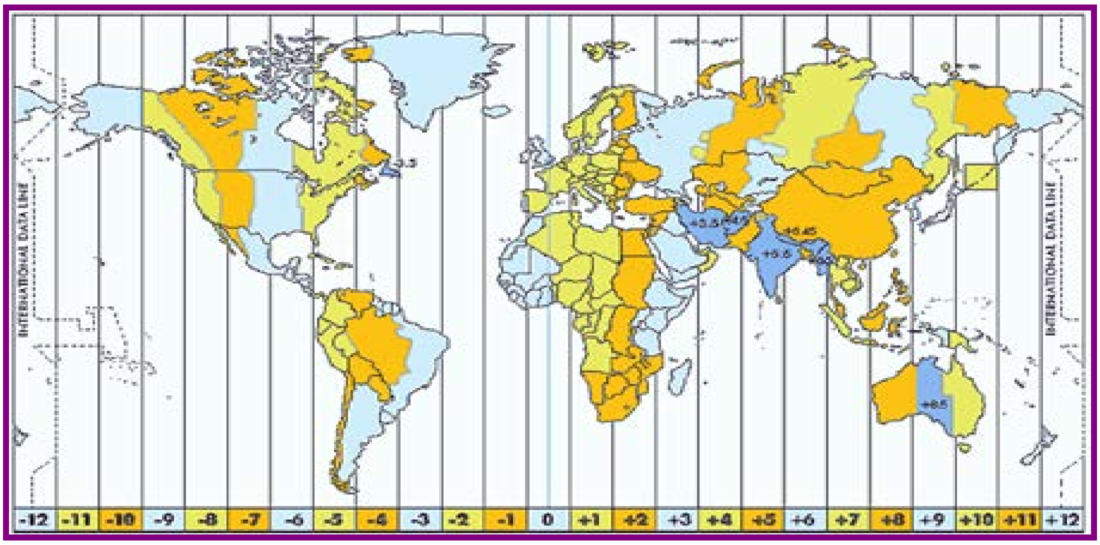
2.5.3 Husos horarios

Un día es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa sobre sí misma. Un día tiene 24 horas. Como una circunferencia completa tiene 360º, en una hora la Tierra “se mueve” sobre sí misma 15º pues:

$$\frac{360}{24} = 15^{\circ}$$

Si tomamos como punto de referencia el meridiano 0º o de Greenwich, podemos saber el día y la hora en cualquier parte de la Tierra valiéndonos de los husos horarios. El huso horario es cada una de las 24 partes en que se dividió la esfera terrestre por el ecuador para señalar la variación horaria. El valor de cada huso es de 15º y corresponde a una hora.

Si viajamos hacia el este, adelantaremos una hora por cada huso horario. En cambio, si vamos hacia el oeste, retrasamos una hora, ya que el movimiento de rotación de la Tierra va de oeste a este.



Husos horarios

En la línea del cambio de fecha, los que vienen del oeste retrasan un día en el calendario. Los que proceden del este lo adelantan.

Actividad resuelta

En un barco recorremos, siguiendo siempre el mismo paralelo, desde la longitud 100º L hasta 40º O. ¿Cuántos husos horarios visitamos incluyendo el de salida y el de llegada? ¿Cuál es la diferencia horaria entre los puntos de salida y de llegada?

Como

$$\frac{100}{15} = 6{,}67$$

desde el meridiano de Greenwich hasta el punto de salida hay 6 husos horarios completos y parte de un séptimo huso.

Del mismo modo, como

$$\frac{40}{15} = 2{,}67$$

desde el meridiano de Greenwich hasta el punto de llegada hay 2 husos horarios completos y parte de un tercer huso.

Por lo tanto salimos de un huso horario, recorremos ocho husos completos y llegamos al huso horario de destino. En total 10 husos horarios diferentes.

Como hacemos nueve cambios de huso horario, hay 9 horas de diferencia; y como viajamos hacia el oeste, en el huso horario de llegada son 9 horas más tarde que en el huso de partida.

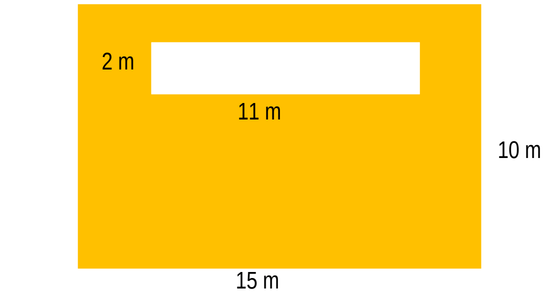
Actividades propuestas

S55. ¿Cuál es la diferencia horaria entre un punto con coordenadas geográficas 39°54′26″ N, 116°23′50″ E, y otro con las coordenadas 40°42′51″ N, 74°00′21″ O?

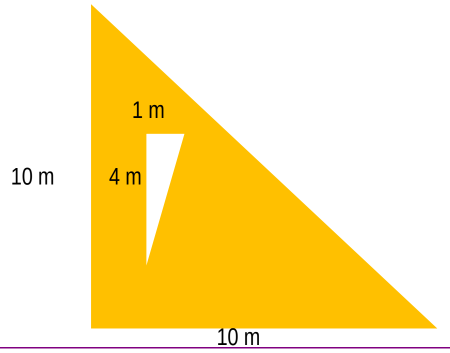
S56. ¿Cuál es la diferencia horaria entre un punto con coordenadas geográficas 58°18′06″ N, 134°25′10″ O y otro con las coordenadas 41°17′11″ S, 174°46′32″ E?

3. Actividades finales

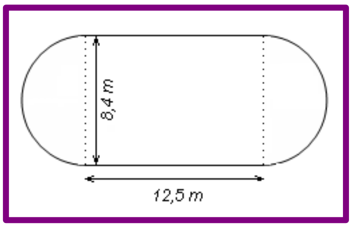
S57. Calcule el área coloreada de la figura siguiente:



S58. Calcule el área coloreada de la figura siguiente:



S59. ¿Cuánto mide el borde de una piscina de la forma y dimensiones indicadas en la figura?



S60. Calcule el área de las figuras circulares siguientes:

a) Corona circular de radios 5,7 cm y 23 mm.

b) Sector circular de 8 cm de radio y 72º de ángulo.

c) Segmento circular de 90º de amplitud en una circunferencia de 10 cm de radio, 14,14 cm de cuerda y 5 cm de distancia del centro a la cuerda.

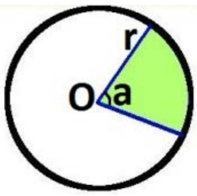
d) Trapecio circular de 35º 24’ en la corona circular del apartado a) de este ejercicio.

S61. Una circunferencia mide 15 cm. Calcule el radio y el área del círculo.

S62. El área de un círculo es de 114 cm^2. Calcule la longitud de la circunferencia.

S63. Calcule el área y el perímetro de un semicírculo de radio 5 metros.

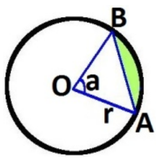
S64. Calcule el perímetro de los sectores circulares siguientes con los datos que se indican:

	$a = 235^o \quad r = 3\ cm$
	$a = 60^o \quad r = 15\ km$
	$a = 330^o \quad r = 50\ m$

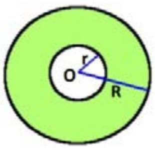
S65. Calcule el área de los sectores circulares de la actividad anterior.

S66. Si el perímetro de un sector circular correspondiente a un círculo de 10 cm de radio es de 32,57 cm, ¿cuál es la amplitud del ángulo?

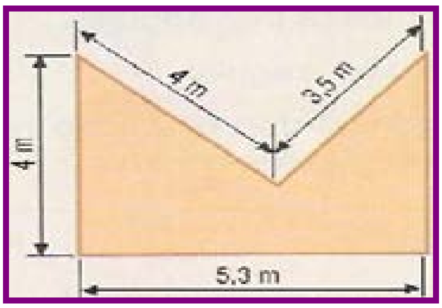
S67. Calcule el perímetro y el área de los segmentos circulares siguientes con los datos que se indican:

	$a = 170^o \quad r = 3\ cm \quad \overline{AB} = 5{,}98\ cm$
	$a = 60^o \quad r = 15\ km$

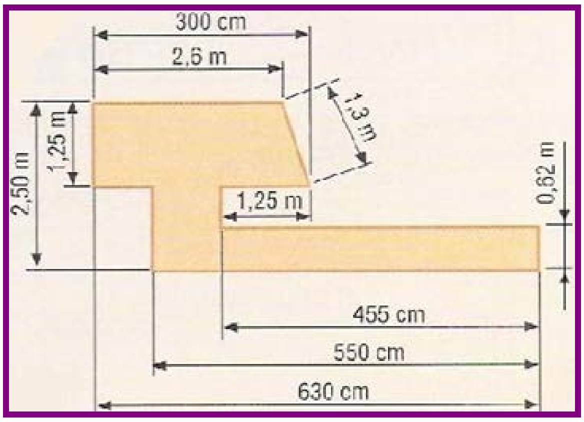
S68. Calcule el perímetro y el área de las coronas circulares siguientes con los datos que se indican:

	$R = 17\ cm \quad r = 3\ cm$
	$R = 60\ km \quad r = 15\ km$

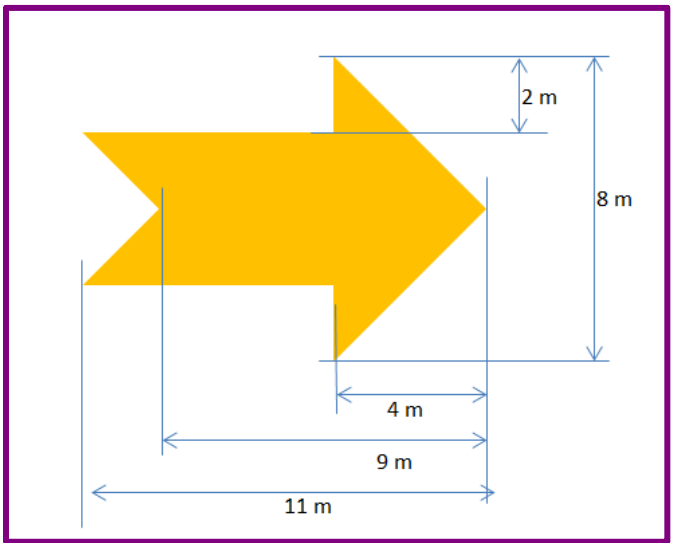
S69. Calcule el perímetro de la figura siguiente.



S70. Calcule el área y el perímetro de la figura:

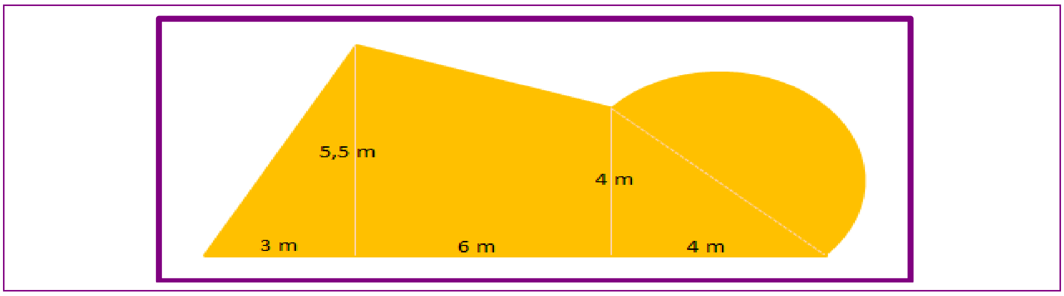


S71. Calcule el área y el perímetro de la figura siguiente.

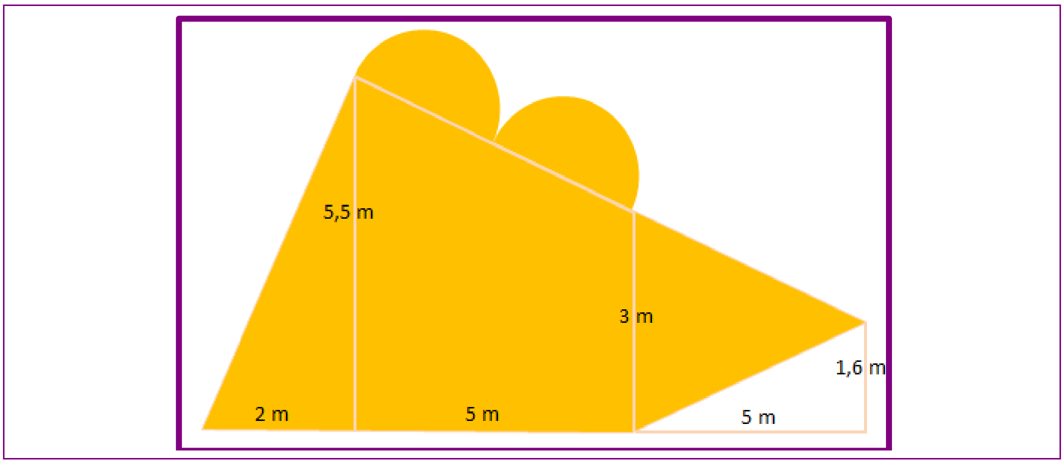


S72. ¿Cuál es la superficie de una pista de atletismo con ocho calles de 122 cm de ancho cada una de ellas, sabiendo que cada recta mide 100 metros y la cuerda interior de las curvas también mide 100 metros? El centro de giro de la curva es el marcado en la figura.

S73. Calcule el área y el perímetro de la figura:



S74. Calcule el área y el perímetro de la figura:



S75. Calcule la superficie y el volumen de un tetraedro que tiene una arista de 2 metros.

S76. Calcule la superficie y el volumen de un cubo que tiene por caras cuadrados de área 9 m^2.

S77. Calcule la superficie y el volumen de un octaedro que tiene una arista de 5 centímetros.

S78. Calcule la superficie y el volumen de un dodecaedro que tiene una arista de 1 metro.

S79. Calcule la superficie y el volumen de un icosaedro que tiene una arista de 4 centímetros.

S80. Calcule el volumen de un ortoedro de dimensiones 12, 4 y 8 cm.

S81. Calcule la superficie de un cubo de 11 dm de arista.

S82. Calcule el volumen de un prisma hexagonal de lado de la base 15 cm y 0,5 m de altura.

S83. Las bases de un prisma recto son rombos de diagonales 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Calcule el área total.

S84. La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios cuyas bases miden 11 cm y 16 cm, y la altura 12 cm. Calcule su volumen.

S85. Calcule la superficie de un prisma de base hexagonal de 10 cm de altura y de 3 cm de lado de la base.

S86. Un prisma cuadrangular tiene una altura de 5 cm y la arista de su base mide 3 cm. Calcule su volumen.

S87. Calcule la superficie total de un prisma triangular de 6 cm de altura si la base es un triángulo equilátero de 8 cm de lado.

S88. Una piscina tiene 10 m de largo, 6 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿Cuánto tendremos que gastar si la queremos pintar y la pintura cuesta a 11 € el metro cuadrado?

S89. Una piscina tiene 10 m de largo, 6 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse si la llave vierte 25 litros de agua por minuto?

S90. Calcule el volumen de una pirámide cuadrangular de apotema 6 cm y 4 cm de lado del cuadrado de la base. Recuerde que tendrá que aplicar el teorema de Pitágoras para el cálculo de la altura.

S91. Calcule el área total de una pirámide que tiene de base un cuadrado de 10 cm y una altura de 12 cm. Recuerde que lo primero es calcular la altura de uno de sus triángulos laterales (apotema de la pirámide) aplicando el teorema de Pitágoras.

S92. Calcule el volumen de una pirámide de base hexagonal que tiene 6 cm de altura y 3 cm de lado de la base.

S93. Calcule la superficie total de una pirámide hexagonal regular, que tiene una base de 30 cm cada lado, una apotema del hexágono de 26 cm, y la altura de la pirámide es 26 cm.

S94. Calcule el volumen de una pirámide pentagonal de 9 cm de altura, cuyo polígono de la base es regular con 6 cm de lado y una apotema de 4,13 cm.

S95. Calcule el área de una pirámide de base pentagonal de 14 cm de lado, 9,63 cm de apotema de la base y 60 cm de apotema lateral.

S96. Una pirámide tiene por base un hexágono cuyos lados miden 10 m y la apotema 8,66 m. La apotema lateral de la pirámide es de 44 m. Calcule su volumen.

S97. Una pirámide regular tiene por base un cuadrado de 8 cm de lado y su altura es de 10 cm. Calcule su superficie total.

S98. Calcule el volumen de una pirámide regular de 80 cm de altura, de base hexagonal cuyo lado de la base mide 30 cm.

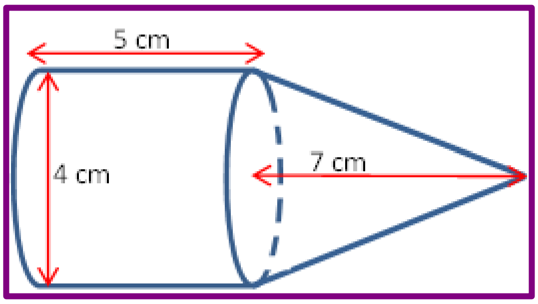
S99. Una pirámide tiene la base cuadrada. Se sabe que su área total es de 1.248 cm^2 y su área lateral 992 cm^2. Calcule lo que miden los lados de la base de la pirámide.

S100. Calcule el volumen de una pirámide hexagonal de 13 cm de altura que tiene como radio de la base 6 cm.

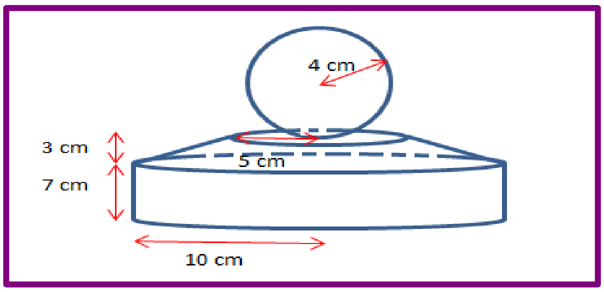
S101. La mayor de las tres pirámides que hay en Gizeh (Egipto) es la de Keops. Su base es un cuadrado que mide 230 m de lado, y su altura es de 147 m. Calcule el área lateral total de la pirámide.

S102. Un balón tiene forma de esfera con un radio de 14 cm. Lo inflamos hasta que tiene un diámetro de 29 cm. ¿Cuánto aumentó su volumen?

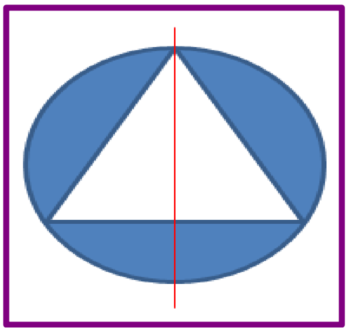
S103. Calcule la superficie y el volumen de la figura siguiente:



S104. Un trofeo de un campeonato de baloncesto tiene una base cilíndrica de 10 cm de radio y 7 cm de altura. Tiene arriba un tronco de cono de 3 cm de altura y radios 10 cm y 5 cm. En la parte superior tiene un balón esférico de 4 cm de radio. Calcule el volumen del trofeo.



S105. Dentro de una circunferencia de radio 6 metros construimos un triángulo equilátero inscrito en ella. La altura del triángulo es 1,5 veces el radio de la circunferencia. Hacemos girar la figura sobre el eje rojo obteniendo una esfera con un cono dentro de ella. Calcule el volumen del espacio que está dentro de la esfera y fuera del cono. (NOTA: Para calcular el radio de la base del cono debe utilizar el teorema de Pitágoras).



S106. Tenemos un cilindro lleno de agua cuyo radio mide 10 cm y con una altura de 25 cm. Dentro de él introducimos un prisma hexagonal, de base regular, recto y macizo, que encaja de forma exacta dentro del cilindro. Al introducirlo en el cilindro, parte del agua que contiene el cilindro es desalojada. Calcule el volumen de agua que queda dentro del cilindro una vez que finalizamos de introducir el prisma.

S107. Un tronco de pirámide tiene como bases hexágonos regulares. Una de las bases tiene un lado de 10 cm y la otra de 3 cm. Su altura es de 14 cm. Calcule su superficie y su volumen.

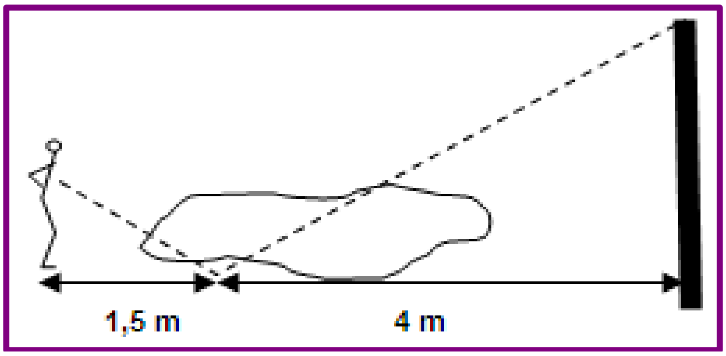
S108. Las bases de un tronco de cono tienen un diámetro de 14 cm y 4 cm. La altura del tronco de cono es de 20 cm. Calcule su superficie y su volumen.

S109. Indique cuáles de las figuras siguientes son necesariamente siempre semejantes:

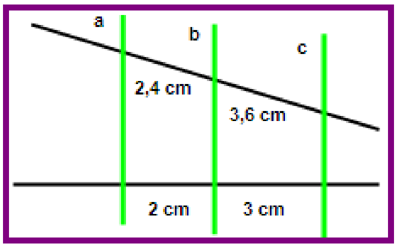
Todos los cubos.	Todos los paralelepípedos.
Todos los prismas.	Todas las pirámides.
Todos los icosaedros.	Todas las esferas.
Todos los dodecaedros.	Todos los cilindros.
Todos los conos.	Todos los tetraedros.

S110. Calcule la altura de una torre que proyecta una sombra de 25 m sabiendo que a la misma hora un palo de 2 m de longitud proyecta una sombra de 1,25 m.

S111. Pedro quiere saber la altura de un poste y aprovecha para conseguirlo un charco que hay en las cercanías, en el que Pedro puede conseguir ver el extremo del poste. La altura de Pedro es de 1,75 m. Para resolver el problema tiene que comenzar por localizar dos triángulos semejantes y establecer la relación entre sus lados.



S112. Las rectas *a* y *b* son paralelas. Podemos asegurar, a partir de las medidas del dibujo, que la recta *c* también es paralela a las rectas *a* y *b*?



S113. Una fábrica de chocolates fabrica bombones que envasa en cajas de dos tamaños: tamaño normal y tamaño grande. Las cajas de ambos tamaños son semejantes. La caja normal tiene como base un sector circular de radio 15 cm y un ángulo de 60º. Su altura es de 4 cm. Sabiendo que el volumen de la caja grande es el doble del volumen de la caja normal, calcule la altura de la caja grande.

S114. Dos latas cilíndricas de refresco de cola de la marca "Refrescola" son semejantes. La pequeña contiene 33 cl de refresco y la otra contiene medio litro de refresco. Calcule la razón que existe entre las superficies de las bases de ambas latas.

S115. Hace algún tiempo se definía el metro como "la diezmillonésima parte de cuadrante de meridiano terrestre". Según esa definición, ¿cuánto mide un meridiano? ¿Cuál es el radio de la Tierra?

S116. Utilizando el teorema de Pitágoras, calcule el radio del paralelo 45º y su longitud, utilizando como radio de la Tierra 6.371 km.

S117. Utilizando como radio de la Tierra 6.371 km, y suponiendo que la Tierra es una esfera perfecta, calcule la superficie y el volumen de la Tierra.

4. Solucionario

4.1 Soluciones de las actividades propuestas

S1. *165 cm^2*

S2. *Área = 50 m^2, perímetro = 34,14 m*

S3. *22,5 cm*

S4. *2.400 metros.*

S5. *432 mm^2 y 520 mm^2 respectivamente.*

S6. *12,5 + 10,5 + 5 + 2,5 = 30,5 m^2*

S7. *841,86 m^2 (se usó una aproximación de la apotema de dos cifras decimales).*

S8.

22,28 cm	38,33 m

S9.

25,13 cm^2	91,63 m^2

S10. *72º*

S11.

P=12,40 cm A=25,13-22,61=2,52 cm^2	P=34,20 m A=91,58-48,32=43,26 m^2

S12.

P=106,81 cm A=53,41 cm^2	P=157,08 m A=392,70 m^2

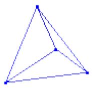
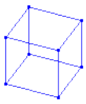
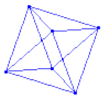
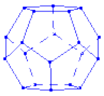
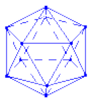
S13.

285,62 m^2.	55,93 cm^2

S14.

114,27 m².	19,27 m²

S15.

	Nombre	Caras	Vértices	Aristas	C + V = A + 2
	*Tetraedro*	*4*	*4*	*6*	*4 + 4 = 6 + 2*
	Cubo o Hexaedro	*6*	*8*	*12*	*6 + 8 = 12 + 2*
	Octaedro	*8*	*6*	*12*	*8 + 6 = 12 + 2*
	Dodecaedro	*12*	*20*	*30*	*12 + 20 = 30 + 2*
	Icosaedro	*20*	*12*	*30*	*20 + 12 = 30 + 2*

S16. *352 cm^2*

S17. *1.331 dm^3*

S18. *5.669,1 cm^2*

S19. *240 cm^3*

S20. *1.354,4 cm^2*

S21. *234 cm^3*

S22. *78 cm^2*

S23. *166,32 cm^3*

S24. *S=22.680 cm^2 V=234.000 cm^3*

S25. *S=12.800 cm^2 V=96.000 cm^3*

S26. *64 cm^2*

S27. *400 cm^3*

S28. *82,23 cm^2*

S29. *20.280 cm^3*

S30. *210,49 cm^2*

S31. *6.653,37 cm^3*

S32. *919,8 m^2*

S33. *213,33 cm^3*

S34. *9.908.1 cm^2*

S35. *345,6 cm^2*

S36. *2.592.100 m^3*

S37. *9,05 m^2*

S38. *339,29 cm^3*

S39. *184,21 cm^3*

S40. *1.696,46 cm^2*

S41. *392,5 cm^2*

S42. *1.256,64 cm^2*

S43. *157,08 m^2*

S44. *2.348,54 cm^2*

S45. *36.460,76 cm^3*

S46.

Sí	No	Sí	No	No
No	Sí	No	No	Sí

S47. *27 m*

S48. *17,25 m*

S49. *2,8 cm*

S50. *64/125*

S51. *13,74 cm*

S52. *125000*

S53. *Escala 1:75. El pasillo mide 5,25 metros.*

S54. *62,5 Kilómetros.*

S55. *12 horas más tarde en el de llegada.*

S56. *20 horas más tarde en el de salida.*

4.2 Soluciones de las actividades finales

S57. *128 m^2*

S58. *48 m^2*

S59. *51,376 m*

S60.

85,408 cm^2	40,192 cm^2	43,15 cm^2	8,398 cm^2

S61. *Radio = 2,39 cm, área = 17,94 cm^2*

S62. *37,85 cm*

S63. *Área = 39,27 m^2, perímetro = 25,71 m*

S64.

18,30 cm	45,71 km	387,98 m

S65.

18,46 cm^2	117,81 km^2	7199,48 m^2

S66. *72º*

S67.

P=14,88 cm A=13,35-0,78=12,57 cm^2	P=21,71 km A=117,81-97,43=20,38 km^2

S68.

P=125,66 cm A=879,65 cm^2	P=471,24 km A=10602,88 km^2

S69. *20,8 metros.*

S70. *P = 1.850 cm, A = 75.085 cm^2*

S71. $P = 18 + 12 \cdot \sqrt{2} = 34{,}97$ *m, A = 40* m^2

S72. *8.383,65* m^2

S73. *P = 34,34 m, A = 69,88* m^2

S74. *P = 32,08 m, A = 40,39* m^2

S75. *S = 6,93* m^2*, V = 0,94* m^3

S76. *S = 54* m^2*, V = 27* m^3

S77. *S = 86,6* cm^2*, V = 58,93* cm^3

S78. *S = 20,65* m^2*, V = 7,66* m^3

S79. *S = 138,56* cm^2*, V = 139,63* cm^3

S80. *384* cm^3

S81. *726* dm^2

S82. *29.228,36* cm^3

S83. *248* cm^2

S84. *3.240* cm^3

S85. *226,8* cm^2

S86. *45* cm^3

S87. *137,69* cm^2

S88. *1.364 €*

S89. *80 horas*

S90. *30,17* cm^3

S91. *360 cm^2*

S92. *46,77 cm^3*

S93. *5649,26 cm^2*

S94. *185,85 cm^3*

S95. *2.437,05 cm^2*

S96. *3.735,87 m^3*

S97. *236,33 cm^2*

S98. *62.353,83 cm^3*

S99. *16 cm*

S100. *405,3 cm^3*

S101. *85.853,8 m^2*

S102. *1.276,01 cm^3*

S103. *S=121,14 cm^2, V=92,15 cm^3*

S104. *3.016,98 cm^3*

S105. *752,1 m^3*

S106. *1.358,79 cm^3*

S107. *Superficie = 878,04 cm^2, volumen = 1.685,2 cm^3*

S108. *Superficie = 901,23 cm^2, volumen = 1.656,67 cm^3*

S109.

Sí	No	No	No	Sí
Sí	Sí	No	No	Sí

S110. *40 metros.*

S111. *4,67 metros.*

S112. *Si se cumplen las condiciones de proporcionalidad que establece el teorema de Tales, podemos concluir que las rectas* a*,* b *y* c *son paralelas.*

$$\frac{2{,}4\,cm}{2\,cm} = \frac{3{,}6\,cm}{3\,cm}$$

$$2{,}4 \times 3 = 2 \times 3{,}6$$

$$7{,}2 = 7{,}2$$

S113. *5,04 cm*

S114. *1,32*

S115. *Meridiano = 40.000.000 m = 40.000 km. Radio = 6.366,2 km*

S116. *Radio paralelo 45º = 4.504,98 km. Longitud paralelo 45º = 28.305,62 km*

S117. *Sup. = 510.064.472* km^2*; Vol. = 1.083.206.916.846* km^3

5. Glosario

A	▪ Área	Superficie de una figura plana.
	▪ Arista	Segmento común a dos caras de un poliedro.
	▪ Apotema de un polígono regular	Distancia entre el centro del polígono y el punto medio de cualquiera de sus lados.
	▪ Apotema de una pirámide	Altura de la cara lateral de una pirámide.
C	▪ Cara	Cada uno de los polígonos que limita un poliedro.
	▪ Cateto	Lado que en un triángulo rectángulo forma parte del ángulo recto.
	▪ Cilindro	Cuerpo geométrico generado a partir de un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.
	▪ Cono	Cuerpo geométrico generado a partir de un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos.
	▪ Cuerpo de revolución	Cuerpo tridimensional obtenido girando una figura plana alrededor de un eje.
	▪ Cubo (o hexaedro)	Poliedro regular formado por seis caras que son cuadrados.
D	▪ Dodecaedro	Poliedro regular formado por doce caras que son pentágonos regulares.
E	▪ Escala	Ratio entre cada longitud de la reproducción, sea plano o mapa, y la correspondiente longitud en la realidad.
	▪ Esfera	Cuerpo de revolución que se genera al hacer girar un semicírculo alrededor de su diámetro.
F	▪ Huso horario	Cada una de las 24 partes en que se dividió la esfera terrestre por el ecuador para señalar la variación horaria.
H	▪ Hexaedro (o cubo)	Poliedro regular formado por seis caras que son cuadrados.
	▪ Hipotenusa	Lado que en un triángulo rectángulo no forma parte del ángulo recto.
I	▪ Icosaedro	Poliedro regular formado por veinte caras que son triángulos equiláteros.
L	▪ Latitud	Distancia, medida en grados, minutos y segundos, entre el ecuador y un punto cualquiera de la superficie terrestre.
	▪ Longitud	Distancia, medida en grados, minutos y segundos, entre el meridiano 0º o de Greenwich y un punto cualquiera de la superficie terrestre.
M	▪ Meridiano	Circunferencias imaginarias sobre la superficie terrestre que cruzan por los polos.
O	▪ Octaedro	Poliedro regular formado por ocho caras que son triángulos equiláteros.
	▪ Ortoedro	Paralelepípedo recto.
P	▪ Paralelepípedo	Prisma en el que las bases son paralelogramos.
	▪ Paralelo	Circunferencias imaginarias en la superficie terrestre que son paralelas al ecuador.
	▪ Perímetro	Longitud total de las líneas que limitan una superficie plana cerrada.
	▪ Pirámide	Poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y por caras laterales triángulos con un vértice común
	▪ Poliedro	Figura tridimensional limitada por varios planos en forma de polígonos.
	▪ Poliedro regular	Poliedro cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada uno de sus vértices converge el mismo número de caras.
	▪ Prisma	Poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos entre sí, que forman las bases, y las caras laterales que son paralelogramos.

R	▪ Razón de semejanza	Razón entre los lados homólogos de dos figuras semejantes.
S	▪ Semejantes	Las figuras son semejantes cuando tienen la misma forma pero diferente tamaño.
T	▪ Teorema de Pitágoras	Teorema que indica que en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
	▪ Tetraedro	Polígono regular formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros.
	▪ Tronco de cono	Cono al que se le corta la parte del vértice con un corte paralelo a la base.
	▪ Tronco de pirámide	Pirámide a la que se le corta la parte del vértice con un corte paralelo a la base.
V	▪ Vértice	Punto de un poliedro en el que se juntan tres o más aristas.
X	▪ Generatriz de un cilindro	Longitud del lado opuesto al eje.
	▪ Generatriz de un cono	Longitud de la hipotenusa del triángulo que gira.

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- *Libros para a educación secundaria a distancia de adultos. Ámbito tecnolóxico-matemático,* Consellería de Educación e Ordenación Universitaria.
- *Matemáticas ESO 1,* Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas ESO 2,* Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas ESO 3,* Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas ESO 3,* Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas enseñanzas académicas ESO 3,* Ed. Santillana.
- *Matemáticas enseñanzas aplicadas ESO 3,* Ed. Santillana.

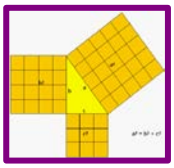
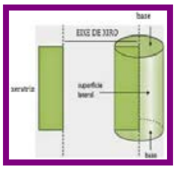
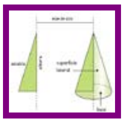
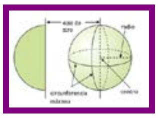
Enlaces de Internet

En estos enlaces encontrará trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://www.mathwords.com/p/platonic_solids.htm
- http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria
- http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Semejanza_poligonos/index_Semejan.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Poliedros_regulares_d3/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Cuerpos_d3/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Globo_terraqueo_d3/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Triangulos_semejantes/index.htm
- http://www.vitutor.com/geo/eso/sActividades.html
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_4eso_A_problemas_geometricos/impresos/4quincena8.pdf
- https://mateseneIinsti.files.wordpress.com/2012/06/c3a1reas-y-volc3bamenes.pdf
- http://www.colexioabrente.com/descargas/mate/3eso/3eso3.3boletinareasyvolumenes.pdf
- https://www.matematicasonline.es/terceroeso/mat3eso12.html

7. Anexo. Licencia de recursos

Licencias de recursos utilizadas en esta unidad didáctica

RECURSO (1)	DATOS DEL RECURSO (1)	RECURSO (2)	DATOS DEL RECURSO (2)
 RECURSO 1	▪ Procedencia: www.google.es	 RECURSO 2	▪ Procedencia: www.google.es
 RECURSO 3	▪ Procedencia: www.google.es	 RECURSO 4	▪ Procedencia: www.google.es