XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para personas adultas

Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 2

Unidad didáctica 1

Números y álgebra

Índice

1. **Introducción** **3**
    - 1.1 Descripción de la unidad didáctica 3
    - 1.2 Conocimientos previos 3
    - 1.3 Criterios de evaluación 3
2. **Secuencia de contenidos y actividades** **5**
    - 2.1 Números enteros y números racionales 5
        - 2.1.1 Números enteros: representación en la recta numérica 5
        - 2.1.2 Operaciones con números enteros, jerarquía en las operaciones 6
        - 2.1.3 Relaciones entre fracciones y decimales 9
        - 2.1.4 Operaciones con fracciones, jerarquía en las operaciones 11
        - 2.1.5 Potencias y notación científica 15
    - 2.2 Proporcionalidad y porcentajes 16
        - 2.2.1 Razón, proporción y tasa 16
        - 2.2.2 Magnitudes directamente proporcionales 20
        - 2.2.3 Magnitudes inversamente proporcionales 22
        - 2.2.4 Proporcionalidad compuesta y reparticiones proporcionales 25
        - 2.2.5 Porcentajes: resolución de problemas 27
        - 2.2.6 Aumentos y disminuciones porcentuales 30
    - 2.3 Álgebra y ecuaciones 32
        - 2.3.1 Álgebra: uso y significado 32
        - 2.3.2 Expresiones algebraicas 33
        - 2.3.3 Polinomios. Productos notables 36
        - 2.3.4 Ecuaciones: significado y utilidad 40
        - 2.3.5 Resolución de ecuaciones de primer grado. Problemas 41
        - 2.3.6 Ecuaciones de segundo grado, resolución 44
3. **Actividades finales** **47**
4. **Solucionario** **53**
    - 4.1 Soluciones de las actividades propuestas 53
    - 4.2 Soluciones de las actividades finales 58
5. **Glosario** **64**
6. **Bibliografía y recursos** **65**

1. Introducción

1.1 Descripción de la unidad didáctica

En esta unidad podemos distinguir tres bloques: un primer bloque dedicado a los números, el segundo, en el que trabajaremos con porcentajes y proporcionalidad y el tercero, de álgebra.

- En el módulo 1 ya estudiamos los números naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$ y los racionales $\mathbb{Q}$. Recordaremos como operar con los números enteros, las fracciones y el uso de la calculadora con estos números. Usaremos las potencias de base 10 y la notación científica en números grandes y pequeños.
- En el segundo bloque trataremos los cálculos con porcentajes, las magnitudes directa e inversamente proporcionales y los conceptos de razón, proporción, tasa y factor de conversión.
- En el tercer bloque de álgebra trabajaremos con el lenguaje y expresiones algebraicas, operaciones sencillas con polinomios e identidades notables. Resolveremos ecuaciones de primer y segundo grado.

1.2 Conocimientos previos

Para trabajar con esta unidad es necesario recordar los conceptos y operaciones estudiados en el tema 1 del módulo 1, en especial:

- Cuáles son los números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Operaciones combinadas con los números naturales y enteros. Potencias de base 10.
- Divisibilidad y cálculo del mínimo común múltiplo a partir de la descomposición factorial. Fracciones iguales o equivalentes. Amplificación y simplificación de fracciones.
- Operaciones con fracciones: suma, resta, multiplicación y división.

1.3 Criterios de evaluación

- Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.
- Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos

en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

- Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.
- Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer y segundo grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos, contrastando los resultados obtenidos.
- Utilizar la calculadora para comprobar resultados.

2. Secuencia de contenidos y actividades

2.1 Números enteros y números racionales

2.1.1 Números enteros: representación en la recta numérica

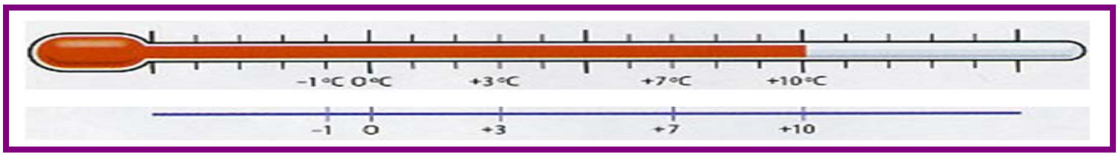
Los números enteros se representan por el símbolo $\mathbb{Z}$ y son una ampliación de los números naturales. Hay situaciones en la vida cotidiana en las que los números naturales no son suficientes, por ejemplo:

▪ Debo 10 euros	-10
▪ El buzo está a 30 metros bajo el mar	-30

El conjunto formado por los números naturales (que son los enteros positivos), los enteros negativos y el 0 representan los números enteros.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Para poder ordenar números enteros, tenemos que compararlos, de igual manera que hacíamos con los naturales, *a* < *b* siempre que *a* esté a la izquierda de *b* en la recta numérica, y cuanto más a la derecha está el número mayor es.



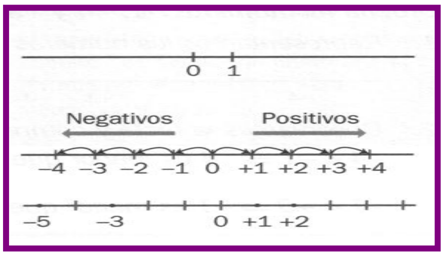
Actividades resueltas

Ordene de menor a mayor los números siguientes:$+5, -3, -7, +1, -4, +12, -9$

$$-9 < -7 < -4 < -3 < +1 < +5 < +12$$

Indique en la recta numérica los números siguientes: $-5, -3$, 0, $+1, +2$

- 1º Tomamos como origen un punto que representa el cero, y como unidad la distancia del 0 al 1.
- 2º A la izquierda del cero representamos los números negativos, y a la derecha, los positivos.
- 3º Llevamos la unidad a la derecha y a la izquierda tantas veces como el número que queremos representar.

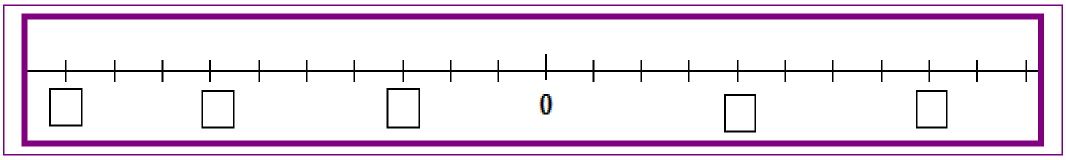


Actividades propuestas

S1. Ordene de menor a mayor los números enteros siguientes:

$$-15, +5, 0, +14, -6, +1, -3, -7$$

S2. Complete el valor de los recuadros vacíos en la recta numérica siguiente:

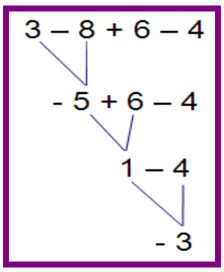


2.1.2 Operaciones con números enteros, jerarquía en las operaciones

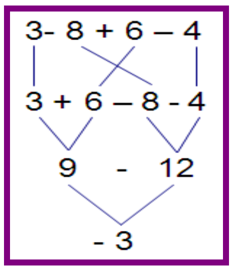
Recordamos cómo se opera con los números enteros:

Sumar y restar

- Para sumar dos números enteros:
- **Del mismo signo**, se suman sus valores absolutos y se le pone al resultado el signo que tienen ambos.
- **De distinto signo**, se restan sus valores absolutos y se le pone al resultado el signo del número que tiene mayor valor absoluto.
- Cuando tenemos una suma de **más de dos sumandos**, sumamos por un lado los positivos y por otro los negativos y luego sumamos el resultado negativo con el positivo siguiendo las normas anteriores.
- Para **restar dos números** enteros, se le suma al primero el contrario del segundo.



Se puede hacer paso a paso, o sumar positivos y negativos y después operar



Actividades resueltas

$(+5)+(+6)=(+11)$	$(+5)-(+6)=(-1)$
$(-5)+(-6)=(-11)$	$(-5)-(-6)=(+1)$
$(-5)+(+6)=(+1)$	$(+5)-(-6)=(+11)$

Realice la siguiente suma con más de dos sumandos:

$$(-6) + (+12) + (+4) + (-9) =$$

- Sumamos por una parte los números positivos:

$$(+12) + (+4) = (+16)$$

- Sumamos por otra parte los números negativos:

$$(-6) + (-9) = (-15)$$

- Finalizamos: $(+16) + (-15) = (+1)$

Actividades propuestas

S3. Resuelva las sumas y restas siguientes:

$3 - 7 + 2 - 5 =$	$2 - 6 + 9 - 3 + 4 =$
$12 + 5 - 17 - 11 + 20 - 10 =$	$-7 + 6 - 10 - 1 + 2 - 10 =$

Multiplicar y dividir

- **Multiplicación:** se multiplican los dos valores absolutos y se pone el signo que corresponda según la regla de los signos.
- **División**: se dividen los dos valores absolutos y se ponen el signo que corresponda según la regla de los signos.

Regla de los signos

- Si dos factores tienen igual signo, el resultado final siempre es positivo.
- Si dos factores tienen diferente signo, el resultado final siempre es negativo.

$(+)\cdot(+) = +$	$(-)\cdot(-) = +$
$(+):(+) = +$	$(-):(-) = +$
$(+):(-) = -$	$(-):(+) = -$
$(+)\cdot(-) = -$	$(-)\cdot(+) = -$

Actividad resuelta

Calcule:

$\frac{-56}{4}$	14		$(-3)\cdot 2$	-6
$(-7)\cdot 8$	-56		$\frac{12}{-6}$	-2

Actividades propuestas

S4. Calcule:

$(-2)\cdot(-4)\cdot(+2) =$	$(+3)\cdot(-5)\cdot(-2) =$
$(-52):(+13) =$	$(+36):(-2) =$

S5. Calcule:

$[(-45):(+5)]:(+3) =$	$[(-64):(+2)]:(-8) =$
$(-48):[(+24):(-6)] =$	$(-100):[(-25):(-5)] =$

Jerarquía en las operaciones

- Las cuatro operaciones básicas con números enteros son: **suma, resta, multiplicación y división.**

Al realizar varias operaciones combinadas se debe seguir este orden:

1) Paréntesis.

2) Multiplicaciones y divisiones, según aparecen.

3) Sumas y restas, según aparecen.

Si varias operaciones tienen igual preferencia, **se realizan de izquierda a derecha**.

Actividad resuelta

3· (3-5)	-6
(-4) · (6 – 10)	16
35 + 7·(6 – 11)	0
60 : (8 – 14) + 12	+2
(9– 13 – 6 + 9) · (5 – 11 + 7 – 4)	(-1) · (-3)=3
–(8 + 3 – 10) · [(5 – 7) : (13 – 15)]	-(1) · [(-2) : (-2)] = -1
(+12) – (+2) · [(-3) - (-8)]	10 · 5 = 50

Actividades propuestas

S6. Calcule:

3 · {2 · [4 – 2 · (5 - 7)] + 3 · (1 – 2 · 5)} =
4 – 2 · (5 - 8) + 2 · [5 · (2 – 7 + 3) - 7] =
3 · (12 – 4 · 8) + 4 · [5 : 1 - 4+ 3 · (2 - 1)] =

2.1.3 Relaciones entre fracciones y decimales

Las fracciones y los decimales son formas numéricas con las que expresamos cantidades.

Paso de fracción a decimal

Toda fracción se puede pasar a forma decimal: se divide el numerador entre el denominador. Pero sólo se pueden pasar a fracciones los decimales exactos y los periódicos.

Ejemplos:

Decimal exacto a fracción

$$0{,}8 = \frac{80}{100} \qquad 2{,}25 = \frac{225}{100} = \frac{9}{4} \qquad 0{,}875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$$

Decimal periódico a fracción

Número decimal periódico puro

Pasar a forma de fracción $1,\hat{2}$

$$A = 1,\hat{2} = 1{,}222 \ldots.$$

Multiplicamos por 10 y le restamos el propio número

$$\begin{array}{l} 10A = 12{,}222\ldots \\ \underline{-A = \ 1{,}222\ldots} \\ 9A = \ 11{,}000 \end{array} \quad \rightarrow \quad 9A = 11 \rightarrow A = \frac{11}{9} \rightarrow 1,\hat{2} = \frac{11}{9}$$

Número decimal periódico mixto

Pasar a forma de fracción $0.5\hat{4}$

$$A = 0{,}5\hat{4} = 0{,}5444\ldots$$

Lo multiplicamos por 100 y por 10 y restamos:

$$\begin{array}{l} 100A \ = \ 54{,}444\ldots \\ \underline{-10A \ = \ \ 5{,}444\ldots} \\ \ \ 90A = \ 49{,}000\ldots \end{array} \quad \rightarrow \quad 90A = 49 \rightarrow A = \frac{49}{90} \rightarrow 0{,}5\hat{4} = \frac{49}{90}$$

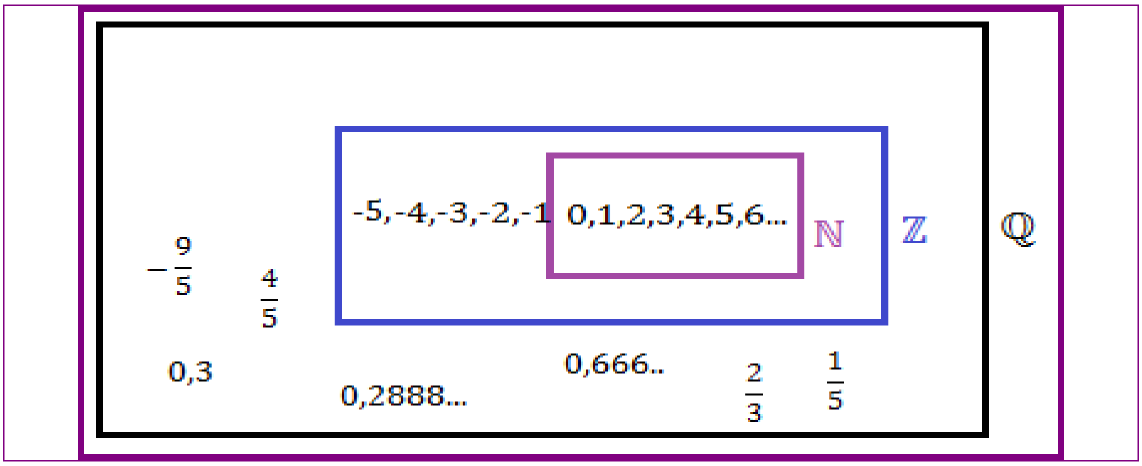
Números racionales

El conjunto de los números racionales se designa con la letra $\mathbb{Q}$. Un número es racional cuando se puede expresar en forma de fracción:

$$\frac{\text{Número entero}}{\text{Número entero}} = \text{NÚMERO RACIONAL}$$

- Todos los números enteros y también los naturales son racionales, ya que pueden expresarse como una fracción.
- Los decimales exactos y los decimales periódicos también son racionales pues, como acabamos de ver, siempre se pueden presentar en forma de fracción.
- Los decimales con infinitas cifras no periódicas no son racionales, ya que no se pueden expresar en forma de fracciones. Ejemplos: $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$
- Los números que conocemos hasta ahora se relacionan como se indica en el gráfico siguiente:

Resumimos lo dicho en el esquema siguiente



Actividades propuestas

S7. Exprese en forma decimal:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{10}, \frac{13}{110}$$

S8. Exprese en forma de fracción:

0,7	0,4	1,6
0,04	2,73	0,469

S9. Exprese en forma de fracción:

$0,\hat{3}$	$1,\hat{7}$	$0,\hat{8}$
$0,0\hat{6}$	$3,1\hat{5}$	$1,\widehat{25}$

2.1.4 Operaciones con fracciones, jerarquía en las operaciones

Recordamos cómo se llevan a cabo las principales operaciones con fracciones:

Suma y resta de fracciones

Con el mismo denominador

- La suma o la resta de fracciones con el mismo denominador es otra fracción que tiene el mismo denominador y el numerador es la suma o resta de los numeradores.

Actividad resuelta

$\frac{16}{36}+\frac{12}{36}=\frac{28}{36}$	Siempre debemos simplificar el resultado	$\frac{28}{36}=\frac{28:4}{36:4}=\frac{7}{9}$
$\frac{16}{36}-\frac{12}{36}=\frac{4}{36}$	Siempre debemos simplificar el resultado	$\frac{4}{36}=\frac{4:4}{36:4}=\frac{1}{9}$

Con distinto denominador

- Se reducen las fracciones a común denominador calculando el mínimo común múltiplo de los denominadores y dividendo este entre el denominador de cada fracción para después multiplicar el resultado por el numerador de cada una de ellas. A continuación ya queda la suma o la resta como de fracciones con el mismo denominador.

Actividad resuelta

$$\frac{8}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1+6}{9}=\frac{7}{9};\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5+3}{15}=\frac{8}{15}$$

m.c.m. (9,3) = 9 m.c.m. (3,5) = 15

Actividades propuestas

S10. Resuelva:

$\frac{4}{5}+\frac{7}{5}-\frac{9}{5}=$	$\frac{4}{5}+\frac{7}{10}-\frac{9}{14}=$
$\frac{13}{12}-\frac{3}{4}+\frac{1}{16}=$	$\frac{7}{9}-\frac{4}{15}-\frac{1}{5}=$

Multiplicación y división

- Para multiplicar fracciones, se multiplican los numeradores y los denominadores
- Para dividir fracciones, se multiplican los términos cruzados.

Actividad resuelta

$\frac{5}{3}\cdot\frac{-2}{6}=\frac{-12}{18}=-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}:\frac{-2}{6}=\frac{30}{-6}=-5$

Actividades propuestas

S11. Multiplique y obtenga la fracción irreductible:

$\frac{4}{5}\cdot\frac{-10}{3}=$	$\frac{-7}{9}\cdot\frac{-18}{35}=$
$\frac{2}{3}\cdot\frac{18}{7}\cdot\frac{1}{16}=$	$\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{2}{5}=$

S12. Calcule y compare los resultados:

$\left(2:\frac{1}{2}\right):\frac{1}{5}=$	$\left(\frac{5}{6}:\frac{10}{4}\right):6=$
$2:\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{5}\right)=$	$\frac{5}{4}:\left(\frac{10}{4}:6\right)=$

Potencias y fracciones

Las propiedades de las potencias son las mismas para los números naturales, enteros y para las fracciones. Aplicamos estas propiedades a las potencias:

- **Potencia de una fracción:** una potencia de una fracción es el producto de esa fracción, la base, por sí misma tantas veces como indique el exponente. La base se escribe siempre entre paréntesis.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a^3}{b^3}$$

Con las potencias de las fracciones se sigue la regla de los signos:

$$(-)^{par}=(+)(-)^{impar}=(-)(+)^{par}=(+)(+)^{impar}=(+)$$

Las propiedades de las operaciones con potencias se aplican igualmente a las fracciones:

- La **potencia de un producto** es igual al producto de las potencias de los factores.

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^2$$

- **Producto de potencias de la misma base:** para multiplicarlas, se suman los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^5$$

- La **potencia de un cociente** es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

- **Cociente de potencias de la misma base:** para dividirlas, se restan los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)^5 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

- **Potencia de otra potencia:** para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^6$$

- **Potencias de exponente cero:** la potencia de exponente cero **<u>vale siempre 1</u>** (para cualquier base distinta de cero) $(\boldsymbol{a})^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$. De la misma forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

- **Potencias de exponente negativo:** una potencia de exponente negativo es la inversa de la misma potencia de exponente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

Actividades resueltas

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{15}{30}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^{4+3} = \left(\frac{3}{4}\right)^7$
$\left(\frac{5}{10}\right)^2 : \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{10} : \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{25}{60}\right)^2 = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}$
$\left(\frac{3}{5}\right)^9 : \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \left(\frac{3}{4}\right)^{9-7} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$
$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Actividades propuestas

S13. Resuelva y calcule:

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) =$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{6}\right)^2 =$	$\left(\frac{3}{7}\right)^9 : \left(\frac{3}{7}\right)^7 : \left(\frac{3}{7}\right) =$
$\left(\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^5 =$	$\left[\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^2\right]^0 =$

Jerarquía en las operaciones

- Cuando hay varias operaciones indicadas, **el orden de la operación** es como en los números naturales y enteros:

1- Paréntesis

2- Potencias y raíces

3- Multiplicaciones y divisiones

4- Sumas y restas

- Cuando hay operaciones con paréntesis, se operan estos en primer lugar de una de estas dos formas:
  - Resolviendo los paréntesis de forma independiente hasta dejarlos reducidos a una sola fracción.

– Suprimiendo los paréntesis, teniendo en cuenta que si el paréntesis tiene delante un signo +, los signos interiores non varían, y si el paréntesis tiene delante un signo –, los signos interiores se transforman de + a – y de – a +.

$$+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n} \qquad -\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)=-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{m}{n}$$

Actividad resuelta

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}-\frac{1\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{18}{20}-\frac{2}{15}=\frac{54}{60}-\frac{8}{60}=\frac{46}{60}=\frac{23}{30}$$

$\text{m.c.m.}\,(20,15)=60$

Actividades propuestas

S14. Resuelva y calcule:

$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=$	$\frac{7}{9}-\frac{1}{6}:\frac{3}{2}=$
$\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}=$	$\frac{3}{5}:6+\frac{5}{6}:4=$
$\left(\frac{1}{3}\right)^3:\frac{1}{9}+\frac{2}{5}=$	$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{4}{9}\right)=$

2.1.5 Potencias y notación científica

- Hay números que por ser extraordinariamente grandes o sumamente pequeños son incómodos de escribir. La notación científica sirve para que la escritura de esos números tenga menos cifras y, por lo tanto, resulte más cómoda.
- Una cantidad expresada en notación científica tiene forma de producto: un número menor que 10 (pero no inferior a 1), multiplicado por una potencia de 10 de exponente entero.
- Si el número que debe multiplicar a la potencia de 10 tiene muchas cifras decimales, lo mejor será ponerlo aproximado con pocas cifras.

Un número está en notación científica si adopta la siguiente forma:

a	$,\underline{bcd}\ldots$	$.\,\underline{10^n}$
Parte entera (una sola cifra distinta de 0)	Parte decimal	Potencia entera de base 10

Actividades resueltas

La distancia media de la Tierra al Sol es 149.598.000 Km = 150.000.000 = 1,50 · 100.000.000 = 1,50 · 10^8
Un virus mide aproximadamente 0,000225 mm = 2,25 · 0,0001 = 2,25 · 10^{-4} mm

Actividades propuestas

S15. Exprese en notación científica las cantidades siguientes:

Masa de un átomo de hierro	0,000000000000000000000000926
Masa de un átomo de plata	0,00000000000000000000000179
Un año luz	9.460.800.000.000

2.2 Proporcionalidad y porcentajes

2.2.1 Razón, proporción y tasa

Razón

- **Razón**: Una razón es la división o cociente entre dos números o dos cantidades comparables entre sí.

Se representa $\frac{a}{b}$, y se lee "*a* es a *b*"

- Los términos de una razón se llaman *antecedente* y *consecuente*. El antecedente es el dividendo o numerador, y el consecuente es el divisor o denominador.
- No se debe confundir una razón con una fracción. Los términos antecedente y consecuente de una razón pueden ser números enteros o números decimales. En una fracción sus términos, numerador y denominador, deben ser números enteros.
  - Ejemplo 1: en un concurso en el que hay tres premios participan 21 personas. Podemos expresar matemáticamente la relación anterior mediante una razón entre el número de premios y el número de participantes, y queda:

$$\mathbf{\frac{3}{21} = \frac{1}{7}}$$

  - Ejemplo 2: Tenemos dos sacos de cemento; el saco grande pesa 7,5 kg y el pequeño pesa 2,5 kg. La razón entre la masa del saco grande y la del saco pequeño es: $\mathbf{\frac{7,5}{2,5}}$ **= 3**, lo que quiere decir que el saco grande tiene tres veces la masa del pequeño.

Proporción

Una **proporción** es una igualdad de dos razones.

Se representa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee "*a* es a *b* como *c* es a *d*"

Los términos de una proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$Se\ llama \begin{cases} a, c \ \ antecedentes \\ \\ b, d \ consecuentes \end{cases} \qquad y\ también \begin{cases} a, d \ \ extremos \\ \\ b, c \ medios \end{cases}$$

Propiedades de las proporciones

- En toda proporción el producto de medios es igual al producto de extremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

- En una proporción, siempre, la razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Cálculo de un término desconocido de una proporción

Para calcular el término desconocido en una proporción, conociendo los otros tres, se aplica la propiedad:

Producto de medios = producto de extremos

A ese término desconocido se le llama ***cuarto proporcional***.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x = b \cdot c \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b \cdot c}{a}$$

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{x}$$

Observe que, considerando los cuatro elementos de la proporción en los extremos de los brazos de un aspa, podemos decir que para calcular el término desconocido de una proporción se multiplican los dos números conocidos que forman uno de los brazos del aspa y el resultado se divide por el tercer número, emparejado con la incógnita en el otro brazo.

Actividades resueltas

Elija la respuesta correcta en cada caso:

La razón de 6 y 18 es: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

La razón de 12 y 18 es: $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Forme razones con la suma de antecedentes y consecuentes de las proporciones siguientes y compruebe que forma proporción con ellas:

$\frac{8}{10} = \frac{6}{7{,}5}\,;\ \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

$$\frac{8+6}{10+7{,}5} = \frac{14}{17{,}5} = \frac{8}{10} = \frac{6}{7{,}5} = 0{,}8 \qquad \frac{2+8}{3+12} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12} = 0{,}66666$$

Calcule el cuarto proporcional en las proporciones siguientes:

$\frac{x}{4{,}9} = \frac{2}{3}$

$$\frac{\mathrm{x}}{9} = \frac{2}{3} \qquad x \cdot 3 = 9\,.\,2 \qquad x = \frac{9\,.\,2}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$\frac{5{,}2}{4{,}3} = \frac{x}{8{,}6}$

$$\frac{5{,}2}{4{,}3} = \frac{\mathrm{x}}{8{,}6} \qquad 5{,}2 \cdot 8{,}6 = 4{,}3 \cdot x \qquad x = \frac{5{,}2 \cdot 8{,}6}{4{,}3} = \frac{44{,}72}{4{,}3} = 10{,}4$$

$\frac{7}{x} = \frac{2}{12}$

$$\frac{7}{x} = \frac{2}{12} \qquad 7 \cdot 12 = x \cdot 2 \qquad x = \frac{7 \cdot 12}{2} = \frac{84}{2} = 42$$

$$\frac{8}{30} = \frac{x}{15}$$

$\frac{8}{30} = \frac{\mathrm{x}}{15}$ $\quad 8 \cdot 15 = 30 \cdot x$ $\quad x = \frac{8 \cdot 15}{30} = \frac{120}{30} = 4$

Actividades propuestas

S16. Calcule el término desconocido en cada proporción:

$\frac{1}{3} = \frac{5}{x}$	$\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$	$\frac{91}{42} = \frac{x}{9}$

S17. La razón de lo que ganan Juan y Luis es $\frac{3}{5}$. Si Juan gana 850 euros, ¿cuánto gana Luis?

Tasa

- **Tasa**: La tasa en matemáticas es la **razón o ratio entre dos magnitudes diferentes** que se expresan con sus unidades. Si no expresamos la razón de esas unidades, la tasa deja de informar y queda la expresión de una simple razón entre números.
  - *Ejemplo*: La tasa máxima de alcohol en la sangre permitida, o *tasa de alcoholemia*, es un número seguido de la ratio **g/litro**. Por lo tanto, se refiere a gramos de alcohol por litro de sangre. Es imprescindible que expresemos la relación entre las unidades.
- **Tasa unitaria**: Es el valor numérico de una tasa expresado en las unidades del numerador por cada unidad del denominador.
  - *Ejemplo*: La tasa de natalidad de una población se expresa dividiendo el número de nacimientos en un período de tiempo (generalmente un año), entre el número de habitantes de esa población: 60 nacidos en una población de 3.000 habitantes, implica una tasa de (60 nacimientos)/(3.000 habitantes) y la tasa unitaria será 0,02 nacidos por habitante. Para entenderlo mejor, lo expresamos en tantos por mil: 20 nacidos por cada 1.000 habitantes.

Actividad resuelta

Calcule la tasa y la tasa unitaria que corresponde a una población de 400.000 habitantes en la que en un año nacieron 2.000 niños. Exprese el resultado en tantos por mil.

$$\frac{2.000 \text{ nacemientos}}{400.000\ habitantes} = \text{ 0,005 nacidos por habitante}$$

$$0{,}005 \cdot 1.000 = 5 \rightarrow 5\ nacidos\ por\ cada\ 1.000\ habitantes$$

Actividad propuesta

S18. Un comerciante compra 2.500 teléfonos móviles por 250.000 euros. ¿Cuál es la tasa unitaria de costo por producto?

2.2.2 Magnitudes directamente proporcionales

Una magnitud es cualquier propiedad física que pueda ser medida: la longitud, la temperatura, el dinero, la masa, el tiempo, etc. El dolor, el amor y la alegría pueden ser grandes o pequeñas, pero no se pueden medir, entonces no son magnitudes.

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.

Veamos un ejemplo de dos magnitudes directamente proporcionales: longitud de un tejido y su valor:

Cantidad de tejido (metros)	1	2	3	4	5	···
Precio (euros)	6	12	18	24	30	···

En la tabla se observa lo siguiente:

- La razón de dos cantidades de la primera magnitud y la razón de las correspondientes cantidades de la segunda magnitud forman una proporción.

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{18}, \qquad \frac{2}{4} = \frac{12}{24}, \qquad \frac{5}{3} = \frac{30}{18}$$

- Los valores de una magnitud son proporcionales a los valores correspondientes de la otra, es decir, forman una serie de razones iguales.

$$\frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{18}{3} = \frac{24}{4} = \frac{30}{5} = \boldsymbol{K}\ (constante\ de\ proporcionalidad\ directa)$$

- **La constante de proporcionalidad directa** es el valor de la ratio que resulta de dividir dos valores correspondientes de una tabla de proporcionalidad directa.

Resolución de problemas

Los problemas de proporcionalidad directa se pueden resolver mediante dos estrategias:

Regla de tres simple directa

La regla de tres simple directa es un procedimiento que tiene por objeto el cálculo del término desconocido de una proporción en la que se conocen tres cantidades de dos magnitudes. Es decir, hace falta encontrar el cuarto elemento de la proporción.

Para resolver los problemas, se sigue el siguiente esquema:

Se colocan los datos y se determina si la proporcionalidad es directa: $Magnitud\ (A)\ \ (D)\ \ Magnitud\ (B)$ a ——— c b ——— x	Se forma la proporción y se calcula el cuarto proporcional: $\frac{b}{a} = \frac{c}{x}$ $\qquad x = \frac{b \cdot c}{a}$

Actividad resuelta

Para hacer 3 trajes necesitamos 7,50 metros de tejido. ¿Cuánto tejido usaremos para hacer 8 trajes?

❶	Razonamos el problema.	Si para hacer tres trajes necesitamos 7,5 metros de tejido, entonces para hacer ocho trajes necesitaremos *x* metros.
❷	Escribimos lo anterior así.	3 trajes ——— 7,5 metros 8 trajes ——— x metros
❸	Determinamos si la proporcionalidad es directa.	Razonamos: si para tres trajes necesitamos 7,5 metros, si aumentamos el número de trajes, la otra magnitud (los metros de tejido) también tendrá que aumentar. Por tanto, es directa.
❹	Escribimos una proporción con los términos anteriores:	$\frac{3}{8} = \frac{7.5}{x}$
❺	Despejamos *x* y calculamos:	$3 \cdot x = 7,5 \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7,5 \cdot 8}{3} = 20\ metros$

Reducción a la unidad

- El método de reducción a la unidad consiste en:
  - Calcular primero el valor asociado a la unidad en la tabla de magnitudes proporcionales correspondiente.
  - Conociendo el dato del valor asociado a la unidad, se calcula el valor deseado.

Actividad resuelta

Para hacer 3 trajes necesitamos 7,50 metros de tejido. ¿Cuánto tejido usaremos para hacer 8 trajes?

❶	<table><tr><td>▪ Número de trajes</td><td>1</td><td>3</td><td>8</td></tr><tr><td>▪ Metros de tejido</td><td>?</td><td>7,5</td><td>?</td></tr></table>
❷	Calculamos los metros necesarios para hacer un traje $\frac{1}{x} = \frac{3}{7,5} \qquad x = \frac{7,5\ metros}{3\ trajes} = 2,5\ metros/traje$
❸	Conocido el valor de la unidad, en este caso un traje, calculamos para el valor deseado. Para 8 trajes: 8 trajes. 2,5 metros/traje = 20 metros

Actividades propuestas

S19. El dueño de una tienda paga 720 euros por un pedido de 15 cajas de aceite de oliva. ¿Cuánto pagará por otro pedido del mismo aceite de 8 cajas?

S20. Una merluza de dos kilos y trescientos gramos me costó 28,75 euros. ¿Cuánto pagaré por otra merluza de kilo y medio?

S21. Una máquina envasadora llena 750 botellas en un cuarto de hora. ¿Cuánto tardará en llenar 1.000 botellas?

2.2.3 Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si un aumento o una merma en una de las magnitudes determina una merma o un aumento proporcional en la otra.

Veamos un ejemplo de dos magnitudes inversamente proporcionales: velocidad de un automóvil y tiempo transcurrido en recorrer una distancia de 120 km. Observamos en la tabla como la medida que aumenta una de las magnitudes disminuye proporcionalmente a otra:

Velocidad (km/h)	30	40	60	120	…
Tiempo transcurrido (horas)	4	3	2	1	…

En la tabla observamos lo siguiente:

– La razón de dos cantidades cualquiera de la primera magnitud (velocidad) y la razón inversa de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud (tiempo) forman una proporción:

$$\frac{30}{40} = \frac{3}{4}, \frac{40}{60} = \frac{2}{3}, \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

– Que el producto de las cantidades de una magnitud (velocidad) por las correspondientes de la otra es siempre el mismo número, es una constante conocida como constante de proporcionalidad inversa:

  30 · 4 = 40 · 3 = 60 · 2 = 120 · 1 = 120 =***K*** *(constante de proporcionalidad inversa)*

- **La constante de proporcionalidad inversa** es el valor del producto que resulta de multiplicar dos valores correspondientes de una tabla de proporcionalidad inversa.

Resolución de problemas

Los problemas de proporcionalidad inversa se pueden resolver mediante dos estrategias:

Regla de tres simple inversa

La regla de tres simple inversa es el procedimiento para calcular una cantidad que forma proporción con otras tres cantidades conocidas de dos magnitudes inversamente proporcionales.

Para resolver los problemas se sigue el esquema siguiente:

Se colocan los datos y se determina si la proporcionalidad es inversa: $Magnitud\ (A)\ \ (D)\ \ Magnitud\ (B)$ a ———— c b ———— x	Se forma la proporción en la que la razón de las cantidades de la magnitud A aparece invertida: $\frac{b}{a} = \frac{c}{x}$ $\qquad$ $x = \frac{a \cdot c}{b}$

Actividad resuelta

Un ganadero tiene hierba almacenada para alimentar 20 animales durante 60 días. Si compra 10 animales más, ¿para cuántos días tendrá hierba suficiente?

❶	Razonamos el problema	Si 20 animales poden comer 60 días, entonces 30 animales comerán *x* días
❷	Escribimos lo anterior así	20 animales ——— 60 días 30 animales ——— *x* días
❸	Determinamos si la proporcionalidad es directa	Razonamos: si para 20 animales la hierba almacenada nos da para 60 días, en cuanto aumentamos el número de animales, la otra magnitud (el número de días), teniendo la misma hierba almacenada, tendrá que disminuir. Por lo tanto es inversa.
❹	Escribimos una proporción con los términos anteriores:	$\frac{30}{20} = \frac{60}{x}$
❺	Despejamos *x* y calculamos:	$30 \cdot x = 20 \cdot 60 \quad x = \frac{20 \cdot 60}{30} \quad x = 40$

Reducción a la unidad

El método de reducción a la unidad consiste en:

- Calcular primero el valor asociado a la unidad en la tabla de magnitudes inversamente proporcionales correspondiente.
- Conociendo el dato del valor asociado a la unidad, se calcula el valor deseado.

Actividad resuelta

Un ganadero tiene hierba almacenada para alimentar 20 animales durante 60 días. Si compra 10 animales más, ¿para cuántos días tendrá hierba suficiente?

❶	▪ Número de animales	1	20	30
	▪ Número de días	*x*	60	?

❷	Como las dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de las cantidades correspondientes es constante: $20 \cdot 60 = 1 \cdot x = 1\,200$
❸	Entonces, si un animal puede comer 1.200 días, 30 animales podrán comer: $\frac{1.200}{30} = 40\ días$

Actividades propuestas

S22. Un coche, a 80 km/h, tarda 2 h en llegar a Barcelona. ¿Cuánto tardaría un camión, a 40 km/h? ¿Y un tren de alta velocidad a 160 km/h?

S23. Tres obreros acaban un trabajo en 7 horas. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 7 obreros?

S24. En una población de 4.000 habitantes hay reservas de agua para 12 meses.

a) Si fuesen 2.000 habitantes. ¿Para cuántos meses tendrían?

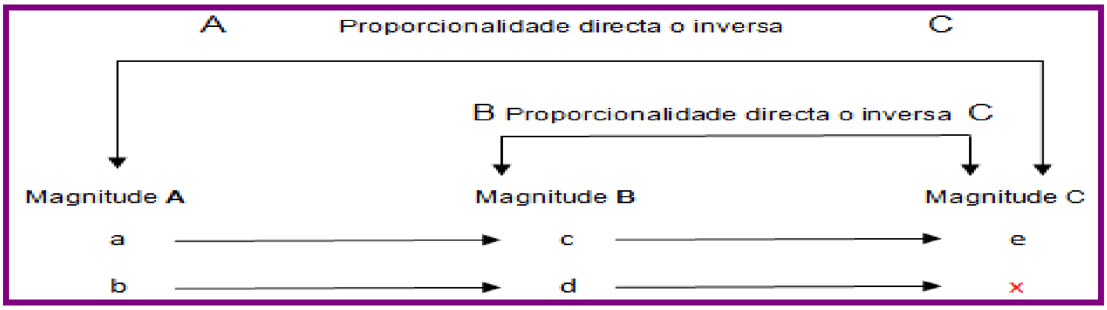
b) ¿Y si fuesen 3.000 habitantes?

2.2.4 Proporcionalidad compuesta y reparticiones proporcionales

Proporcionalidad compuesta

Una proporcionalidad es compuesta si intervienen más de dos magnitudes proporcionales. Para resolver problemas de regla de tres compuesta se aplica el siguiente procedimiento:

- Se identifican las magnitudes que intervienen, se colocan los datos y la incógnita, y se determina la relación de proporcionalidad entre cada magnitud y la de la incógnita.

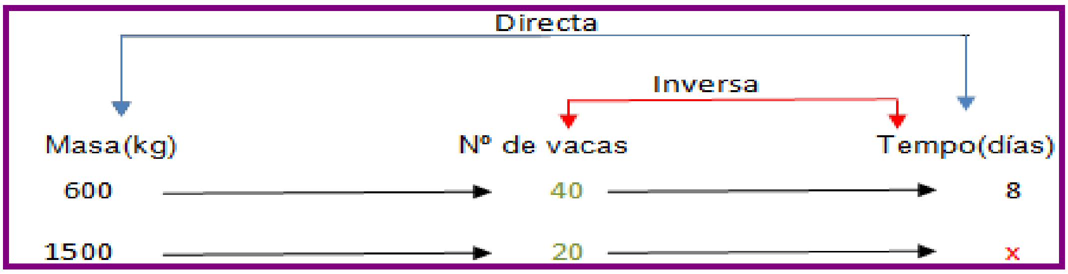


- Se formula la proporción, con la razón directa o inversa según las magnitudes sean directa o inversamente proporcionales, y se resuelve.

Actividad resuelta

Un ganadero necesita 600 kg de pienso para alimentar 40 vacas durante 8 días. ¿Durante cuántos días podrá alimentar 20 vacas con 1.500 kg de pienso?

Se colocan los datos y se determina la relación de proporcionalidad



- Se forma la proporción:

Se multiplican las razones de las cantidades de la misma magnitud, poniendo la razón inversa si la proporcionalidad es inversa, y se igualan con la razón de las cantidades de la incógnita.

$$\frac{600}{1500}\cdot\frac{20}{40}=\frac{8}{x} \Rightarrow \frac{12000}{60000}=\frac{8}{x} \Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{8}{x}\text{ ; } x=8\cdot 5=40 \text{ días}$$

Razón invertida para formar proporción

Actividades propuestas

S25. Una máquina en una fábrica, trabajando 10 horas al día, envasa 10.000 latas en 8 días. ¿Cuánto tardaría en envasar 600 latas trabajando 12 horas al día?

S26. Un granjero necesitó 588 kg de pienso para alimentar a 30 vacas durante 14 días. ¿Durante cuántos días podría alimentar 20 vacas disponiendo de 1.680 kg de pienso?

Reparticiones proporcionales

Estudiamos a continuación cómo se solucionan los problemas de reparticiones directa e inversamente proporcionales.

- Reparticiones directamente proporcionales
- Para resolver este tipo de problemas aplicamos una de las propiedades de las proporciones que nos dice: "*En una proporción, siempre, la razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones*".

$$\frac{\boldsymbol{a+c+e}}{\boldsymbol{b+d+f}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}}$$

Actividad resuelta

Queremos repartir un premio de 60 euros entre tres estudiantes en proporción directa a su calificación final de curso. Un alumno obtuvo un 7, otro un 8 y el tercero un 5. ¿Cuántos euros tocarán a cada uno?

$$\frac{Euros\ totales}{Notas\ totales} = \frac{Euros\ 1^{\underline{o}}\ estudiante}{Nota\ 1^{\underline{o}}\ estudiante} = \frac{Euros\ 2^{\underline{o}}}{Nota\ 2^{\underline{o}}} = \frac{Euros\ 3^{\underline{o}}}{Nota\ 3^{\underline{o}}} \quad Entonces: \frac{60\ €}{8+7+5} = \frac{x}{8} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$$

Ahora, a partir de esta última igualdad de fracciones, resolvemos la proporción para *x*, luego para *y* y finalmente para *z*:

$$\frac{60\ €}{8+7+5} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{60\ € \cdot 8}{20} = 24$$
$$\frac{60\ €}{8+7+5} = \frac{y}{7} \Rightarrow y = \frac{60\ € \cdot 7}{20} = 21$$
$$\frac{60\ €}{8+7+5} = \frac{z}{5} \Rightarrow y = \frac{60\ € \cdot 5}{20} = 15$$

- **Reparticiones inversamente proporcionales**

Repartir una cantidad *N* en partes inversamente proporcionales a los números *a, b* y *c*, equivale a repartir esa cantidad *N* en partes directamente proporcionales a 1/*a*, 1/*b* y 1/*c* respectivamente. Escribimos la proporción así:

$$\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$$

Actividad resuelta

Queremos repartir 1.100 unidades en partes inversamente proporcionales a los números 5 y 6.

$$\frac{1100}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}=\frac{x}{\frac{1}{5}}\Rightarrow\frac{1100}{\frac{11}{30}}=\frac{x}{\frac{1}{5}}$$

$$x=\frac{\frac{1}{5}\cdot 1100}{\frac{11}{30}}=\frac{220}{\frac{11}{30}}=600 \quad y=\frac{\frac{1}{6}\cdot 1100}{\frac{11}{30}}=\frac{\frac{550}{3}}{\frac{11}{30}}=500$$

Actividades propuestas

S27. Reparta 3.420 en partes directamente proporcionales a 6, 12 y 20.

S28. Reparta 3.420 en partes inversamente proporcionales a 6, 12 y 20.

2.2.5 Porcentajes: resolución de problemas

Porcentajes

Un porcentaje se puede contemplar como **una proporción**, **una fracción** o **asociarlo a un número decimal**. Veamos cómo:

- **Un porcentaje indica una proporción**

Cuando decimos que el 40 % de la juventud tiene estudios universitarios, estamos diciendo que de cada 100 jóvenes, 40 de ellos poseen estudios universitarios.

Podemos representar estos datos en una tabla:

Total	100	200	300	50	25	350	…
Parte (40 %)	40	80	120	20	10	?	…

Vemos que se trata de una tabla de proporcionalidad directa, lo que nos permite tratar la situación de porcentaje como una situación de proporcionalidad.

100 jóvenes ——— 40 universitarios 350 jóvenes ——— *x* universitarios	$\frac{100}{350}=\frac{40}{x}$ $\quad x=\frac{350\cdot 40}{100}=140\ universitarios$ De 350 jóvenes, 140 son universitarios
Para calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad, se multiplica el tanto por la cantidad y el resultado se divide entre 100	t % de *C* = $\frac{t\cdot C}{100}$

- **Un porcentaje es una fracción**

Coger el 40 % de una cantidad es lo mismo que dividir la citada cantidad en 100 partes y tomar 40, es decir, tomar la fracción $\frac{40}{100}$.

Por lo tanto, en el ejemplo anterior:

40 % de 350 = $\frac{40}{100}$ de 350 = $\frac{40 \cdot 350}{100}$ = 140

Un porcentaje se puede calcular como la fracción de una cantidad	t % de $C = \frac{t}{100}$ de $C = \frac{t \cdot C}{100}$

- **Un porcentaje se asocia a un número decimal**

Un porcentaje se puede expresar, tal como se muestra en el apartado anterior, como una fracción. A su vez, una fracción se puede expresar en forma de decimal, lo que nos permitirá utilizar una manera rápida para el cálculo de porcentajes.

40 % en forma de fracción es $\frac{40}{100}$, y a su vez, en forma decimal 40 : 100 = 0,40.

Por lo tanto, el 40 % de 350 = 0,40 · 350 = 140

Para calcular un porcentaje, se multiplica el total por el tanto por ciento expresado en forma decimal

- **Cálculo rápido de algunos porcentajes**

Algunos porcentajes equivalen a fracciones muy sencillas, lo que facilita el cálculo. Veamos algunas de ellos:

El 50 % es la mitad	$50\,\% \rightarrow \frac{50}{100} \rightarrow \frac{1}{2}$ $\rightarrow \boldsymbol{Para\ calcular\ el\ 50\,\%, se\ divide\ entre\ 2}$
El 25 % es la cuarta parte	$25\,\% \rightarrow \frac{25}{100} \rightarrow \frac{1}{4}$ $\rightarrow \boldsymbol{Para\ calcular\ el\ 25\,\%, se\ divide\ entre\ 4}$
El 20 % es la quinta parte	$20\,\% \rightarrow \frac{20}{100} \rightarrow \frac{1}{5}$ $\rightarrow \boldsymbol{Para\ calcular\ el\ 20\,\%, se\ divide\ entre\ 5}$
El 10 %, se divide entre 10	$10\,\% \rightarrow \frac{10}{100} \rightarrow \frac{1}{10}$ $\rightarrow \boldsymbol{Para\ calcular\ el\ 10\,\%, se\ divide\ entre\ 10}$
El 75 % son las $\frac{3}{4}$ $\boldsymbol{partes}$	$75\,\% \rightarrow \frac{75}{100} \rightarrow \frac{3}{4}$ $\rightarrow \boldsymbol{Para\ calcular\ el\ 75\,\%, se\ divide\ entre\ 4\ y}$ ***después se multiplica por 3***

Resolución de problemas

En los porcentajes aparecen tres cantidades relacionadas, que son: cantidad parcial, cantidad total y porcentaje. Al resolver problemas con porcentajes, en general, conocemos dos de esas cantidades, y lo que queremos es calcular la otra.

- **Conocemos el total y una parte. Calculamos el porcentaje.**

El tanto por ciento se calcula dividiendo la cantidad parcial entre la cantidad total. El resultado de esta división será el tanto por ciento expresado como decimal. Para expresarlo en porcentaje multiplicamos por 100.

Actividad resuelta

Un jugador de baloncesto encestó 15 de 25 tiros libres. ¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

$$\left.\begin{array}{r} Cantidad\ total = 25 \\ Cantidad\ parcial = 15 \end{array}\right\} \quad Porcentaje = \frac{Cantidad\ parcial}{Cantiadad\ total} = \frac{15}{25} = 0{,}6 = 60\%$$

- **Conocemos el porcentaje y el total. Calculamos una parte**

La cantidad parcial se calcula multiplicando la cantidad total por el tanto por ciento expresado como decimal.

Actividad resuelta

Un jugador de baloncesto en un entrenamiento, de 25 tiros libres, acertó el 60 %. ¿Qué cantidad de tiros encestó?

$$\left.\begin{array}{r} Cantidad\ total = 25 \\ Porcentaje\ de\ aciertos = 60\ \% \end{array}\right\} \quad Porcentaje\ expresado\ como\ decimal\ 60\ \% = \frac{60\ \%}{100} = 60\ \%$$

$$Cantidad\ parcial = 0{,}60 \cdot 25 = 15\ tiros\ que\ encestó$$

- **Conocemos el porcentaje y una parte. Calculamos el total**

La cantidad total se calcula dividiendo la cantidad parcial entre el tanto por ciento expresado como decimal.

Actividad resuelta

Un jugador de baloncesto en un entrenamiento de tiros libres acertó 15 tiros, que supuso el 60 % del total. ¿Qué cantidad total de tiros libres efectuó?

$$\left.\begin{array}{r} Cantidad\ total = 15 \\ \\ Porcentaje\ de\ aciertos = 60\ \% \end{array}\right\} \quad Porcentaje\ expresado\ como\ decimal\ 60\ \% = \frac{60\ \%}{100} = 60\ \%$$

$$Cantidad\ parcial = \frac{15}{0{,}60} = 25\ tiros\ libres\ que\ efectuó$$

Actividades propuestas

S29. Quedan 10 huevos en el frigorífico y cogí 7 para hacer la comida. ¿Qué porcentaje cogí?

S30. Al calcular el 20 % sobre una cantidad, se obtuvieron 24 euros. ¿Cuál es la cantidad?

S31. Calcule el 40 % de 380 euros.

2.2.6 Aumentos y disminuciones porcentuales

- **Aumentos porcentuales**

Aumentar una cantidad en un *a* % equivale a calcular el $(100 + a)$ % de dicha cantidad.

Actividad resuelta

En una fábrica hay 140 empleados y van a aumentar en un 20 % los puestos de trabajo. ¿Cuántos trabajadores pasará a tener la fábrica?

1ª forma	$\text{AUMENTO} \rightarrow 20\,\%\ \text{de}\ 120 = \frac{140\ \cdot\ 20}{100} = 28$ $\text{TOTAL EMPLEADOS FINALES} \rightarrow 140 + 28 = 168$
2ª forma	Un aumento del 20 % significa que por cada 100 puestos de trabajo se aumentan 20 más $\left.\begin{array}{l} 100 \text{ ——— } 120 \\ 140 \text{ ——— } x \end{array}\right\} \quad \frac{100}{140} = \frac{120}{x} \rightarrow \frac{140 \cdot 120}{100} = 168$
3ª forma	Podemos calcular directamente el 120 % de 140 → $140\ \cdot\ 1{,}20 = 168$

- **Disminución porcentual**

Disminuir una cantidad en un a *% equivale a calcular el (100 –* a*) % de dicha cantidad.*

Actividad resuelta

El año pasado hubo 300 accidentes en una población. Después de tomar medidas, se espera rebajar la siniestralidad un 15 %. ¿Cuál será el máximo de accidentes esperados?

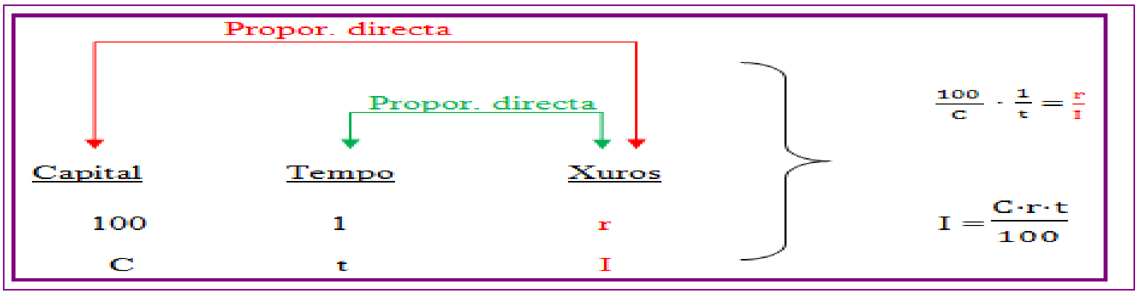
1ª forma	$\text{DISMINUCIÓN} \rightarrow 15\,\%\text{ de }300 = \dfrac{300 \cdot 15}{100} = 45$ $\text{TOTAL ACCIDENTES FINALES} \rightarrow 300 - 45 = 255$
2ª forma	Una disminución del 15 % significa que de cada 100 quedan en 85 100 ——— 85 300 ——— x $\dfrac{100}{300} = \dfrac{85}{x} \rightarrow \dfrac{300 \cdot 85}{100} = 255$
3ª forma	Podemos calcular directamente el 85 % de 300 → $300 \cdot 0{,}85 = 255$

- **Intereses bancarios**

Se denominan intereses los beneficios que produce el dinero prestado. Ese beneficio es directamente proporcional a la cantidad prestada y al tiempo que dura el préstamo. Se trata entonces de una situación de *proporcionalidad compuesta*.

El tanto por ciento del beneficio anual se llama interés o rédito (*r*).

Un capital, *C*, colocado al *r %* anual durante *t* años produce un beneficio *I*. Por lo tanto, y toda vez que hablamos de una proporcionalidad compuesta:



Para el cálculo de los intereses bancarios es necesario tener en cuenta el tiempo

Si el tiempo que se deposita el dinero no es un año, se cobra la parte proporcional de los intereses anuales. Así, la fórmula que utilizamos para el cálculo de los intereses tendrá variaciones según el tiempo esté expresado en años, meses o días.

El tiempo viene dado en años	El tiempo viene dado en meses	El tiempo viene dado en días
$I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{100}$	$I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{1.200}$	$I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{36.000}$

Actividad resuelta

Un banco ofrece un beneficio anual del 4 %. ¿Qué beneficio obtendremos si depositamos la cantidad de 750 euros durante un período de tres años?

Nos fijamos en los datos que nos dan:

- Los intereses o beneficio anual, conocido también como rédito (r = 4 %).
- El capital que depositamos (C = 750).
- El período de tiempo, en años, en el que está depositado el capital (t = 3).
- Sabemos que $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$; sustituyendo $I = \frac{750 \cdot 4 \cdot 3}{100}$ = 90 euros.

Por lo tanto, podemos decir que 750 euros colocados al 4 % durante 3 años producen 90 euros.

Actividades propuestas

S32. El índice de precios al consumo (IPC) subió, en el último año, un 4,3 %. Si hace un año gastaba 450 euros en comida cada mes, ¿cuánto tendré que gastar este año comprando lo mismo?

S33. Un litro de gasóleo costaba 1,20 euros y el precio bajó un 4 %. ¿Cuánto cuesta ahora?

S34. Un banco ofrece un beneficio anual del 4 %. ¿Qué beneficio obtendremos si depositamos la cantidad de 750 euros durante un período de 6 meses?

S35. Calcule el interés producido por 8.000 euros colocados a un 3 % durante 4 años.

2.3 Álgebra y ecuaciones

2.3.1 Álgebra: uso y significado

Álgebra es la parte de las matemáticas que estudia la relación entre números, letras y signos de las operaciones aritméticas.

El lenguaje que usamos en operaciones aritméticas en las que sólo intervienen números se llama lenguaje numérico.

En el lenguaje algebraico utilizamos letras para expresar números de valor desconocido o indeterminado. A continuación veremos algunas de las utilidades del álgebra:

Para expresar propiedades de las operaciones aritméticas (identidades)

Por ejemplo, la propiedad distributiva. "*El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos parciales del número por cada sumando*". Esta propiedad, con el lenguaje algebraico, quedaría de la manera siguiente:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Para manejar números de valor indeterminado y sus operaciones (expresiones algebraicas)

Un número natural ....a
El siguiente número natural .... $a + 1$
El doble del número ....$2a$
Otro número ocho unidades menor ....$a – 8$
El cuadrado del número más el triple del número ....$a^2 + 3a$

Para expresar la relación entre varias variables de magnitudes distintas (fórmulas)

Capital	Tiempo	Intereses
100	1	r
C	t	I

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Para expresar relaciones que faciliten la resolución de problemas (ecuaciones)

Por ejemplo: encontrar un número tal que el cuádruple del dicho número más veinte unidades sea igual a sesenta y ocho.

$$4x + 20 = 68$$

2.3.2 Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de números y letras unidos mediante operaciones aritméticas que sirve para expresar información.

Los elementos de una expresión algebraica son:

- **Términos**: cada uno de los sumandos.
- **Término independiente**: el que sólo tiene parte numérica.
- **Variables**: las cantidades desconocidas. Se representan habitualmente con las letras *x*, *y*, *z*.

- **Coeficiente**: La parte numérica que multiplica a las variables.

Expresión algebraica	Términos	Término independiente	Variables	Coeficientes
$5x^2 – 2y+ 6$	$5x^2$; $2y$; 6	6	x; y	5; 2; 6

Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números determinados y hacer las operaciones indicadas.

Actividad resuelta

Calcule el valor numérico de las expresiones algebraicas con los valores de las letras indicados:

Expresión algebraica	Valor que les damos a las letras	Valor numérico de la expresión algebraica
$x + y$	$x = 8; y = 3$	$8 + 3 = 11$
$3a + b - c$	$a = 1; b = 2; c = 7$	$3 \cdot 1 + 2 - 7 = 3 + 2 - 7 = -2$
$x^2 + y^2$	$x = 2; y = 4$	$2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$
$\frac{a-4}{b}+5$	$a = 10; b = 2$	$\frac{10-4}{2} + 5 = \frac{6}{2} + 5 = 3+5 = 8$

Actividades propuestas

S36. Calcule el valor numérico para la expresión: $5x^2 + 3x - 9$, para x = 1, x = 2, x = 3.

S37. Calcule los valores numéricos de las expresiones algebraicas para los valores que se indican:

Para x = 2	$x^4 + x^2 - 3x^2 - 2x + 6$
Para x = -3	$x^4 - 9x^2 + 5$

Monomios

- **Un monomio** es una expresión algebraica donde los números (parte numérica) y letras (parte literal o variable) están relacionados por productos y potencias de exponente positivo. Ejemplo: $5x^3y^2z$

En todo monomio distinguimos:

Coeficiente: es el número que aparece multiplicando a las variables, en este caso el 5.
Parte literal: está formada por las letras y sus exponentes, en este caso x^3y^2z.

Grado: es la suma de todos los exponentes de las letras o variables, en este caso $3 + 2 + 1 = 6$.

- **Monomios semejantes**: se dice que dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

$$3bc \longrightarrow -2bc \quad 8x^2y \longrightarrow \tfrac{2}{6}x^2y \qquad \textit{Son semejantes}$$

- **Suma y resta de monomios:** para sumar y restar monomios, estos deben ser semejantes, es decir, sus partes literales deben ser iguales.
  - Para sumar monomios, se suman sus coeficientes y se deja la misma parte literal.
  - Para restar monomios, se restan sus coeficientes y se deja la misma parte literal.

Si los monomios no son semejantes, la suma y la resta se dejan indicadas.

Actividad resuelta

$2xy + 5xy - xy = 6xy$	$2x^2 + 9x^2 = 11x^2$
$3a - 8a = -5a$	$3x - 6x^2$ Queda como está, no son semejantes

- **Multiplicación y división de monomios:** se pueden multiplicar y dividir todos los monomios sean o no semejantes.
  - El producto de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales (la suma de los exponentes).
  - La ratio de monomios tiene por coeficiente la ratio de los coeficientes y por parte literal la ratio de las partes literales (la resta de los exponentes). El resultado puede ser otro monomio, una fracción o un número.

Actividad resuelta

$(8x)\cdot(-3x^2) = 8\cdot(-3)\cdot x\cdot x^2 = -24x^3$	$(3a)\cdot\left(\frac{5}{6}ab\right) = 3\cdot\frac{5}{6}\cdot a\cdot a\cdot b = \frac{15}{6}a^2b$
$12x^6 : 4x^2 = \frac{12x^6}{4x^2} = (12:4)x^{6-2} = 3x^4$ (monomio)	$(2ab):(6b^2) = \frac{2ab}{6b^2} = \frac{2}{6}ab^{1-2} = \frac{1}{3}ab^{-1} = \frac{a}{3b}$ (fracción)
$(18a^2b):(2a^2b) = \frac{18a^2b}{2a^2b} = 9a^{2-2}b^{1-1} = 9$ (número)	

Actividades propuestas

S38. Realice las operaciones siguientes:

$-3p^4 \cdot (-4p) \cdot (-5p^6) =$	$2a^4b^2 \cdot\ 4a^6b^3 =$	$2 \cdot (5x^2) \cdot (-3x) =$
$\dfrac{35x^4y^4z^4}{-7xy^2z^3} =$	$\dfrac{21x^4y^5}{3x^2y^3} =$	$26m^4n^7pq^3 : (-13mn^3q) =$

2.3.3 Polinomios. Productos notables

Polinomios

- **Polinomio** es la suma o resta de varios monomios. Cada uno de los monomios es un término, y si hay un término que no tenga parte literal (letras) es el término independiente.
- En los polinomios distinguimos:
  - **Grado de un polinomio:** es el grado del monomio de mayor grado.
  - **Coeficientes de un polinomio:** son los coeficientes de los monomios que lo forman.
  - **Término independiente de un polinomio:** es el monomio que no tiene parte literal (letras).

Ejemplo: sea el polinomio $x^5 - 4x^3 + 5x^2 + 8x - 9$

$x^5 - 4x^3 + 5x^2 + 8x - 9$			
Términos	Grado	Coeficientes	Término independiente
$x^5, -4x^3, 5x^2, 8x, -9$	5	1 , -4 , 5 , 8 , -9	-9

- **Valor numérico de un polinomio** es el valor que se obtiene al sustituir la variable o parte literal por un número y efectuar las operaciones.

Actividad resuelta

Calcule el valor numérico del polinomio $x^5 - 4x^3 + 5x^2 + 8x - 9$ para un valor de $x = 2$.

Lo que hacemos es sustituir en el polinomio la variable *x* por el valor 2.

$2^5 - 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 9 = 32 - 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 9 = 32 - 32 + 20 + 16 - 9 = 27$

- **Suma de polinomios,** la suma de dos polinomios es otro polinomio. Para sumar dos polinomios o más, se suman los monomios de igual parte literal y las demás operaciones se dejan indicadas.

- **Resta de polinomios**, para restar polinomios, se restan los monomios semejantes y las demás operaciones se dejan indicadas, o lo que es lo mismo, se suma a un polinomio el contrario del segundo.

Actividad resuelta

Dados los polinomios $A = 4x^3 - 5x + 8$ y $B = 5x^2 - 3x - 10$, calcule ***A + B y A - B.***

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (4x^3 - 5x + 8) + (5x^2 - 3x - 10) = 4x^3 + 5x^2 - 5x - 3x + 8 - 10 =$$
$$= 4x^3 + 5x^2 - 8x - 2$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (4x^3 - 5x + 8) - (5x^2 - 3x - 10) = 4x^3 - 5x^2 - 5x + 3x + 8 + 10$$
$$= 4x^3 - 5x^2 - 2x + 18$$

$Podemos\ colocarlos\ y\ sumarlos\ y\ restarlos\ así$:

$$\begin{array}{rrrr}
A = & 4x^3 & & -5x+8 \\
B = & & 5x^2 & -3x-10 \\
\hline
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = & 4x^3 & +5x^2 & -8x-2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
A = & 4x^3 & & -5x+8 \\
-B = & & -5x^2 & +3x+10 \\
\hline
\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = & 4x^3 & -5x^2 & -2x+18
\end{array}$$

- **Producto de polinomios.** Para calcular el producto de dos polinomios *se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios de otro factor y luego se suman los polinomios obtenidos*. Hace falta tener en cuenta lo siguiente:
  - Colocamos los polinomios uno debajo de otro.
  - Se comienza a multiplicar por la izquierda y se multiplica el primer monomio del segundo polinomio por todos los monomios del primer polinomio.
  - Los coeficientes (números) se multiplican y las partes literales se multiplican sumando los exponentes.
  - Se continúa multiplicando los demás monomios del segundo polinomio por el primero.
  - Se suman los polinomios resultantes.

Actividad resuelta

Dados los polinomios $A = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ y $B = 3x - 2$, calcule **A · B**.

Se debe comenzar a multiplicar por la izquierda. Primero se multiplican los signos, a continuación los coeficientes y por último se suman los exponentes.

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & x^3 & -2x^2 & +3x & -1 & \\
 & & & 3x & -2 & \\
\hline
3x^4 & -6x^3 & +9x^2 & -3x & & \rightarrow (x^3-2x^2+3x-1)\cdot(3x) \\
 & -2x^3 & +4x^2 & -6x & +2 & \rightarrow (x^3-2x^2+3x-1)\cdot(-2) \\
\hline
3x^4 & -8x^3 & +13x^2 & -9x & +2 &
\end{array}$$

- **División de un polinomio entre un monomio**. Se divide cada término del polinomio entre el monomio. Primero se dividen los signos, luego los coeficientes (números) y las partes literales restando los exponentes.

Actividad resuelta

Calcule la división siguiente de un polinomio entre un monomio $8x^6 - 2x^5 + 3x^4 : 2x$

Dividimos cada término del polinomio entre el monomio $\frac{8x^6}{2x} - \frac{2x^5}{2x} + \frac{3x^4}{2x} = \frac{8}{2}x^{6-1} - \frac{2}{2}x^{5-1} + \frac{3}{2}x^{4-1} = 4x^5 - x^4 + \frac{3}{2}x^3$

Actividades propuestas

S39. Dados los polinomios $A = 5x^3 + 9x - 7$ $B = -2x^3 + 6x^2$, calcule:

$A + B$	$A - B$	$B - A$

S40. Realice las multiplicaciones y divisiones siguientes:

$5x \cdot (x^2 + x + 1) =$	$(2x - 3) \cdot (3x - 2) =$	$(3x - 2) \cdot (3x^2 + 4x - 1) =$
$8x^6 - 6x^5 + 10x^3\ 2x =$	$3x^8 - 12x^6 + 6x^5 : 3x^4 =$	$-x^9 + x^7 - x^6 : x^4 =$

Igualdades notables

Llamamos **igualdades notables** o **productos notables** a ciertos productos de binomios que debemos conocer pues abrevian los cálculos con expresiones algebraicas. Son las siguientes:

- **Cuadrado de una suma:** El cuadrado de una suma de dos números es igual al cuadrado del primer sumando más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo sumando.

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- **Cuadrado de una diferencia:** El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- **Suma por diferencia:** Una suma de monomios multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$$

Actividades resueltas

Calcule:

$(3x+1)^2 = (3x)^2+2\cdot 3x\cdot 1+(1)^2 = 9x^2+6x+1$
$(2a-b)^2 = (2a)^2+2\cdot 2a\cdot b+(b)^2 = 4a^2-4ab+b^2$
$(4-5x)\cdot(4+5x) = 4^2-(5x)^2 = 16-25x^2$

Actividades propuestas

S41. Calcule:

$(3a+2b)^2 =$	$(2x-y)^2 =$	$(x+6)\cdot(x-6) =$

Extracción del factor común

A veces en las expresiones algebraicas nos podemos encontrar que estas están formadas por sumandos que son productos y, además, en estos productos hay un factor que se repite; es decir, que es común en todos los sumandos.

Así en la expresión a · b + a · c + a · d – a · e observamos que los sumandos son productos. Además, en todos los sumandos que son productos hay un factor, que es que el "a" se repite; es decir, que es común. Podemos entonces, transformar esa suma en un producto sacando el factor común y colocando un paréntesis:

a · b + a · c + a · d – a · e = a · (b + c + d – e)

Una de las aplicaciones de la extracción del factor común es su empleo en la simplificación de fracciones algebraicas.

Ejemplos:

Simplificar la expresión $\frac{5a+5b}{a^2+ab}$

$$\frac{5a+5b}{a^2+ab} = \frac{5\cdot\cancel{(a+b)}}{a\cdot\cancel{(a+b)}} = \frac{5}{a}$$

Simplificar la expresión $\frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2}$

$$\frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \frac{x\cdot\cancel{(x-y)}}{(x+y)\cdot\cancel{(x-y)}} = \frac{x}{(x+y)}$$

Actividades propuestas

S42. Extraiga el factor común en las expresiones algebraicas siguientes.

$2x + 2xy = 2x \cdot (\_ + \_)$	$5x^2 + 10xy + 15x = 5x \cdot (\_ + \_ + \_)$
$z^3 + 9z =$	$\frac{x^2}{(x^2 + x^4)} =$

2.3.4 Ecuaciones: significado y utilidad

Las ecuaciones son igualdades algebraicas (con números y letras) que nos van a permitir establecer relaciones entre valores conocidos (los datos) y valores desconocidos (las incógnitas).

Una ecuación expresa en lenguaje algebraico una relación entre cantidades de las que no conocemos su valor y manejándolas matemáticamente tenemos una herramienta matemática para resolver problemas.

Ejemplo: la mitad de un número es igual a su quinta parte más seis unidades.

Un número	x	Ecuación es la igualdad algebraica que nos permite establecer relaciones $\frac{x}{2} = \frac{x}{5} + 6$
Su mitad	$x/2$	
Su quinta parte	$x/5$	

- **Elementos y nomenclatura de una ecuación**

En una ecuación podemos distinguir los elementos siguientes:

- **Miembros de una ecuación**: cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo de igualdad.
- **Términos**: los sumandos que forman los miembros de la ecuación.
- **Incógnitas**: son las letras que aparecen en la ecuación.
- **Grado de una ecuación**: es el mayor de los grados de sus términos.

1er miembro	2º miembro
$\mathbf{3x + 7 \ = 2x - 5}$	
Términos	

- **Resolver una ecuación** es encontrar el valor o valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.
- **Transposición de términos** es una técnica básica que permite transformar las ecuaciones en otras equivalentes más sencillas, llevando los términos de un miembro a otro de la igualdad y consiste en el siguiente principio:
  - *Al sumar, restar, multiplicar o dividir el mismo número en los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente.*

La transposición de términos permite despejar la incógnita, es decir, dejarla sola en uno de los miembros de la igualdad, lo que equivale a resolver la ecuación.

Actividad resuelta

Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro $\left.\begin{array}{l} x+5=8 \\ x=8-5 \end{array}\right\}$ Restamos 5 en los dos miembros	Lo que está restando en un miembro pasa sumando al otro miembro $\left.\begin{array}{l} x-2=3 \\ x=3+2 \end{array}\right\}$ Sumamos 2 en los dos miembros
Lo que está multiplicando en un miembro pasa dividiendo al otro miembro $\left.\begin{array}{l} 5x=10 \\ x=\frac{10}{2} \end{array}\right\}$ Dividimos entre 2 los dos miembros	Lo que está dividiendo en un miembro pasa multiplicando al otro miembro $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{5}=2 \\ x=5\cdot 2 \end{array}\right\}$ Multiplicamos por 2 los dos miembros

2.3.5 Resolución de ecuaciones de primer grado. Problemas

Para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla, usaremos dos recursos:

- Trasponer los términos
- Reducir sus miembros

Actividad resuelta

$5x+3=2x+21 \rightarrow 5x-2x=21-3 \rightarrow 3x=18 \rightarrow x=\frac{18}{3} \rightarrow x=6$
$\frac{3}{2}x+5=20 \rightarrow \frac{3}{2}x=20-5 \rightarrow \frac{3}{2}x=15 \rightarrow x=\frac{15\cdot 2}{3}=10$
En caso de que haya paréntesis, se resuelven primero estos $2\cdot(x-4)-(6+x)=3x-4 \rightarrow 2x-8-6-x=3x-4 \rightarrow 2x-x-3x=-4+8+6-2x=10$ $\rightarrow x=\frac{10}{-2} \rightarrow x=-5$

Resolución de ecuaciones con denominadores

Cuando hay denominadores numéricos, transformamos las fracciones en otras equivalentes que tengan todas ellas igual denominador, usando el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones. Observe cómo se hace en el ejemplo siguiente:

$$\frac{x+2}{4}-\frac{2x-3}{3}=x-7\ m.c.m\ (4,3)=12$$

Ponemos denominador 12 a todas las fracciones y compensamos los numeradores (números en rojo):

$$\frac{3\cdot(x+2)}{12}+\frac{4\cdot(2x-3)}{12}=\frac{12\cdot(x-7)}{12}\rightarrow\frac{3x+6}{12}-\frac{8x-12}{12}=\frac{12x-84}{12}$$

Multiplicamos los dos miembros por 12 para eliminar los denominadores:

$$3x+6-(8x-12)=12x-84\ \frac{pasamos\ las\ incógnitas\ al\ primer\ miembro}{y\ los\ números\ al\ segundo}$$

$$3x-8x-12x=-6-12-84\rightarrow 17x=-102\ \rightarrow x=\frac{-102}{17}=6$$

La solución de la ecuación es *x* = 6. Lo podemos comprobar sustituyendo *x* = 6 en la ecuación original:

Primer miembro:

$$\frac{6+2}{4}-\frac{12-3}{3}=\frac{8}{4}-\frac{9}{3}=2-3=-1$$

Segundo miembro: 6 – 7 = -1

Los dos miembros dan igual, la ecuación está bien resuelta.

Actividades propuestas

S43. Resuelva las ecuaciones siguientes:

$5x-8-x=7-3$	$4=x+5-6x$
$4\cdot(x+8)+3\cdot(6-x)=0$	$9+2\cdot(3x-1)=8x-(4x+9)+2$
$\frac{3x-5}{4}=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{2x-3}{2}-\frac{4x-1}{2}=\frac{3x+1}{4}+\frac{6x-2}{6}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES DE PRIMER GRADO

En la resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado conviene que siga estos pasos:

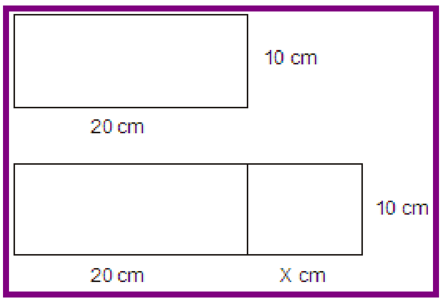
- Lea el problema detenidamente e identifique lo que se pregunta (lo que se quiere saber).
- Póngale un nombre (*x*, por ejemplo) a la incógnita del problema (una edad, un número, un tiempo, el precio de algún objeto).
- Traduzca al lenguaje algebraico la información del problema, escribiendo una ecuación.
- Resuelva la ecuación.
- Compruebe que el resultado obtenido sea válido y la solución del problema.

Actividades resueltas

Una madre tiene 64 años de edad y su hija 32. ¿Cuántos años pasaron desde que la edad de la madre era el triple de la edad de la hija?

Solución	La incógnita es: x = años que pasaron. Edad de la madre hace *x* años: 64 – x; edad de la hija = 32 – x. La ecuación que hay que escribir corresponde a: Edad de la madre hace *x* años = 3 veces la edad de la hija hace *x* años; traducimos esto a lenguaje algebraico: $64 - x = 3 \cdot (32 - x)$. Resolvemos la ecuación: $64 - x = 96 - 3x \longrightarrow -x + 3x = 96 - 64 \longrightarrow 2x = 32 \longrightarrow x = 16$. Hace 16 años la edad de la madre era el triple de la edad de la hija. ¿Puede comprobarlo?

La base de un rectángulo mide 20 cm y la altura 10 cm. ¿Cuántos centímetros debe aumentar la base para que el área aumente en 100 cm^2?

Solución		Le llamamos *x* a lo que debe aumentar la base del rectángulo. El área del rectángulo inicial es 200 cm^2. El área del nuevo rectángulo es $(20 + x) \cdot 10$, y esto tiene que dar $200 + 100 = 300$ cm^2; así que escribimos la ecuación: $(20+x) \cdot 10 = 300$ Resolviendo la ecuación, resulta x = 10 cm.

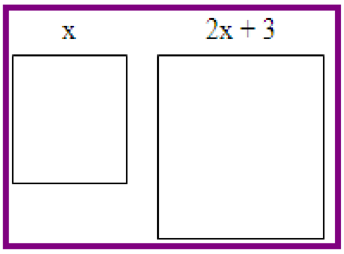
El lado de un cuadrado es 3 metros mayor que el doble del lado de otro cuadrado. Si el perímetro del primer cuadrado es 48 metros mayor que el del segundo. ¿Cuál es la longitud de los lados de ambos cuadrados? (Haga un dibujo con los dos cuadrados y escriba en ellos la información suministrada por el texto del ejercicio).

Sea x la longitud del lado del cuadrado pequeño. Entonces la longitud del lado del cuadrado grande es $2x + 3$. El perímetro del cuadrado grande es $4\cdot(2x + 3) = 8x + 12$, en tanto que el perímetro del cuadrado pequeño es 4x. Escribimos la ecuación:

Perímetro grande = perímetro pequeño + 48

$$8x+12=4x+48 \quad \rightarrow \quad 8x-4x=48-12 \quad \rightarrow \quad 4x=36 \rightarrow x=\frac{36}{4}=9$$

Comprobamos el resultado. El lado pequeño mide 9; el lado grande mide 2 · 9 + 3 = 21; perímetro del cuadrado pequeño = 36; perímetro del cuadrado grande = 84; efectivamente se cumple que 84 es igual a 36 + 48.



Actividades propuestas

S44. Halle a qué número le suma 9 y resulta el doble que si le resta 3.

S45. Una granja tiene 34 animales. Si el número de vacas es la mitad que el de cerdos y el número de gallinas es tres veces el de cerdos menos dos. ¿Cuántos animales hay de cada tipo?

S46. Calcule las dimensiones de una finca rectangular sabiendo que es 80 metros más larga que ancha y que el vallado que la rodea tiene una longitud de 560 metros.

2.3.6 Ecuaciones de segundo grado, resolución

- Una ecuación es de segundo grado si después de reducirla cumple estas condiciones:
  - Alguno de sus términos es un monomio de segundo grado.
  - No contiene términos de grado superior a dos.
- Toda ecuación de segundo grado con una incógnita se puede expresar de la siguiente **forma general:**

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}\} \quad \text{donde} \quad a \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \textbf{ y } \boldsymbol{c} \textbf{ son coeficientes conocidos}$$

Ejemplos:

Ecuación $\rightarrow 5x^2=45$ Forma general $\rightarrow 5x^2+0x-45=0$ Coeficientes $\rightarrow a=5, b=0,\ c=-4$	Ecuación $\rightarrow (x-3)\cdot(x-2)=0$ Forma general $\rightarrow x^2-5x+6=0$ Coeficientes $\rightarrow a=1, b=-5, c=6$

- En general, una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas, aunque también se pueden encontrar algunas con una solución doble o sin solución.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- Ecuación tipo $\boldsymbol{x^2 = q}$

Resolvemos esta ecuación buscando los números que tengan por cuadrado *q.* Entonces buscamos la raíz cuadrada de *q.*

$$x^2 = q \rightarrow x = \pm\sqrt{q}$$

Si *q* es un número positivo, hay dos soluciones opuestas; si *q* es negativo, no hay solución.

Actividad resuelta

$x^2 = 49 \rightarrow x = \pm\sqrt{49} \rightarrow x = \begin{cases} +4 \\ -4 \end{cases}$
$x^2 + 36 = 0 \rightarrow x^2 = -36 \rightarrow x = \pm\sqrt{-36}$ $\text{No tiene solución, la raíz cuadrada de} -36 \text{ no existe}$

- Ecuación tipo $\boldsymbol{ax^2 - c = 0}$

Resolvemos como el anterior:

$$ax^2 - c = 0 \rightarrow ax^2 = c \rightarrow x^2 = \frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Si el radicando es positivo, hay dos soluciones; si es negativo, la ecuación no tiene solución.

Actividad resuelta

$2x^2 - 18 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{18}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \begin{cases} +3 \\ -3 \end{cases}$
$5x^2 + 20 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-20}{5} \rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$ $\text{No tiene solución, la raíz cuadrada de} -4 \text{ no existe}$

- Ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

En este caso extraemos factor común en el primer miembro:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x \cdot (a + bx) = 0$$

Si un producto es igual a 0, necesariamente uno de los factores tiene que ser 0, así:

$$x \cdot (a + bx) = 0 \begin{cases} x = 0 \leftarrow PRIMERA\ SOLUCIÓN \\ (ax + b) = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a} \leftarrow SEGUNDA\ SOLUCIÓN \end{cases}$$

Actividad resuelta

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x \cdot (x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

- Ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

Se emplea la fórmula que permite llegar a las soluciones con rapidez y comodidad:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Actividad resuelta

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow a = 2;\ b = -7; c = 6$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.2.6}}{2.2} = \frac{7 \pm \sqrt{(49-48)}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{4} = \begin{cases} \frac{8}{4} \\ \frac{6}{4} \end{cases} \rightarrow SOLUCIONES\ 2\ y \frac{3}{2}$$

Actividades propuestas

S47. Resuelva las ecuaciones siguientes:

$x^2 = 100$	$x^2 + 6 = 10$	$3x^2 - 2x = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$	$6x^2 - 5x + 2 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = 0$

3. Actividades finales

S48. Calcule

<table>
<tr><td>$6-[5+(8-2)]=$</td><td>$[(-8)\cdot(+9)]:[(+6)\cdot(-3)]=$</td><td>$21-4\cdot 6+12:3=$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(-3)\cdot(-4)(-6)\cdot 3=$</td><td colspan="2">$(-2)\cdot[11+3\cdot(5-7)-3\cdot(8-11)]=$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(-2)\cdot(7-11)-[12-(6-8)]:(-7)=$</td></tr>
</table>

S49. Exprese en forma de fracción

$0{,}325$	$3{,}1\hat{5}$	$0{,}\widehat{85}$

S50. Calcule

$\left(1-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{15}\right)=$	$\left[1-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\right]-\left[\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)\right]=$
$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=$	$\frac{2}{5}-\left[1-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\frac{3}{4}=$

S51. Xiana empleó los 2/3 de su sueldo en gastos varios del mes y los 3/5 del resto en ocio. Ahorró 200 euros. ¿Cuánto cobró de sueldo en total?

S52. En un centro educativo los 3/8 del alumnado practican natación, 2/5 juegan al tenis, una décima parte juega al fútbol y el resto no hace deporte. ¿Qué fracción del alumnado no practica deporte?

S53. Un recipiente de 2 litros y cuarto lleva un dosificador con una capacidad de 3/40 de litro. ¿Cuántas dosis contiene el recipiente?

S54. Reduzca a una sola potencia:

$x^3:\left(\frac{1}{x}\right)^2=$	$\left(\frac{1}{z}\right)^6\cdot z^4=$	$\left(\frac{x}{y}\right)^6:\left(\frac{x}{y}\right)^5=$
$\left(\frac{1}{a^3}\right)^2:\left(\frac{1}{a^2}\right)^3=$	$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^4}=$	$\frac{a^3\cdot a^7}{a^4\cdot a^5}=$

S55. Calcule el término desconocido en cada proporción:

$\frac{15}{6}=\frac{x}{14}$	$\frac{6}{9}=\frac{10}{x}$	$\frac{14}{x}=\frac{21}{33}$

S56. Complete la tabla de proporcionalidad directa. ¿Cuál es a razón de proporcionalidad?

2	1	3	4	
5			10	25

S57. Complete la tabla de proporcionalidad inversa siguiente:

1	2	4	5	
20	10			2

S58. Gasté 260 euros en 325 lotes de un producto. ¿Cuánto gastaré si necesito adquirir 180 lotes más?

S59. Una ciclista recorre cierta distancia en 3 horas yendo a 20 km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer esa misma distancia una moto que va a 60 km/h?

S60. Cuatro operarias tardan diez horas en arreglar un tejado. ¿Cuánto tardarían seis operarias?

S61. Un albañil, trabajando ocho horas al día, levanta un muro en 15 días. ¿Cuántas horas al día debería trabajar para levantarlo en 12 días?

S62. Una cuadrilla de albañiles, trabajando 10 horas al día, construyó 600 m^2 de pared en 18 días. ¿Cuántos m^2 construirá en 15 días trabajando 8 horas diarias?

S63. Un granjero necesitó 294 kilos de pienso para alimentar 15 vacas durante 7 días. ¿Durante cuánto tiempo podría alimentar a 10 vacas se tuviese 840 kilos de pienso?

S64. Hay que repartir un lote de 184 refrescos entre un grupo de amigos y amigas proporcionalmente al número de horas que colaboraron en preparar la excursión de fin de curso. Alonso trabajó 14 horas, Uxía 16, Tareixa 10 y Xoán 6. Calcule cuántos refrescos le tocarán a cada amigo.

S65. Tres camareros reparten 295 euros de propinas en partes inversamente proporcionales a los días que faltaron al trabajo cada uno, que fueron 7, 5 y 2 respectivamente. Determine cuántos euros tocan a cada camarero en el reparto.

S66. El 23 % de una cantidad es 144,67. ¿De qué cantidad se trata?

S67. Al aplicar un determinado porcentaje a 2.000 se obtiene 500. ¿De qué porcentaje se trata?

S68. En la etiqueta de un queso de 1,48 kilos de peso figura que el contenido graso es del 35 %. ¿Cuántos gramos de grasa contiene?

S69. Calcule la cantidad final si a 875 euros le aplicamos un aumento porcentual de un 24 %. ¿Y si le aplicamos una merma porcentual de un 32 %?

S70. Compramos un jersey y nos rebajaron el 15 %. Si el precio que marcaba era de 30 euros, ¿cuánto pagamos al final?

S71. Una empresa consume 7.000 kilovatios de energía. Una segunda empresa consume el 36 % de la dicha energía. Calcule la cantidad de energía que consume la segunda empresa y la cantidad y porcentaje de energía que ahorra.

S72. Asocie con cada enunciado una expresión algebraica:

El doble de un número más tres	El 35 % de un número	El precio de un libro más el 7 % de IVA
El triple del resultado que se obtiene a restar 1 a un número	Un número por otro una unidad menor	El número siguiente

S73. Calcule el valor numérico de las expresiones algebraicas para los valores que se indican:

	$3x+2y$	$2xy+x-3y$	x^2-y+7
$x=2$ $y=5$			
x=4 $y=-2$			

S74. Simplifique todo lo posible las sumas y restas de monomios siguientes:

$6x^2+2x-3x^2+8x$	$3x-5-2x+8$
$7x^2-3x-x^2$	$4x^2-x+3x^2-6x^2+5x$

S75. Realice los productos de monomios siguientes:

$4a^3 \cdot 5a^6 =$	$-2p^{12} \cdot 15p^{21} =$	$-7x^4 \cdot 5x^5 \cdot x^2 =$
$m^9 \cdot 3m^2 \cdot (-m^4) =$	$-3p^4(-4p) \cdot (-5p^6) =$	$2a^4b^2 \cdot 4a^5b^3=$

S76. Calcule el cociente de los monomios siguientes:

$\frac{-15m^2n^3p^4}{5mn^2p^2} =$	$\frac{-32a^4b^5c^3}{-4a^2b^2c^2} =$
$18a^3b^5c^3 : 6ab^3c^3=$	$4x^5y^2z^3t^6 : (-2x^3yz^3) =$

S77. Considere los polinomios siguientes y calcule:

$$A = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 2 \quad B = x^3 - 3x + 1 \quad C = 2x^2 + 4x - 5$$

$A + B$	$A + B + C$	$A - B$
$B - C$	$A + B - C$	$A - B - C$

S78. Realice las multiplicaciones siguientes:

$3x^2 \cdot (2x^3 - 4x + 1)$	$-7x^4 \cdot (3x^3 + 2x - 8)$	$2x^3 \cdot (6x^4 - 5x^2 - 7x)$
$-4x^{5} \cdot (7x^3 - 9x^2 + 8x)$	$-9x^3 \cdot (x^7 - 5x^5 + 4x^3 + 9x)$	$-4x^7 \cdot (8x^6 - 7x^5 - 6x^4 - x^3)$

S79. Realice las divisiones siguientes:

$(15x^5 + 12x^4 - 21x^3) : 3x^2 =$	$(24x^7 - 12x^4 - 14x^3) : 2x^3 =$	$(5x^4 - 10x^3 + 5x^2) : 5x =$
$(7x^6z^4 - x^5z + 4x^4z^3) : x^4z =$	$(2x^2y^3 - 5x^4y^2) : xy =$	$(10x^5y^4 - 15x^3y^3) : 5x^2y^2 =$

S80. Multiplique los polinomios siguientes:

$(x^3 - 5x + 1) \cdot (x^2 + 3) =$	$(3x^3 - 4x^2 + 5x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 2) =$

S81. Calcule:

$(x + 6)^2 =$	$(x - 6)^2 =$	$(x + 6) \cdot (x - 6) =$
$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 =$	$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 =$	$\left(2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) =$

S82. Extraiga factor común y simplifique:

$(3a + 3b) =$	$(8 + 4a) =$	$2a^2 + 6a =$
$(6a + 2a^3) =$	$\frac{3x}{2x + xy} =$	$\frac{4a}{4a + 8b} =$

S83. Resuelva las ecuaciones siguientes:

$9x + 94 = 7 \cdot (2 + 7x)$	$-8x + 7 = -11 \cdot (2x + 7)$
$3 \cdot (4 - x) + 6x = 5x - 1$	$3x - 1 + x = 3 \cdot (1 - x) + 10$
$6 \cdot (12 - 5x) - 2 \cdot (3x + 2) + 2x = 0$	$3 + 6 \cdot (x - 2) = 5x - 4 \cdot (2x + 7) + 1$

$1-4\cdot(5x-1)=6+7\cdot(12-10x)$	$3\cdot(2x-4)=4-3\cdot(5x-2)$
$\frac{3x}{3}=\frac{x}{4}+3$	$\frac{x+3}{6}-\frac{5+x}{2}=\frac{3x+4}{12}$
$\frac{10x+8}{10}-\frac{x+5}{2}=\frac{x+6}{5}$	$\frac{x-1}{10}-\frac{2-x}{6}=\frac{x-6}{15}$
$\frac{5-2x}{3}-\frac{x-9}{8}-\frac{5}{12}=\frac{3-2x}{6}$	$\frac{x+1}{12}-\frac{2+x}{15}=\frac{3x+7}{20}$

S84. El doble del dinero que tiene Alicia es 60 euros. ¿Cuánto dinero tiene?

S85. Luis, Ana y Pedro se repartieron un lote de libros. Ana llevó el doble que Pedro y Luis el triple que Pedro. Calcule cuántos libros lleva cada uno si el lote tiene 60 libros.

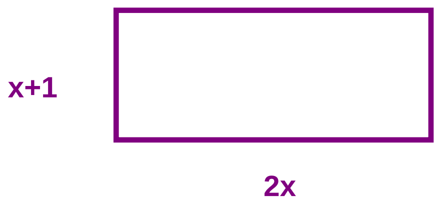
S86. Dos hermanos se llevan 3 años. Entre los dos tienen 33 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

S87. Halle a qué número, si le suma 9 resulta el doble que si le resta 3.

S88. Paulo tiene la mitad de rotuladores que Xurxo. Si a cada uno le regalan 5 y en total suman 40. ¿Cuántos rotuladores tenía cada uno?

S89. Un coche hace un viaje de 1.100 quilómetros en dos tramos. Siendo que el segundo mide 50 quilómetros más que el otro, ¿cuánto recorrió en el primer tramo?

S90. ¿Cuánto miden los lados de este rectángulo si su perímetro es de 26 centímetros?



S91. Una empresa recibió un cargamento de 30.780 libros, en ellos hay dos veces más libros de lengua que de poesía y tres veces más de novela que de lengua. ¿Cuántos libros hay de cada tipo?

S92. Ana tiene un libro que va a terminar en 20 días, leyendo diariamente el mismo número de páginas. Si leyese dos páginas más cada día, tardaría en leerlo 8 días menos. ¿Cuántas páginas diarias lee?

S93. En un monte se repobló la quinta parte de la superficie con robles y la tercera parte con pinos. Aún quedan sin repoblar 560 hectáreas. Calcule la superficie total del monte.

S94. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$4x^2 = 1$	$\frac{5x^2}{8} = \frac{2}{5}$
$x^2 - 4x = 0$	$x^2 - x = 0$
$3x^2 - 2x = 0$	$5x^2 = 4x$
$x^2 + x - 12 = 0$	$2x^2 - 7x + 6 = 0$
$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 - 6x + 5 = 0$
$x^2 + 7x + 10 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$

4. Solucionario

4.1 Soluciones de las actividades propuestas

S1. $-15 < -7 < -6 < -3 < 0 < +1 < +5 < +14$

S2. $-10, -7, -3, +4, +8$

S3.

-7	$+6$
-1	-20

S4.

16	-30
-4	-18

S5.

-3	$+4$
$+12$	-20

S6.

21
-24
-44

S7. $0{,}5;\ 0{,}\hat{6};\ 0{,}3;\ 0{,}1\widehat{18}$

S8.

$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{16}{10}$
$\frac{4}{100}$	$\frac{273}{100}$	$\frac{469}{1.000}$

S9.

$\frac{3}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{8}{9}$
$\frac{6}{90}$	$\frac{284}{90}$	$\frac{124}{99}$

S10.

$\frac{20}{5}$	$\frac{6}{7}$
$\frac{19}{48}$	$\frac{14}{15}$

S11.

$-\frac{8}{3}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{28}$	$\frac{56}{675}$

S12.

20	$\frac{1}{18}$
$\frac{4}{5}$	3

S13.

$\frac{1}{64}$	$\frac{32}{3.125}$
9	$\frac{3}{7}$
25	1

S14.

$\frac{23}{30}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{37}{120}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{85}{378}$

S15.

Masa de un átomo de hierro	$9{,}26 \cdot 10^{-23}$
Masa de un átomo de plata	$1{,}79 \cdot 10^{-22}$
Un año luz	$9{,}46 \cdot 10^{12}$

S16.

15	15	19,5

S17. *1.416,66 euros.*

S18. *100 euros por cada móvil.*

S19. *384 euros.*

S20. *18,75 euros.*

S21. *20 minutos.*

S22. *4 horas y 1 hora.*

S23. *3 horas.*

S24. *24 meses y 16 meses.*

S25. *4 días.*

S26. *60 días.*

S27. *540, 1.080, 1.800.*

S28. *1.900, 950, 570.*

S29. *70 %.*

S30. *120.*

S31. *152.*

S32. *469, 35 euros.*

S33. *1,152 euros.*

S34. *15 euros.*

S35. *960 euros.*

S36. *-1; 17; 45.*

S37.

Para $x = 2$	10
Para $x = -3$	5

S38.

$-60p^{11}$	$8a^{10}b^5$	$-30x^3$
$-5x^3y^2z$	$7x^2y^2$	$-2m^3n^4pq^2$

S39.

$3x^3 + 6x^2 + 9x - 7$	$7x^3 - 6x^2 + 9x - 7$	$-7x^3 + 6x^2 - 9x + +7$

S40.

$5x^3 + 5x^2 + 5x$	$6x^2 - 13x + 6$	$9x^3 + 6x^2 - 11x + 2$
$4x^5 - 3x^4 + 5x^2$	$x^4 - 4x^2 + 2x$	$-x^5 + x^3 - x^2$

S41.

$9a^2 + 12ab + 4b^2$	$4x^2 - 4xy + y^2$	$x^2 - 36$

S42.

$2x \cdot (1 + y)$	$5x \cdot (x + 2y + 3)$
$z \cdot (z^2 + 9)$	$\dfrac{1}{x \cdot (1 + x^2)}$

S43.

$x = 3$	$x = \dfrac{1}{5}$
$x = -50$	$x = -7$
$x = 6$	$x = -\dfrac{1}{3}$

S44. *El número es 15.*

1º Proponemos la ecuación con los datos que nos indica el enunciado del problema:

a) $x + 9 = 2 \cdot (x - 3)$

2º Solucionamos y tenemos que x=15.

3º El número que se pide es 15.

S45. *Hay 8 cerdos, 4 vacas y 22 gallinas.*

1º Conforme a los datos del problema:

Cerdos = x Vacas: = $\frac{x}{2}$...........Gallinas = $3x - 2$

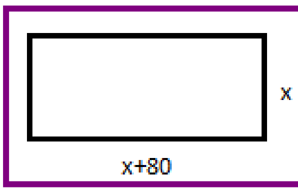
2º Proponemos la ecuación con los datos que nos indica el enunciado del problema:

$x + \frac{x}{2} + 3x - 2 = 34$

2º Solucionamos y tenemos que $x = 8$

3º Por lo tanto hay: Cerdos: x = 8 Vacas: $\frac{x}{2} = \frac{8}{2} = 4$ Gallinas: $3x - 2 = 3 \cdot 8 - 2 = 22$

S46. *180 m de largo y 100 m de ancho.*



1º Conforme a los datos del problema:

2º Proponemos la ecuación con los datos que nos indica el enunciado del problema, teniendo en cuenta que los lados del rectángulo son iguales dos a dos.

c) $2x + 2 \cdot (x + 80) = 560$

3º Solucionamos y tenemos que $x = 100$

4º Por lo tanto hay: Ancho: x = 100 m Largo: $x + 80 = 100 + 80 = 180$ m

S47.

$x = \pm 10$	$x = \pm 2$	$x = 00;\ x = \frac{2}{3}$
$x = 4;\ x = 2$	$No\ tiene\ solución$	$x = 5$

4.2 Soluciones de las actividades finales

S48.

<table>
<tr><td>-5</td><td>$+4$</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">-6</td><td colspan="2">-28</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td></tr>
</table>

S49.

$\frac{325}{100}$	$\frac{284}{90}$	$\frac{85}{99}$

S50.

$\frac{-6}{15}$	$\frac{-5}{8}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{-4}{15}$

S51. *1.500 euros.*

1º Conforme a los datos del problema:

<table>
<tr><td>Gastos varios: $\frac{2}{3}$</td><td>Resto del sueldo: $\frac{1}{3}$</td><td>Ocio: $\frac{3}{5}\ de\ \frac{1}{3}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gastos totales: $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}$ del sueldo</td><td>ahorró $\frac{2}{15}$ del sueldo</td></tr>
</table>

2º Sabemos que los $\frac{2}{15}$ que ahorró son 200 euros.

3º Por lo tanto, el total del sueldo, es decir, los $\frac{15}{15}$ son 1 500 euros.

S52. *1/8 No practica deporte.*

1º Calculamos la fracción de alumnado que practica deporte:

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{7}{8}$$

2º Por lo tanto, los que no practican deporte serían $\frac{1}{8}$ del alumnado.

S53. *30 dosis*

1º Calculamos cuál es el contenido del recipiente:

$$2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

2º Dividimos el total del contenido del recipiente entre lo que lleva cada dosis.

$$\frac{9}{4}:\frac{3}{40}=\frac{360}{12}=30\ dosis$$

S54.

x	z^{-2}	$\frac{x}{y}$
1	x^{-6}	a

S55.

$x = 35$	$x = 15$	$x = 22$

S56. *Razón* $\frac{1}{2,5} = 0,4$

2	1	3	4	10
5	2,5	7,5	10	25

S57.

1	2	4	5	10
20	10	5	4	2

S58. *404 euros.*

1º Proponemos como sigue:

260 euros ----------------- 325 lotes

X euros--------------------- 505 lotes

2º Es una proporcionalidad directa, con lo cual:

$$\frac{260}{x} = \frac{325}{505};\ \text{por lo tanto } x = 404\ euros$$

S59. *1 hora.*

1º Proponemos como sigue:

3 horas ----------------- 20 km/h

X horas----------------- 60 km/h

2º Es una proporcionalidad inversa, con lo cual:

$$\frac{x}{3} = \frac{20}{50};\ \text{por lo tanto } x = 1\ hora$$

S60. *6,6 horas.*

S61. *10 horas.*

S62. *400* m^2

1º Proponemos como sigue:

10 horas ----------------- 18 días------------------ 600 m^2

8 horas------------------- 15 días------------------ x m^2

2º Todas ellas son proporcionalidades directas, con lo cual:

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{18}{15} = \frac{600}{x};\ \text{por lo tanto } x = 400\ m^2$$

S63. *30 días.*

1º Proponemos como sigue:

294 kg ---------------- 15 v ----------------- 7 d

840 kg------------------ 10 v ---------------- *x* d

2º La primera magnitud es directamente proporcional a la tercera, la segunda magnitud es inversamente proporcional a la tercera, por lo tanto:

$$\frac{294}{840} \cdot \frac{10}{15} = \frac{7}{x}; \text{ por lo tanto } x = 30 \; días$$

S64. *56, 64, 40 y 24 refrescos.*

S65. *50, 70 y 175 euros.*

S66. *629*

Cantidad total $= \frac{144{,}67}{0{,}23} = 629$

S67. *25 %*

Porcentaje $= \frac{500}{2.000} = 0{,}25 = 25\ \%$

S68. *518 g*

Cantidad parcial $= 0{,}35 \cdot 1{,}48 = 0{,}518$

S69. *1.085 euros y 595 euros.*

S70. *25,50 euros.*

S71. *La segunda empresa consume 2.520 kW y ahorra el 64 % de la energía, lo que supone 4.480 kW.*

S72.

$2x + 3$	$0{,}35x$	$x + 0{,}07x$
$3 \cdot (x - 1)$	$x \cdot (x - 1)$	$x + 1$

S73.

	$3x + 2y$	$2xy + x - 3y$	$x^2 - y + 7$
$x = 2$ $y = 5$	16	7	6
$x = 4$ $y =$ -2	8	-6	25

S74.

$3x^2 + 10x$	$x + 3$
$6x^2 - 3x$	$x^2 + 4x$

S75.

$20a^9$	$-30p^{33}$	$-35x^{11}$
$3m^{15}$	$-60p^{11}$	$8a^9b^5$

S76.

$-3mnp^2$	$8a^2b^3c$
$3a^2b^2$	$-2x^2y^2t^6$

S77.

$4x^3 - 6x^2 + x - 1$	$4x^3 - 4x^2 + 5x - 6$	$2x^3 - 6x^2 + x - 3$
$x^3 - 2x^2 - 7x + 6$	$4x^3 - 8x^2 - 3x + 4$	$2x^3 - 8x^2 - 3x + 2$

S78.

$6x^5 - 12x^3 + 3x^2$	$-21x^7 - 14x^5 + 56x^4$	$12x^7 - 10x^5 - 14x^4$
$-28x^8 + 36x^7 - 32x^6$	$-9x^{10} + 45x^8 - 36x^6 - 81x^4$	$-32x^{13} + 28x^{12} + 24x^{11} + 4x^{10}$

S79.

$5x^3 + 4x^2 - 7x$	$12x^4 + 6x - 7$	$x^3 - 2x^2 + x$
$7x^2z^3 - x + 4z^2$	$2xy^2 - 5x^3y$	$2x^3y^2 - 3xy$

S80.

$x^5 - 2x^3 + x^2 - 15x + 3$	b) $3x^5 - 13x^4 + 23x^3 - 24x^2 + 13x - 2$

S81.

$x^2 + 12x + 36$	$x^2 - 12x + 36$	$x^2 - 36$
$4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$	$4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$	$4x^2 - \frac{1}{4}$

S82.

$3 \cdot (a + b)$	$4 \cdot (2 + a)$	$2a \cdot (a + 3)$
$2a \cdot (3 + a^2)$	$\frac{3}{2 + y}$	$\frac{a}{a + 2b}$

S83.

$x = 2$	$x = 5$
$x = \frac{13}{2}$	$x = 2$
$x = 2$	$x = -2$
$x = \frac{17}{10}$	$x = \frac{22}{21}$
$x = 4$	$x = -4$
$x = \frac{29}{3}$	$x = \frac{1}{6}$
$x = -\frac{9}{5}$	$x = -3$

S84. *30 euros.*

1º Dinero que tiene Alicia: *x*

2º Proponemos $2x = 60;$ por lo tanto $x = 30$

S85. *Pedro tiene 10 libros, Ana 20 y Luis 30.*

1º Pedro = *x* =10

Ana = 2*x* = 20

Luis = 3*x* = 30

2º Proponemos $x + 2x + 3x = 60;$ por lo tanto $x = 10$

S86. *15 y 18 años.*

1º Edad del primer hermano = *x* + 3 = 18

Edad del segundo hermano = *x* =15

2º Proponemos $x + 3 + x = 33;$ por lo tanto $x = 15$

S87. *15*

Proponemos $x + 9 = 2 \cdot (x - 3);$ por lo tanto $x = 15$

S88. *Paulo tiene 10 rotuladores y Xurxo 20.*

1º Rotuladores que tiene Xurxo =*x*; si le dan 5 tendrá *x* + 5

Rotuladores que tiene Paulo = $\frac{x}{2}$; si le dan 5 tendrá $\frac{x}{2} + 5$

2º Proponemos $x + 5 + \frac{x}{2} + 5 = 40;$ por lo tanto $x = 20$

S89. *525 km.*

1º El primer tramo mide =*x* ; el segundo tramo mide *x* + 50

2º Proponemos $x + x + 50 = 1\,100;$ por lo tanto $x = 525$

S90. **Los lados 5 cm y 8 cm.**

1º El rectángulo tiene los lados iguales dos a dos.
El perímetro es la suma de todos sus lados.
2º Proponemos $2 \cdot (x+1) + 4x = 26;$ por lo tanto $x = 4$
3º Los lados miden: $x + 1 = 5\text{ cm}$ y $2x = 8\text{ cm}$

S91. *3.420 libros de poesía, 6.840 de lengua y 20.520 de novela.*

1º Libros de poesía $= x$; Libros de lengua $= 2x$; Novela $= 6x$
2º Proponemos $x + 2x + 6x = 30.780;$ por lo tanto $x = 3.420$
3º 3.420 de poesía, 6.840 de lengua y 20.520 de novela.

S92. *3 páginas.*

1º Para terminar el libro en el primer caso, tiene que leer $20x$
2º Para terminar el libro en el segundo caso, tiene que leer $12 \cdot (x+2)$
3º Proponemos $20x = 12 \cdot (x+2)$; por lo tanto $x = 3$

S93. *1.200 hectáreas.*

1º Superficie total del monte = x Superficie sembrada de robles = $\frac{x}{5}$ Superficie sembrada de pinos = $\frac{x}{3}$
3º Proponemos $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 560 = x$; por lo tanto $x = 1.200$ ha

S94.

$x = \pm\frac{1}{2}$	$x = \pm\frac{4}{5}$
$x = 0 \; y \; x = 4$	$x = 0 \; y \; x = 1$
$x = 0 \; y \; x = \frac{2}{3}$	$x = 0 \; y \; x = \frac{4}{5}$
$x = 3 \; y \; x = -4$	$x = 2 \; y \; x = \frac{3}{2}$
$x = -3$	$x = 5 \; e \; x = 1$
$x = 2 \; y \; x = -5$	$x = 1$

5. Glosario

A	▪ Aumento porcentual	Aumentar una cantidad en un *a* % equivale a calcular el $(100 + a)$ % de dicha cantidad.
	▪ Álgebra	Parte de las matemáticas que estudia la relación entre números, letras y signos de las operaciones aritméticas.
C	▪ Constante de proporcionalidad directa	Valor de la ratio que resulta de dividir dos valores correspondientes de una tabla de proporcionalidad directa.
	▪ Constante de proporcionalidad inversa	Valor del producto que resulta de multiplicar dos valores correspondientes de una tabla de proporcionalidad inversa.
D	▪ Disminución porcentual	Disminuir una cantidad en un *a* % equivale a calcular el $(100 - a)$ % de dicha cantidad.
E	▪ Ecuaciones	Son igualdades algebraicas (con números y letras) que nos permiten establecer relaciones entre valores conocidos y valores desconocidos.
I	▪ Incógnitas	Letras que aparecen en la ecuación y representan la cantidad desconocida.
M	▪ Magnitudes directamente proporcionales	Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número la otra queda multiplicada o dividida por ese número.
	▪ Magnitudes inversamente proporcionales	Dos magnitudes son inversamente proporcionales si un aumento o una merma en una de ellas determina una merma o un aumento proporcional en la otra.
	▪ Monomio	Expresión algebraica donde los números y letras están relacionados por productos y potencias de exponente positivo.
N	▪ $\mathbb{N}$	Números naturales, $\mathbb{N} \Rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots \infty\}$
	▪ Notación científica	Escritura de números muy grandes o muy pequeños en forma de múltiplos de potencias de 10.
P	▪ Proporción	Igualdad de dos razones.
	▪ Porcentaje	Un porcentaje indica una proporción, una fracción o se asocia a un decimal.
	▪ Polinomio	Es la suma o resta de varios monomios.
Q	▪ $\mathbb{Q}$	Números racionales. Todos aquellos números que se pueden expresar en forma de fracción.
R	▪ Razón	División o ratio entre dos números o dos cantidades comparables entre sí.
T	▪ Tasa	Razón o ratio entre dos magnitudes diferentes que se expresan con sus unidades.
	▪ Tasa unitaria	Valor numérico de una tasa expresado en las unidades del numerador por cada unidad del denominador.
X	▪ Interés bancario	Beneficios que produce el dinero prestado
Z	▪ $\mathbb{Z}$	Números enteros, $\mathbb{Z} \Rightarrow \{-\infty \dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots +\infty\}$

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- Libros para a educación secundaria a distancia de adultos. Ámbito científico-tecnolóxico, Consellería de Educación e Ordenación Universitaria.
- *Matemáticas ESO 1*, Ed. Anaya. 2016.
- *Matemáticas ESO 2*, Ed. Anaya. 2016.
- *Matemáticas*. Serie Resolvo. 2º ESO, Editorial Santillana.

Enlaces de Internet

En estos enlaces encontrará trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://www.vitutor.com/di/r/a_10.html
- http://www.vitutor.com/ab/p/mono_2.html
- http://www.apuntesmareaverde.org.es
- http://www.lasmatematicas.es
- http://www.recursos.cnice.mec.es