XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para personas adultas

# Ámbito científico tecnológico

## Educación a distancia semipresencial

## Módulo 1

## Unidad didáctica 3

# Funciones

# Índice

# 1. Introducción

## 1.1 Descripción de la unidad didáctica

Comenzaremos esta unidad con la representación de puntos en el plano y para eso necesitaremos un sistema de ejes de coordenadas formado por dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto O, llamado origen de coordenadas. Entre dos puntos representados en el plano veremos el concepto de segmento y el de vector.

Tanto en la vida cotidiana como en la naturaleza existen múltiples situaciones donde se pueden relacionar dos magnitudes. Así, por ejemplo, relacionamos el tiempo de estacionamiento en un aparcamiento y el importe que se ha de pagar, la temperatura a lo largo de un día, el tiempo invertido por un corredor en completar un circuito, etc. Estas relaciones o correspondencias entre dos magnitudes, donde el valor de una de ellas va a depender de la variación de la otra, es lo que conoceremos como funciones.

Esas relaciones se pueden establecer de diversas formas: por medio de una tabla de valores, de una gráfica o de una fórmula o ecuación. En esta unidad aprenderemos a representar gráficamente situaciones dadas mediante tablas de valores, enunciados o expresiones algebraicas sencillas correspondientes a funciones constantes, lineales o afines.

## 1.2 Conocimientos previos

Para un mejor aprovechamiento del estudio de este tema, el alumnado debe manejar los conceptos siguientes:

- Manejo de los utensilios de dibujo para la construcción de figuras sencillas.
- Localización de puntos en la recta numérica de los números enteros $\mathbb{Z}$
- Operaciones básicas de cálculo en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q},$ estudiadas en las unidades 1 y 2.

## 1.3 Objetivos

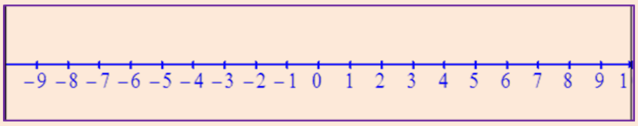
- Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.
- Comprender el concepto de función.
- Manejar las formas de presentar una función: tabla numérica, gráfica y ecuación.
- Pasar de unas formas a otras de presentar una función teniendo en cuenta cuál es la mejor según el contexto.

# 2. Secuencia de contenidos y actividades

## 2.1 Coordenadas cartesianas

### 2.1.1 Representación de números sobre un eje

Los números se representan sobre una recta dividida en partes iguales. Esta recta se denomina eje. Este eje puede dibujarse de forma horizontal y de forma vertical.

<table>
<tr><td colspan="2">Eje para representar los números</td><td rowspan="3">Para representar un punto necesitamos designar un punto de referencia que llamaremos origen. El número 0 es el origen a partir del cual vamos a representar los números en un sentido a la derecha o en otro sentido a la izquierda.<br>En un eje horizontal los números positivos se colocan a la derecha del cero y los números con signo negativo se colocan a la izquierda.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Números enteros negativos</td><td>Números enteros positivos</td></tr>
</table>



**Actividad resuelta**

Represente los puntos A(4), B(2), C(-3), D(-1), en un eje horizontal.

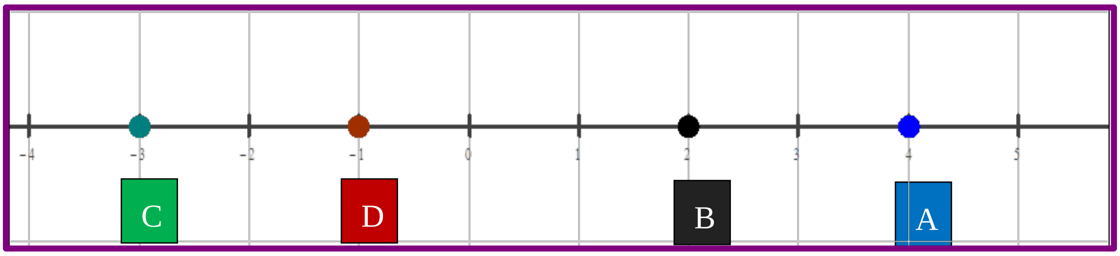
Dibujamos el eje y marcamos el origen, con valor 0.

Para representar A(4), partiendo de cero contamos cuatro unidades hacia la derecha, por ser un número positivo.

Para representar B(2), partiendo de cero contamos dos unidades hacia la derecha, por ser un número positivo.

Para representar C(-3), partiendo de cero contamos tres unidades hacia la izquierda, por ser un número negativo.

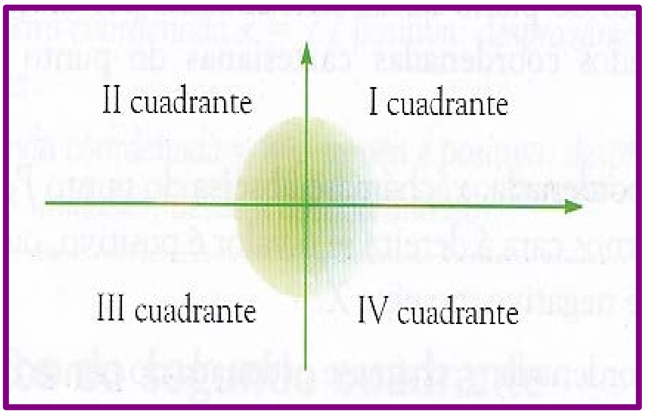
Para representar D(-1), partiendo de cero contamos una unidad hacia la izquierda, por ser un número negativo.





### 2.1.2 Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en el plano

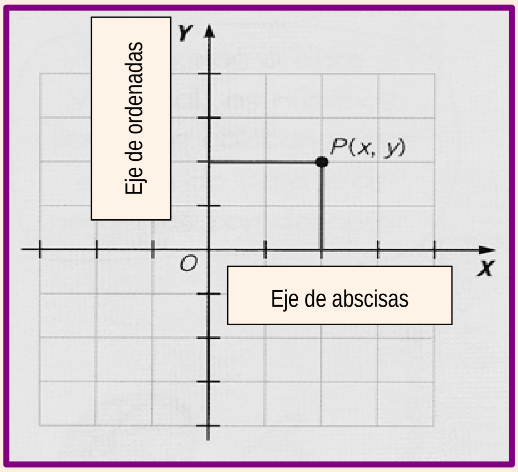
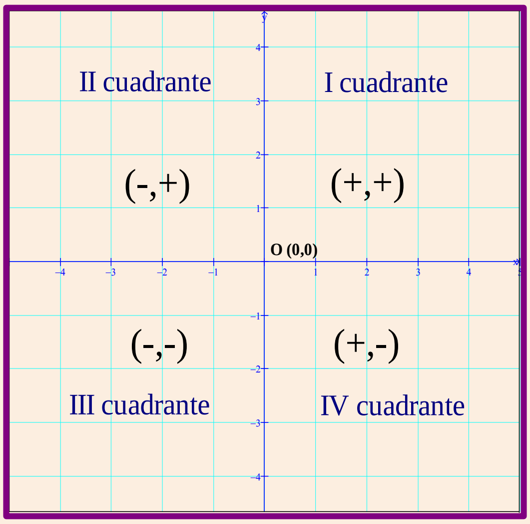
Para representar puntos en el plano, se necesita un sistema de **ejes de coordenadas**, que está formado por dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto, **O**, llamado **origen de coordenadas**.




La prolongación de los dos ejes de coordenadas divide el plano en cuatro partes iguales. Cada una de esas partes se llama **cuadrante**, que se designan con los números romanos I, II, III, IV.

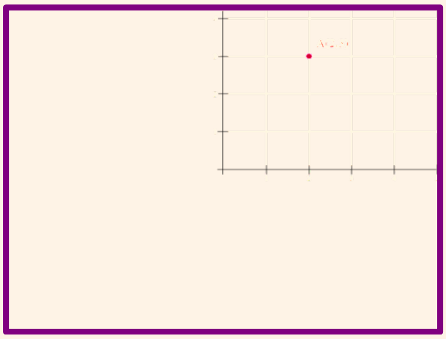
## Coordenadas cartesianas

Cualquier punto, P, del plano queda determinado por un par de números (x,y) llamados coordenadas cartesianas del punto P y se escribe P(x,y).

| | |
|---|---|
| <br> | En nuestro sistema de ejes le llamamos:<br>▪ **eje de abscisas**, a la recta horizontal X<br>▪ **eje de ordenadas**, a la recta vertical Y<br>▪ **origen de coordenadas**, al punto de corte de los ejes, se representa por O<br>▪ El punto P(x,y) queda determinado en el plano por un par de números (x,y) **llamados coordenadas cartesianas** |
| <br> | ▪ Puntos del cuadrante I: la abscisa, *x*, y la ordenada, *y*, son de la forma (+,+)<br>▪ Puntos del cuadrante II: la abscisa, *x*, y la ordenada, *y*, son de la forma (-,+)<br>▪ Puntos del cuadrante III: la abscisa, *x*, y la ordenada, *y*, son de la forma (-,-)<br>▪ Puntos del cuadrante IV: la abscisa, *x*, y la ordenada, *y*, son de la forma (+,-) |

## Actividades resueltas

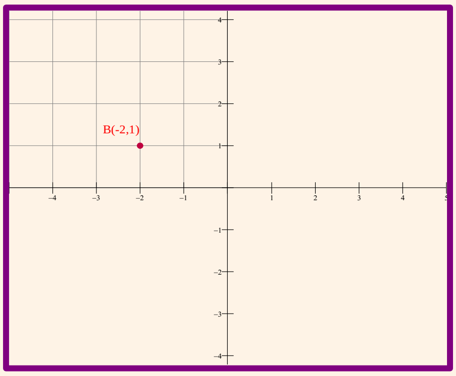
### Represente en un sistema de ejes cartesianos el punto A(2,3).



Para representar el punto A(2,3), partimos del origen de coordenadas O(0,0).

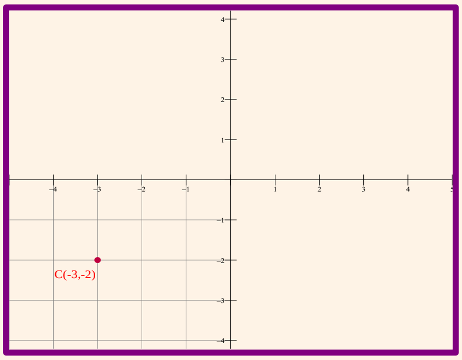
- La primera coordenada es la abscisa x = 2, que es positiva; por lo tanto nos desplazamos dos unidades a la derecha. A partir de este punto nos vamos a desplazar hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo de la segunda coordenada.
- La segunda coordenada es la ordenada y = 3, que también es positiva. Nos desplazamos hacia arriba tres unidades.

### Represente en un sistema de ejes cartesianos el punto B(-2,1).




- Para representar el punto B(-2,1), partimos del origen de coordenadas O(0,0).
- La primera coordenada es la abscisa x = -2, que es negativa; por lo tanto nos desplazamos dos unidades a la izquierda. A partir de este punto nos vamos a desplazar hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo de la segunda coordenada.
- La segunda coordenada es la ordenada y = 1, que es positiva. Nos desplazamos hacia arriba una unidad.

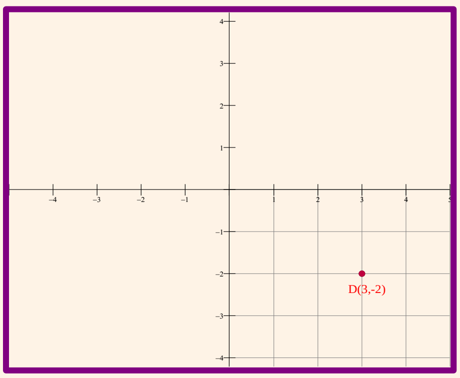
### Represente en un sistema de ejes cartesianos el punto C(-3,-2).




Para representar el punto C(-3,-2), partimos del origen de coordenadas O(0,0).

- La primera coordenada es la abscisa x = -3, que es negativa; por lo tanto nos desplazamos tres unidades a la izquierda. A partir de este punto nos vamos a desplazar hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo de la segunda coordenada.
- La segunda coordenada es la ordenada y = -2, que es negativa. Nos desplazamos hacia abajo dos unidades.

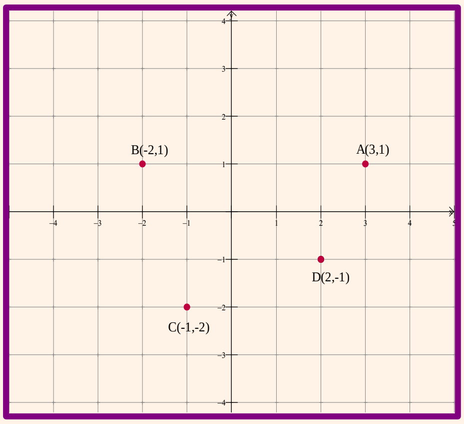
### Represente en un sistema de ejes cartesianos el punto D(3,-2).




Para representar el punto D(3,-2), partimos del origen de coordenadas O(0,0).

- La primera coordenada es la abscisa x = 3, que es positiva; por lo tanto nos desplazamos tres unidades a la derecha. A partir de este punto nos vamos a desplazar hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo de la segunda coordenada.
- La segunda coordenada es la ordenada y = -2, que es negativa. Nos desplazamos hacia abajo dos unidades.

Represente en un sistema de ejes cartesianos los puntos A(3,1), B(-2,1), C(-1,-2), D(2,-1).




En este caso, tenemos los ejes dibujados con los cuatro cuadrantes, y vamos representando los números según sus coordenadas cartesianas.

- El procedimiento siempre es el mismo:

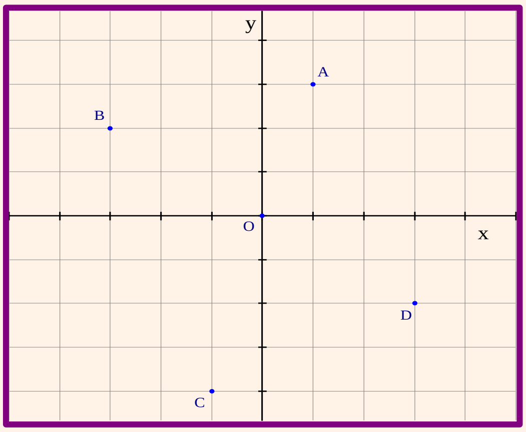
  **Primero**, fijamos la abscisa, que es la primera coordenada. Según sea positiva o negativa, tendremos que desplazarnos a la derecha o a la izquierda del origen.

  **Segundo**, una vez fijada a abscisa, tendremos que, a partir de ella, desplazarnos hacia arriba si la ordenada es positiva o hacia abajo si la ordenada es negativa.

## Actividades propuestas

S1. Represente los puntos siguientes en el plano e indique en qué cuadrante se encuentran: A(3,1), B(-2,1), C(-1,2), D(2,-1).

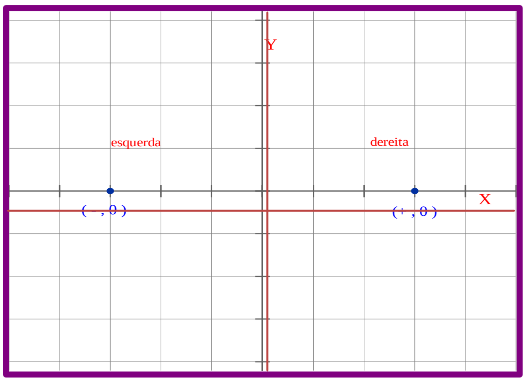
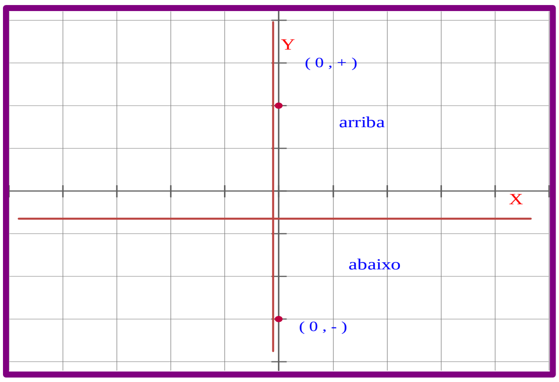
S2. Indique las coordenadas de los puntos siguientes:




Las coordenadas de un punto vienen determinadas por un par de puntos (x,y), llamados coordenadas cartesianas.
En este ejercicio las coordenadas de los puntos serán:

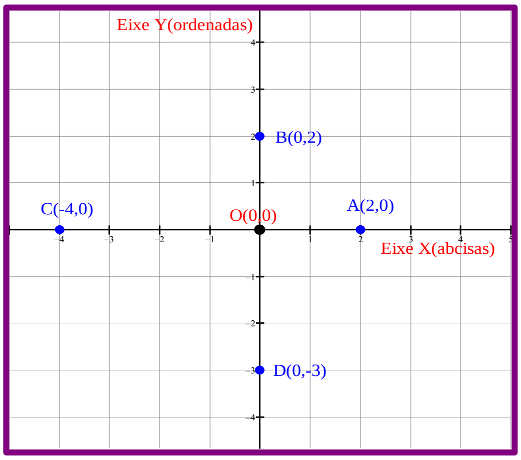
A (   ,   )
B (   ,   )
C (   ,   )
D (   ,   )
O (   ,   ), es el origen de coordenadas

### Puntos sobre los ejes de coordenadas

| PUNTOS SITUADOS SOBRE EL EJE X<br>Los puntos que están situados sobre el eje de abscisas o eje X son de la forma (x, 0); su ordenada es 0. | PUNTOS SITUADOS SOBRE EL EJE Y<br>Los puntos que están situados sobre el eje de ordenadas o eje Y son de la forma (0, y); su abscisa es 0. |
|---|---|
|  |  |

### Actividades resueltas

Represente en un sistema de ejes cartesianos los puntos A(2,0), B(0,2), C(-4,0), D(0,-3).




Partiendo del origen de coordenadas O(0,0):

a) A(2,0). Nos desplazamos dos unidades a la derecha, x = 2. La ordenada es cero, y = 0. El punto A se sitúa en el eje de abscisas.

b) B(0,2). La abscisa es cero, x = 0. Nos desplazamos dos unidades hacia arriba, y = 2. El punto B se sitúa en el eje de ordenadas.

c) C(-4,0). Nos desplazamos cuatro unidades a la izquierda, x = -4. La ordenada es cero, y = 0. El punto C se sitúa en el eje de abscisas.

d) D(0,-3). La abscisa es cero, x = 0. Nos desplazamos tres unidades hacia abajo, y = -3. El punto D se sitúa en el eje de ordenadas.

S3. Indique sobre qué eje se encuentran los puntos siguientes: A(0,3), B(-2,0), C(0,-1), D(-6,0).

S4. Represente los puntos siguientes en el plano: A(-1,0), B(5,0), C(0,6), D(0,-4).

## 2.1.3 Puntos y gráficas en el plano

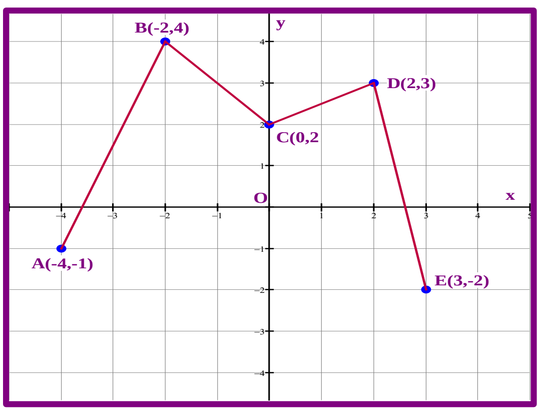
**Un punto**, como vimos en el apartado anterior, queda definido en el plano por dos números ordenados (x,y).

- El primer número corresponde al eje de abscisas o eje horizontal.
- El segundo número corresponde al eje de ordenadas o eje vertical.

**Una gráfica** es la representación de un conjunto de puntos sobre los ejes de coordenadas. Muchas veces estos puntos se pueden unir mediante una línea. Las gráficas describen relaciones entre dos variables.

### Actividades resueltas

Represente en un sistema de ejes cartesianos los puntos A(-4,-1), B(-2,4), C(0,2), D(2,3), E(3,-2). Después una los puntos con una línea poligonal según el orden dado.




Partiendo del origen de coordenadas O(0,0):

*Primero:*

Representamos cada punto en el sistema de coordenadas cartesianas.

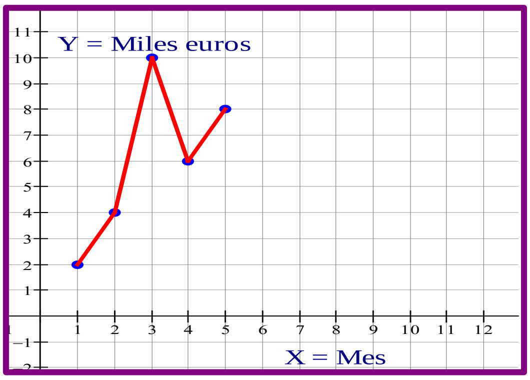
*Segundo:*

Una vez que tenemos situados los puntos en el plano, y siguiendo el orden, vamos uniendo mediante segmentos todos los puntos:

A$\longrightarrow \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{E}$, de esta forma obtenemos una línea poligonal que representa en el plano la figura o gráfica.

### Actividades propuestas

S5. La gráfica siguiente nos muestra la evolución de los beneficios en una pequeña empresa en sus cinco primeros meses de funcionamiento. Observando la gráfica, responda a las preguntas siguientes:




a) ¿En qué mes hubo más beneficios? ¿A cuánto ascendieron?

b) ¿En qué mes hubo menos beneficios? ¿A cuánto ascendieron?

c) ¿En qué mes descendieron los beneficios?

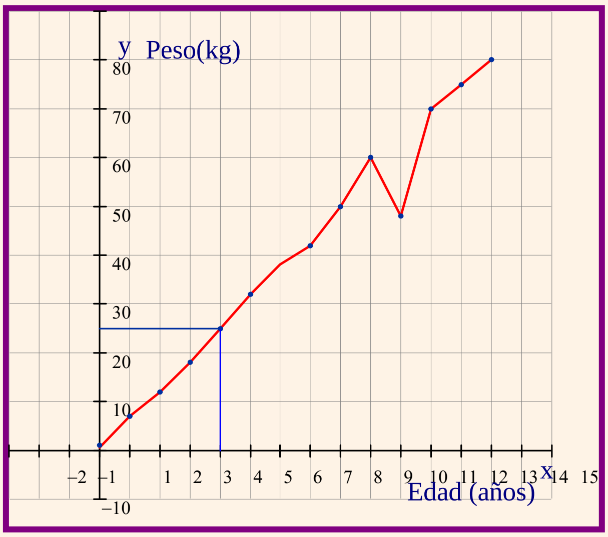
d) ¿Cuál es la variable independiente?

e) ¿Cuál es la variable dependiente?

### Las gráficas describen relaciones entre dos variables

- A las variables que se representan en el eje horizontal o eje de abscisas les llamamos "variable x" o "variable independiente".
- A las variables que representamos en el eje vertical o eje de ordenadas les llamamos "variable y" o "variable dependiente".
- Para interpretar una gráfica, tenemos que mirarla de izquierda a derecha y así vamos observando cómo cambia la variable dependiente, ***y***, a medida que aumenta la variable independiente, ***x***.

Ejemplo: En esta gráfica se fue anotando el peso en kg de un chico durante 13 años.




Responder a las preguntas siguientes:

1. ¿Cuánto pesaba el chaval a los cuatro años?

Nos fijamos en la abscisa en el punto que corresponde a los 4 años y subimos hasta la gráfica para ver qué ordenada le corresponde. Será 25 kg.

2. ¿Entre qué valores estaba su peso a los 6 años?

Nos fijamos en la abscisa en el punto que corresponde a los 6 años y subimos hasta la gráfica y en el punto de la gráfica miramos la ordenada que corresponde. Será entre 35 y 40 kg.

3. ¿Entre qué período de tiempo adelgazó?

Miramos en la gráfica si en algún momento desciende o decrece. Y vemos que decrece entre los 9 y 10 años.

## 2.1.4 Características de las gráficas

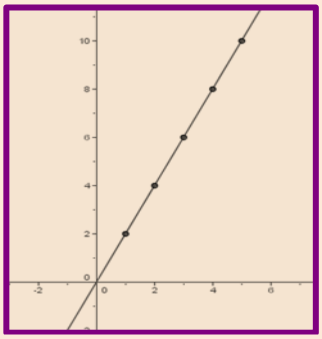
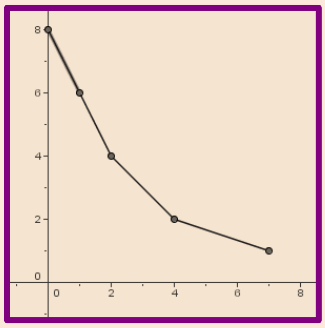
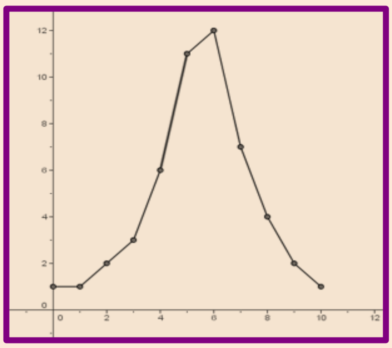
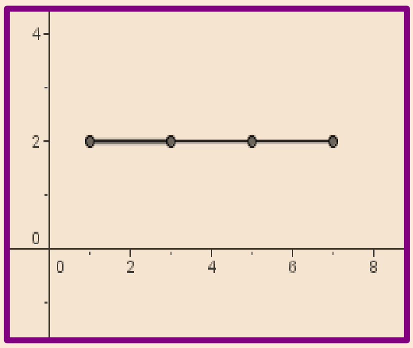
Una gráfica es la representación en los ejes de coordenadas de los pares (x,y), ordenados de una tabla. Es decir, cuando en los ejes de coordenadas se representan varios puntos se obtiene una gráfica. Las gráficas describen las relaciones entre dos variables.

La variable que se representa en el eje horizontal se llama **variable independiente** o variable “**x**”.

La variable que se representa en el eje vertical se llama **variable dependiente** o variable “**y**”.

La variable “y” está en función de la variable “x”. Podemos usar indistintamente la notación “y” o f(x) para referirnos a la variable dependiente $\Rightarrow \boxed{y = f(x)}$

Una vez que dibujamos la gráfica, podemos estudiarla, analizarla y extraer conclusiones. Para interpretarla, tenemos que observarla de izquierda a derecha e ir viendo cómo cambia la variable dependiente, $\boxed{y = f(x)}$, al aumentar la variable dependiente “x”.

| | |
|---|---|
| Gráfica creciente<br>Una gráfica es creciente si al aumentar la variable independiente x, aumenta también la otra variable dependiente y = f(x). | Gráfica decreciente<br>Una gráfica es decreciente si al aumentar la variable independiente x, disminuye la otra variable dependiente y = f(x). |
|  |  |
| Gráfica con parte creciente y decreciente<br>Una gráfica puede tener a la vez partes crecientes y partes decrecientes. | Gráfica constante<br>Una gráfica es constante si al modificar la variable independiente x, la otra variable dependiente y = f(x) permanece invariable |
|  |  |

## 2.2 Funciones

### 2.2.1 Concepto de función. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos de una función

Una función es una relación entre dos magnitudes, de tal modo que a cada valor de la primera magnitud en el conjunto inicial le corresponde un único valor, y sólo uno, de la otra magnitud en el conjunto final o conjunto imagen.

Si tenemos dos conjuntos X e Y y a cada elemento de X le asociamos otro, **pero sólo uno** de Y, esto es lo que vamos a llamar función.

X es la variable independiente e Y la variable dependiente (El valor de Y es función de lo que valga X).

$f: X \longrightarrow Y$ denotará la función que va desde X hasta Y

Ejemplo: sea la función:

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow 3.x \end{aligned}$$

Ejemplo: las imágenes de los números -2, -1, 0, 1 y 2 serán las siguientes:

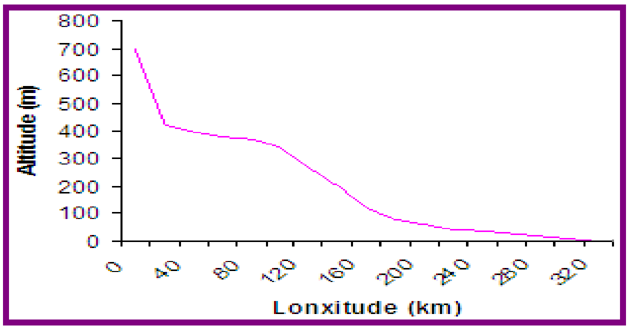
| | |
|---|---|
| f(x) = 3x | y = 3x |
| f(-2) = 3 · (-2) = -6 | y = 3 · (-2) = -6 |
| f(-1) = 3 · (-1) = -3 | y = 3 · (-1) = -3 |
| f(0)= 3 · 0 = 0 | y = 3 · 0 = 0 |
| f(1) = 3 · 1 = 3 | y = 3 · 1 = 3 |
| f(2) = 3 · 2 = 6 | y = 3 · 2 = 6 |

$\Rightarrow$

| x | y |
|---|---|
| -2 | -6 |
| -1 | -3 |
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |

Cuando se cumple que $a \leq b$ (por lo tanto la imagen de $a \leq$ imagen de $b$), la función se dirá que es creciente; en otro caso diremos que es decreciente. Se entiende que f(a) y f(b) son las imágenes de *a* y de *b* respectivamente. Notemos también que tanto f(a) como f(b) son elementos del conjunto Y, pues *f* lleva los elementos de X en elementos de Y.

Por otra parte, cuando se cumple que f(a) es el mayor de los elementos de imagen, diremos que la función tiene un máximo en *a*. Por el contrario, si fuera el menor valor de los de la imagen, diremos que la función tiene en *a* un mínimo.



Podemos observar en esta gráfica que en el Km 320 tiene un mínimo, y además se trata de una función decreciente.

### Actividades resueltas

Determine cuáles de estas relaciones es función. Razónelo.

a) Asocie la medida del lado de un cuadrado con su área.

| Lado (cm) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Área ($cm^2$) | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |

En este caso podemos decir que la relación entre la variable independiente del lado de un cuadrado y su área, que sería la variable dependiente, es una función, pues cada medida de un lado determina siempre un área y esta es única.

b) Asocie a cada mes del año su número de días.

| Mes | Ene | Feb | Mar | Abr | Mayo | Junio | Julio | Agos | Sept | Oct | Nov | Dic |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº días | 31 | 28 o 29 | 31 | 30 | 31 | 30 | 31 | 31 | 30 | 31 | 30 | 31 |

En este caso la relación entre el mes y el número de días no es una función, porque aparte de que la variable mes no es numérica, al mes de febrero se le pueden asociar dos valores dependiendo si el año es bisiesto o no.

***Una función puede venir definida mediante una fórmula, una tabla de valores o una gráfica.***

## 2.2.2 Función definida mediante una fórmula o expresión general

Los pares de coordenadas de una función (**x**,**y**) corresponden a los valores de las magnitudes que queremos relacionar. Como **esas magnitudes toman valores distintos**, es decir, varían, **le llamaremos variables**, y pueden ser:

- **Variable independiente**, representada por la letra **x**: corresponde a los valores de la primera magnitud pertenecientes al conjunto inicial. El valor de esta magnitud se fija previamente.
- **Variable dependiente,** representada por la letra **y**: corresponde a los valores de la segunda magnitud pertenecientes al conjunto final. El valor de esta magnitud depende de la variable independiente **x.**

Podemos escribir la relación entre ambas magnitudes (**x**,**y**) con una expresión algebraica o fórmula. (Recuerde que una expresión algebraica no es más que un conjunto de números y letras unidos mediante operaciones aritméticas).

Ejemplos de expresiones algebraicas:

| Enunciado | Expresión algebraica |
|---|---|
| El triple de un número | $3\mathrm{x}$ |
| La mitad de un número | $\frac{\mathrm{x}}{2}$ |
| El cuadrado de un número | $\mathrm{x}^2$ |
| El cuadrado de un número más dos unidades | $\mathrm{x}^2 + 2$ |

**La expresión general de una función o ecuación de una función es:**

$$\boxed{\boldsymbol{y = f(x)}}$$

Esta expresión general de una función quiere decir que ***a cada valor de la variable independiente*** **x** ***le corresponde <u>un único valor</u> de la variable dependiente*** **y**.

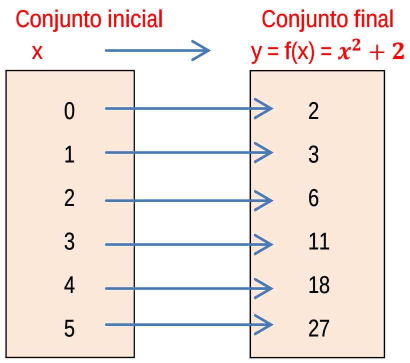
## Actividades resueltas

Dado el conjunto inicial $\{0, 1, 2, 3, 4\ ,5\}$:

a) Asocie a cada número del conjunto inicial su cuadrado más dos unidades y obtenga el conjunto final.

b) Compruebe si es una función y encuentre la fórmula que la define.

a) Representamos los conjuntos asociando a cada elemento del conjunto inicial su cuadrado más dos unidades para formar el conjunto final:




b) Efectivamente es una función pues a cada elemento del conjunto inicial le asocia **uno y sólo un elemento** en el conjunto final.

Lo que es lo mismo que a cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor de la variable dependiente y = f(x).

La fórmula o expresión que define esta función es la siguiente:

y = f(x) = $x^2 + 2$

Por ejemplo, calculamos el valor de la función cuando x = 3

x = 3 $\Rightarrow$ y = f(x) = $\boldsymbol{x^2 + 2}$ = $3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

## Actividades propuestas

S6. Dado el conjunto inicial $\{0, 1, 2, 3, 4\ ,5\}$ :

a) Asocie a cada número su triple más uno.

b) Compruebe si es una función y encuentre la fórmula que la define.

### 2.2.3 Función definida mediante una tabla de valores

Una tabla no es otra cosa que una expresión en forma ordenada de los valores adoptados por varias magnitudes.

Para cada par de valores (x,y), el valor *y* depende del valor que tome *x*; por eso, ambos se denominan variables, porque toman valores distintos.

A partir de la fórmula se puede construir una tabla de valores de la función f(x).

#### Actividades resueltas

Obtenga tres puntos de la función $y = 6x - 3$

Para cada valor numérico de *x*, obtenemos otro de *y*, que está en función del primero, mediante la relación de multiplicar por seis y al resultado restarle 3 unidades.

| $\mathbf{y = f(x) = 6x - 3}$ |
|---|
| $\mathbf{f(-1) = 6 \cdot (-1) - 3 = -6 - 3 = -9}$ |
| $\mathbf{f(0) = 6 \cdot (0) - 3 = 0 - 3 = -3}$ |
| $\mathbf{f(1) = 6 \cdot (1) - 3 = 6 - 3 = 3}$ |

Obtenemos los tres puntos de la función representados por los pares (x,y) en esta tabla de valores:

| x | y |
|---|---|
| $-1$ | $-9$ |
| $0$ | $-3$ |
| $1$ | $3$ |

Indique a cuál de las funciones siguientes pertenece el punto (1,10):

a) $y = 4x - 3$, b) $y = 5x + 5$, $c$) $y = 6x - 3$

En el punto (1,10), la variable independiente toma el valor de $x = 1$, y la variable dependiente toma el valor de $y = 10$. Por tanto, tenemos que comprobar qué función cumplen esos valores.

| x | y = f(x) | y = f(1) | (x,y) |
|---|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{4x - 3}$ | $\mathbf{4x - 3 = 4 \cdot 1 - 3 = 1}$ | (1,1) |
| 1 | $\mathbf{5x + 5}$ | $\mathbf{5x + 5 = 5 \cdot 1 + 5 = 10}$ | (1,10) |
| 1 | $\mathbf{6x - 3}$ | $\mathbf{6x - 3 = 6 \cdot 1 - 3 = 3}$ | (1,3) |

En el caso a) $y = 4x - 3$ la función pasa por el punto (1,1).

En el caso b) $y = 5x + 5$ la función pasa por el punto (1,10). Por lo tanto el punto (1,10) pertenece a esta función.

En el caso c) $y = 6x - 3$ la función pasa por el punto (1,3).

#### Actividades propuestas

S7. Indique a cuál de estas funciones pertenece el punto $A(-1,3)$:

a) $y = f(x) = x^3 - 3$

b) $y = f(x) = x - 4$

c) $y = f(x) = -2x^2 + 5$

d) $y = f(x) = 2x + 3$

S8. Indique a cuál de estas funciones pertenece el punto $B(2, -3)$:

a) $y = f(x) = x^3 - 5$

b) $y = f(x) = 3x - 9$

c) $y = f(x) = -2x^2 + 5$

d) $y = f(x) = 2x + 3$

## 2.2.4 Función definida mediante una gráfica

La gráfica de una función es la representación del conjunto de puntos que define esa función. Con la representación gráfica de la función podemos obtener información de la relación entre sus dos variables.

Es muy importante observar si tiene sentido o no unir los puntos obtenidos. Se podrán unir siempre que la magnitud para pasar de un valor representado en la gráfica a otro pueda tomar todos los valores intermedios. En caso contrario no se pueden unir.

### Actividades resueltas

En la tabla siguiente se dan los valores correspondientes a distintas masas colgadas de un resorte y los alargamientos que produce en este.

| Masa (g) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Alargamiento (cm) | 2 | 4 | 6 | 9 | 14 |

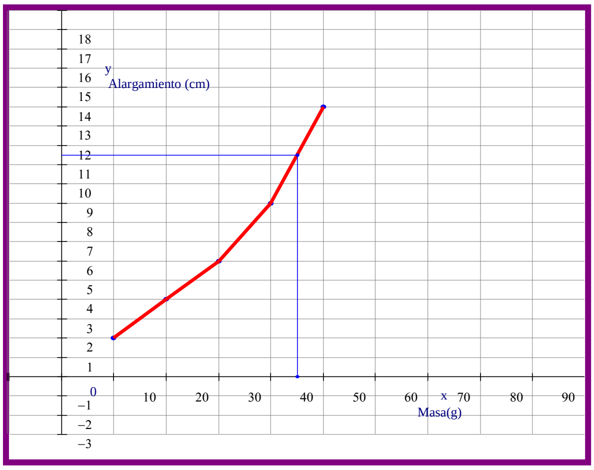
a) Represente en el plano los valores de la tabla.

b) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

Sí tiene sentido unir los puntos, ya que existen valores intermedios en la masa y por lo tanto existirán también en el alargamiento del resorte.

c) Estime, utilizando la gráfica, el alargamiento del resorte si cuelga una masa de 45 gramos.

Como se ve en la gráfica, a la abscisa x = 45 g le corresponde la ordenada y = 11,5 cm.




En el ejercicio siguiente, consideremos como abscisas los números naturales del 1 al 6 y asignémosles como ordenadas el doble de dicho número menos una unidad.

a) Escriba la fórmula que le corresponde a la expresión anterior de la tabla y, a partir de ella, construya una tabla de valores:

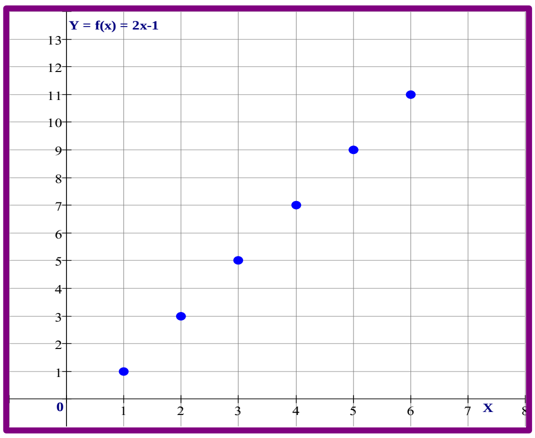
$$y = f(x) = 2x - 1$$

b) Dibuje la gráfica correspondiente.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

No tiene sentido, en este caso, unir los puntos ya que la relación entre las dos variables sólo es entre números naturales. Por lo tanto no existen valores intermedios al no estar contemplados en esta relación los números decimales.



### Actividades propuestas

S9. En un rectángulo de lados (x) y (x+1) el área viene dada por la fórmula *y = x · (x + 1).*

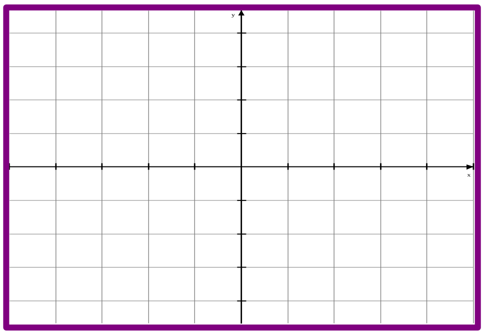
a) Elabore una tabla de valores. Tenga en cuenta que x sólo puede tomar valores positivos, pues no tiene sentido una longitud negativa.

$$y = f(x) = x \cdot (x+1)$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| y = x · ( x + 1) | | | | |

b) Dibuje la gráfica correspondiente.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?



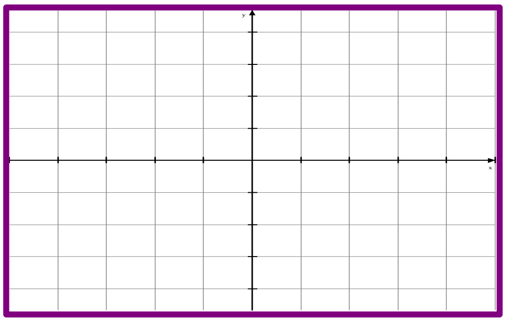
S10. La tabla siguiente de valores se consiguió midiendo el volumen y la masa de cinco muestras de granito encontradas en una montaña.

a) Represente en el plano los valores de la tabla.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Volumen ($cm^3$) | 200 | 250 | 300 | 400 | 1000 |
| Masa (g) | 500 | 625 | 750 | 1000 | 2500 |

b) Una, si tiene sentido, los puntos en el orden en que están escritos. ¿Qué línea se obtiene?

c) Estime la masa de otra muestra de 800 $cm^3$ de la misma roca a través de la gráfica.

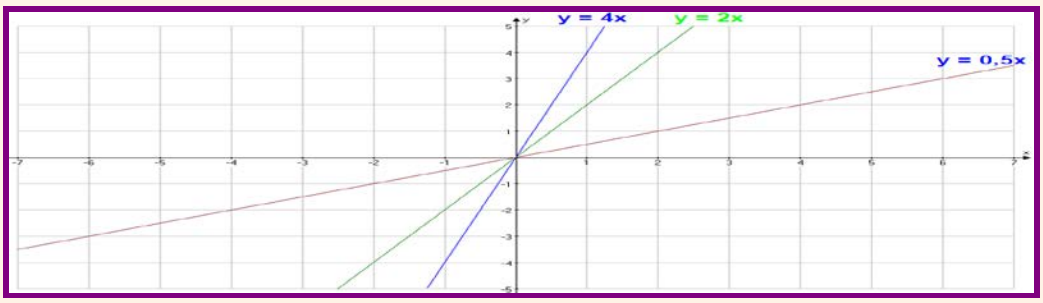


## 2.2.5 Ejemplos de funciones

### Funciones lineales o de proporcionalidad directa [y = mx]

**Las funciones** que tienen como **representación** gráfica **una recta que pasa por el origen de coordenadas** reciben el nombre de *funciones lineales*. Tienen todas la forma **y = mx**, donde *x* es la variable independiente, *y* es la variable dependiente y ***m*** (o coeficiente de *x*) es una constante, tiene siempre el mismo valor y se llama **pendiente.**

Las funciones ***y* = 4*x***, ***y* = 2*x***, ***y* = 0,5*x*... son todas funciones lineales**, **ya que su representación gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas**. **El coeficiente de *x* es el responsable de la inclinación de la recta y por eso recibe el nombre de *pendiente*.** Cuanto mayor sea su valor, mayor será la inclinación de la recta.



Decimos que las **funciones lineales son de proporcionalidad directa** porque las magnitudes representadas por sus variables independiente y dependiente son directamente proporcionales.

Dos magnitudes son directamente proporcionales si se obtiene una multiplicando la otra por un número. Las magnitudes de precio y peso referidos a un producto como el azúcar son directamente proporcionales. Supongamos que 1 kg de azúcar cuesta 1,25 euros. Si representamos por *x* el precio de 1 kg y por *y* el coste total, la función y = 1,25x es la función asociada a esa proporcionalidad y podemos construir la tabla de valores y la representación gráfica de la función.

**Fórmula**

y = 1,25x
y = 1,25 · 0 = 0
y = 1,25 · 1 = 1,25
y = 1,25 · 2 = 2,50
y = 1,25 · 3 = 3,75

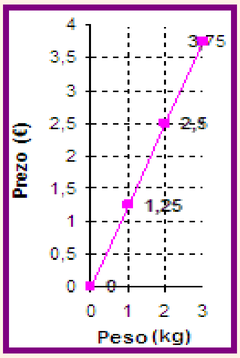
➲

**Tabla de valores**

| Peso (kg) | Precio (€) |
|---|---|
| 0 | 1,25 |
| 1 | 1,25 |
| 2 | 2,50 |
| 3 | 3,75 |

➲

**Gráfica**




### Actividades resueltas

Represente la función lineal o de proporcionalidad directa dada por la ecuación y=5x, definida en los números reales. Indique cuál es el valor de la pendiente.

a) El primero que hacemos es ir dando valores a x, a partir de la fórmula de la función, para calcular los valores de f(x) = y.

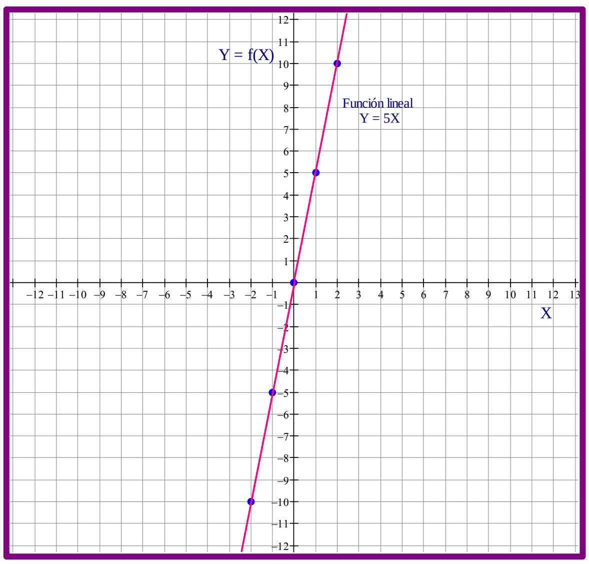
b) A continuación trasladamos los pares de puntos obtenidos (x,y) la un sistema de coordenadas

| x | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x)= $\mathbf{y = 5x}$ | $-10$ | $-5$ | 0 | 5 | 10 |

cartesianas.

Una vez colocados los puntos, tenemos que mirar si tiene sentido unirlos. En este caso sí tiene sentido, pues existen entre dos valores de *x* todos los valores intermedios. Unimos los puntos y obtenemos la gráfica.

c) La pendiente de la gráfica es el coeficiente de *x*; por tanto: Pendiente = 5.



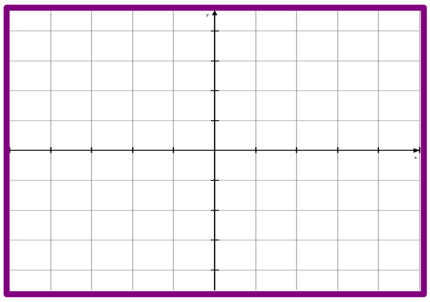
### Actividades propuestas

S11. Represente la función lineal o de proporcionalidad directa dada por la ecuación $y = -3x$. ¿Cuál es su pendiente?

a) Lo primero que hacemos es ir dando valores a *x*, a partir de la fórmula de la función, para calcular los valores de f(x) = y.

| X | 0 | 1 | 2 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y = -3x | | | | | |

b) A continuación trasladamos los pares de puntos obtenidos (x,y) a un sistema de coordenadas cartesianas.
c) Pendiente =

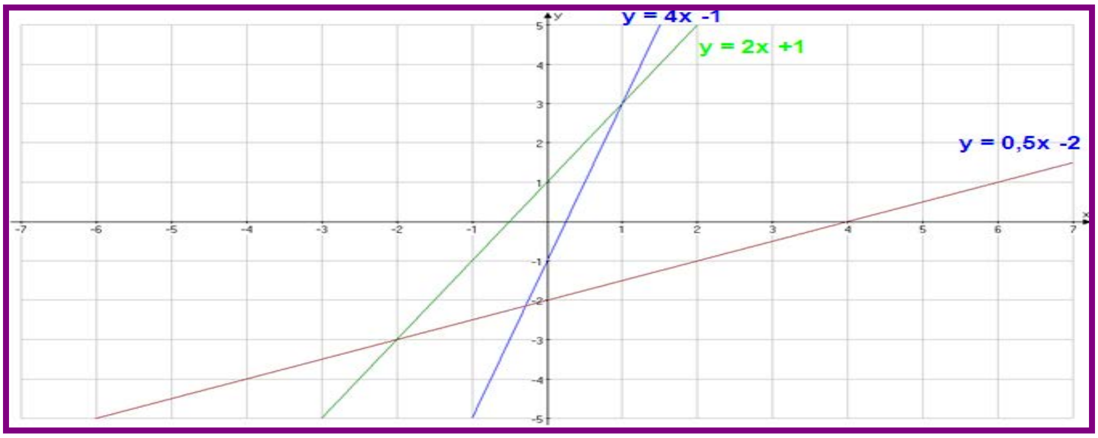


### Funciones afines $[y = mx + b]$

Las funciones que tienen como representación gráfica **una recta que no pasa por el origen** de coordenadas reciben el nombre de ***funciones afines***.

Tienen todas la forma **y = mx + b**, donde *x* es la variable independiente, *y* es la variable dependiente, ***m*** (o coeficiente de *x*) es una constante llamada **pendiente** y ***b*** es también una constante que **indica el valor de la ordenada cuando *x* = *0***. Es por eso que **se llama ordenada en el origen**.

Las funciones y = 4x – 1, y = 2x + 1, y = 0,5x – 2... son todas afines, ya que su representación gráfica es una recta que no pasa por el origen de coordenadas.

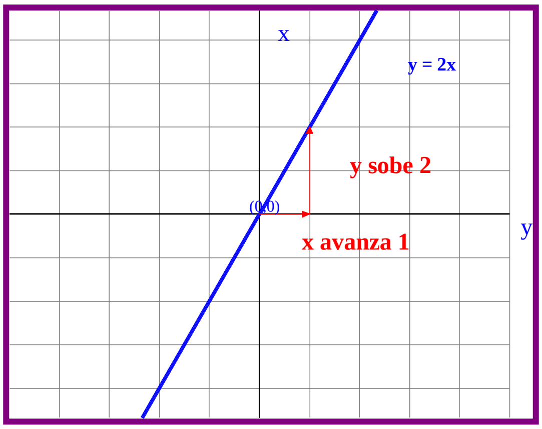
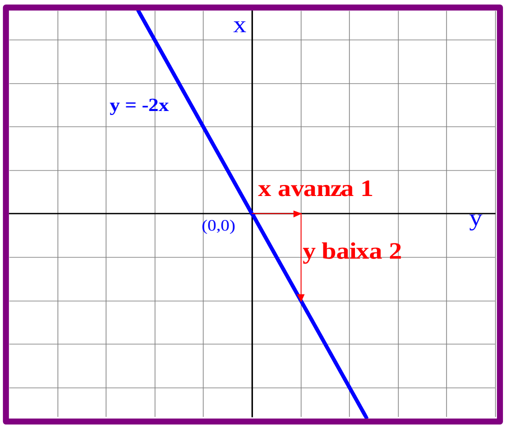



### Pendiente de la recta

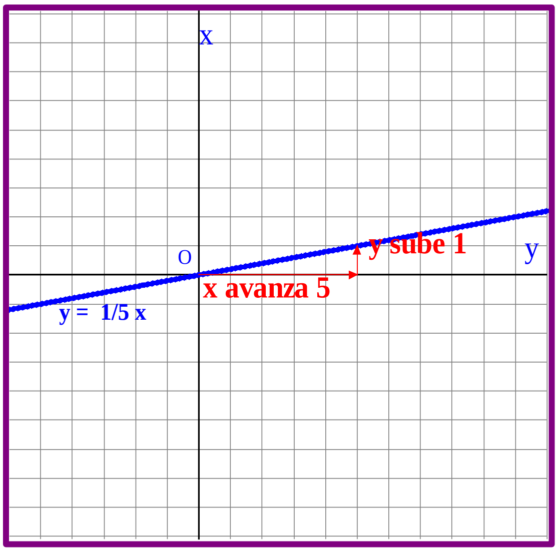
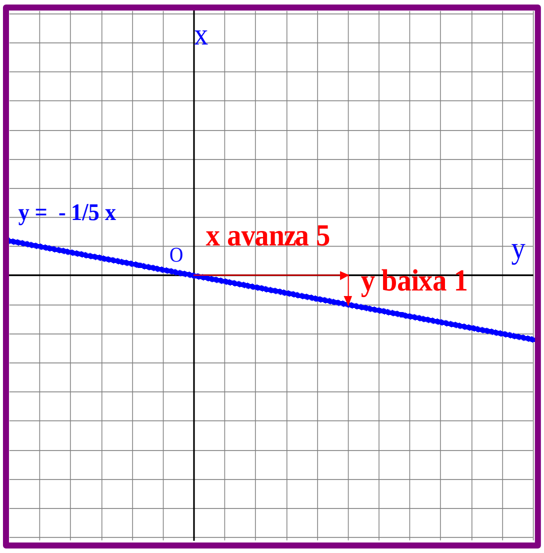
Tanto en la función lineal, $[y = mx]$, como en la función afín, $[y = mx + b]$, ya vimos que su representación gráfica es una recta. En la función lineal la recta pasa siempre por el origen (0,0). Y en las funciones afines la recta pasa por la ordenada en el origen (0,b).

En ambas funciones $m$ es lo que se conoce como PENDIENTE DE LA RECTA.

La pendiente $m$ nos indica la inclinación que tiene la recta, es decir, su crecimiento.

| Pendiente **m** positiva [$y = 2x$] | Pendiente **m** negativa [$y = -2x$] |
|---|---|
|   |   |
| En este caso la pendiente m = 2, pendiente positiva. Quiere decir que cuando la abscisa, x, avanza una unidad, la ordenada, y, sube dos unidades como se puede apreciar en la gráfica. | En este caso la pendiente m = -2, pendiente negativa. Quiere decir que cuando la abscisa, x, avanza una unidad, la ordenada, y, baja dos unidades como se puede apreciar en la gráfica. |

Cuanto mayor sea el valor absoluto de m, mayor será el crecimiento o decrecimiento. Dicho de otra forma: cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente, mayor será la inclinación de la recta.

| | |
|---|---|
|   |   |

En estas gráficas vemos como el valor absoluto de la pendiente es bajo: $m = \frac{1}{5}$; por lo tanto, se obtienen unas rectas con poca inclinación, es decir, poca pendiente. Aquí vemos que, cuando *x* avanza 5, *y* sube 1 si la gráfica es creciente o baja 1 si la gráfica es decreciente. Es decreciente.

### Actividades resueltas

Represente la función afín dada por la ecuación $y = 3x + 2$, definida en los números reales. Indique cuál es el valor de la pendiente y cuál es el valor de la ordenada en el origen.

a) Lo primero que hacemos es ir dando valores a *x*, a partir de la fórmula de la función, para calcular los valores de f(x) = y.

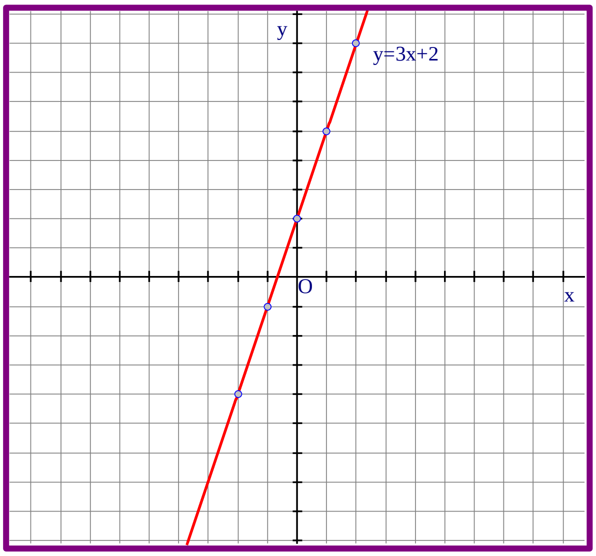
| x | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 3x + 2$ | $-4$ | $-1$ | 2 | 5 | 8 |

b) A continuación trasladamos los pares de puntos obtenidos (x,y) a un sistema de coordenadas cartesianas.

Una vez colocados los puntos, tenemos que ver si tiene sentido unirlos. En este caso sí tiene sentido, pues existen entre dos valores de *x* todos los valores intermedios. Unimos los puntos y obtenemos la gráfica.

c) La pendiente de la gráfica es el coeficiente de *x*; por tanto: Pendiente = 5.

La ordenada en el origen es el valor de *y* cuando x = 0. En este caso cuándo x = 0 $\Rightarrow$ y = 2.




### Actividades propuestas

S12. Represente la función afín dada por la ecuación $y = -3x - 2$. ¿Cuál es su pendiente y cuál es su ordenada en el origen?

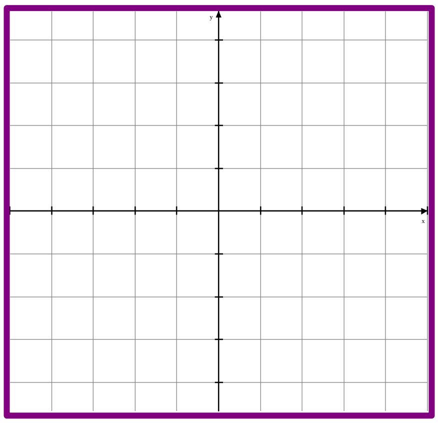
a) Lo primero que hacemos es ir dando valores a *x*, a partir de la fórmula de la función, para calcular los valores de f(x) = y:

| x | 0 | 1 | 2 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y = -3x-2 | | | | | |

b) A continuación trasladamos los pares de puntos obtenidos (x,y) a un sistema de coordenadas cartesianas y dibujamos la recta.

c) Pendiente = $\boxed{\phantom{xxxx}}$

Ordenada en el origen = $\boxed{\phantom{xxxx}}$



### Funciones constantes [$y = b$]

Si en la ecuación $y = mx + b$, la pendiente es cero, es decir, m = 0, decimos que la función es constante, *y su gráfica es una recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto* (0,b).

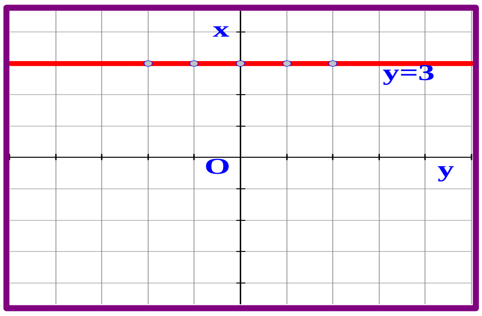
Se llama función constante porque el valor de *y* siempre es el mismo.

En el ejemplo siguiente, representaremos la función $y = 3$

Como vemos, valga lo que valga la variable independiente, *x*, la variable dependiente, *y*, siempre va a valer 3.

La tabla de valores es muy sencilla:

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y = 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

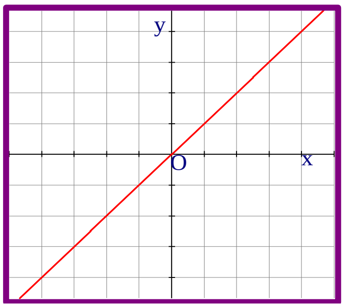



También existen ecuaciones de la forma $\mathbf{x = 3}$, que son rectas paralelas al eje *y*, **pero no son funciones**, porque para un valor de *x* hay infinitos valores de *y*. Para que fuese función, para un valor de *x*, en este caso 3, le tenía que corresponder uno y sólo un valor de *y*.

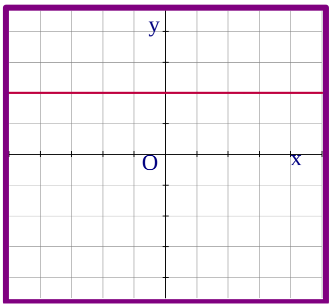
Recordemos el concepto de función: Una función es una relación entre dos magnitudes, de tal modo que a cada valor de la primera magnitud en el conjunto inicial le corresponde **un único valor, y sólo uno**, de la otra magnitud en el conjunto final o conjunto imagen.

## Actividades propuestas

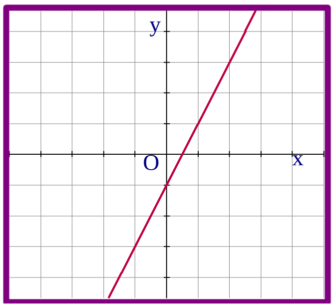
S13. Escriba debajo de cada gráfica a qué función corresponde. Indique si es lineal, afín o constante: y = -3x + 4, y = x, y = 2, y = 2x - 1, y = -3x, y = -3



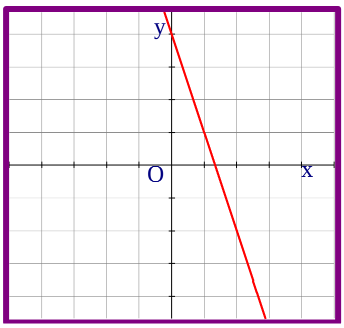

y =



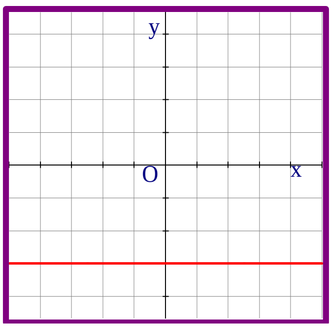

y =



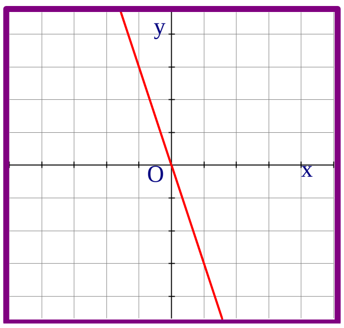

y =




y =




y =

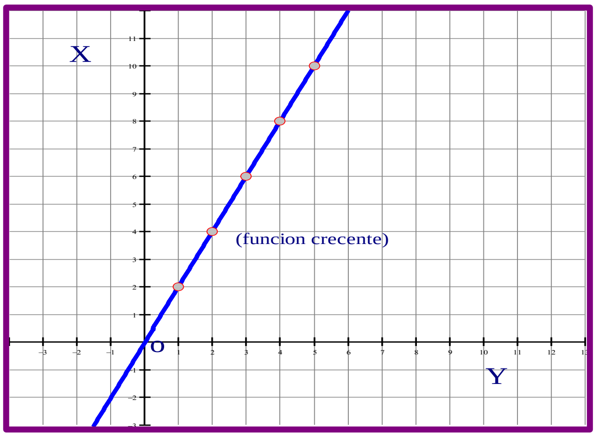
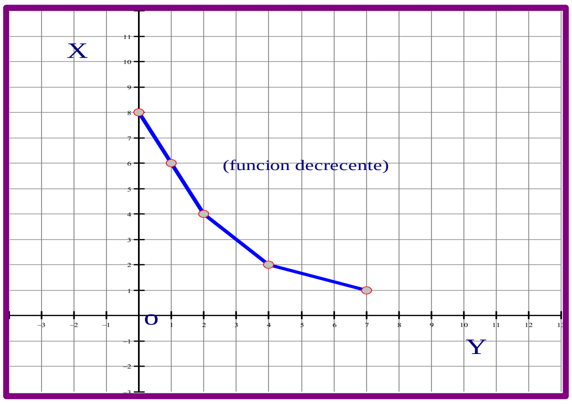
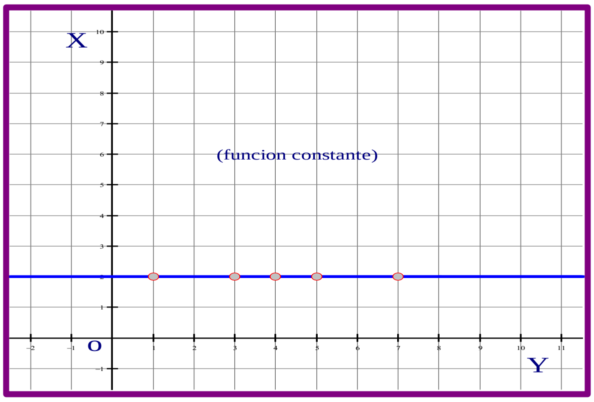



y =

## 2.2.6 Estudio gráfico de las funciones

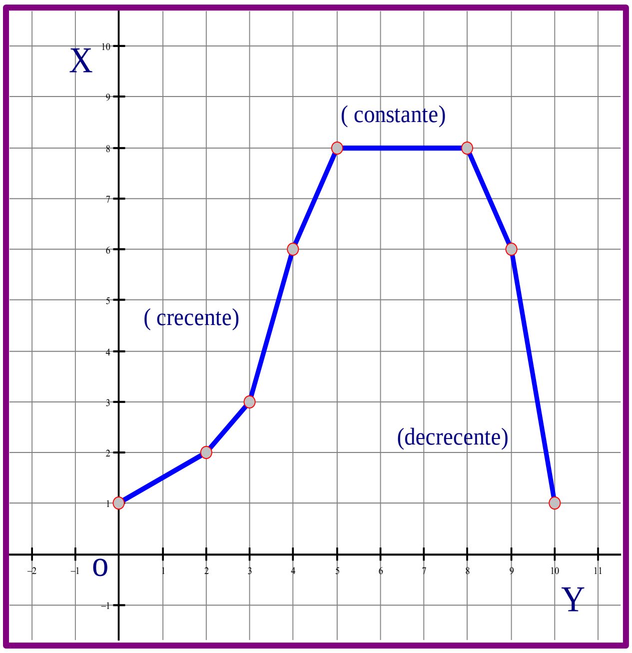
El estudio gráfico de las funciones pone de manifiesto una serie de propiedades de estas que pueden ser, en determinados momentos, de gran interés y utilidad.

Gráficamente las funciones se analizan de izquierda a derecha. Así tenemos:

| | |
|---|---|
|  | FUNCIÓN CRECIENTE<br>Una gráfica es creciente en un tramo si al crecer la variable independiente, *x*, también crece la variable dependiente, *y*.<br>Por ejemplo, en esta gráfica vemos que cuando x = 2, la variable y = 4.<br>Si x = 3, vemos que para ese valor y = 6<br>Si x = 5, vemos que y = 10<br>$x\ aumenta \Rightarrow y\ aumenta.$<br>En los tramos que se cumpla, la función es creciente. |
|  | FUNCIÓN DECRECIENTE<br>Una gráfica es decreciente en un tramo si al crecer la variable independiente, *x*, la variable dependiente, *y*, decrece.<br>Por ejemplo, en esta gráfica vemos que cuando x = 2, la variable y = 4.<br>Si x = 4, vemos que para ese valor y = 2<br>$x\ aumenta \Rightarrow y\ disminuye.$<br>En los tramos que se cumpla, la función es decreciente. |
|  | FUNCIÓN CONSTANTE<br>Una gráfica es constante en un tramo si al crecer la variable independiente, *x*, la variable dependiente, *y*, mantiene el mismo valor.<br>Por ejemplo, en esta gráfica vemos que cuando x = 1, la variable y = 2.<br>Si x = 7, vemos que para ese valor y = 2<br>$x\ aumenta$<br>$\Rightarrow y\ permanece\ constante.$<br>En los tramos que se cumpla, la función es constante. |

### Actividades resueltas

En la gráfica siguiente analice en qué tramos la función es creciente, decreciente y constante:



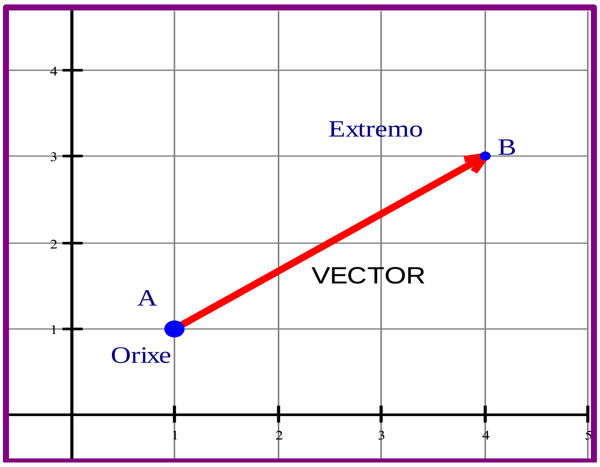

Las gráficas se analizan de izquierda a derecha.

En esta gráfica distinguimos tres tramos o intervalos de la variable independiente *x*, que van a determinar distinto comportamiento en la variable dependiente *y*.

1. Tramo o intervalo $(\mathbf{0 \leq x \leq 5})$. En este intervalo la función es creciente ya que al aumentar la variable *x*, también aumenta *y*.
2. Tramo o intervalo $(\mathbf{5 \leq x \leq 8})$. En este intervalo la función es constante ya que al aumentar la variable *x*, *y* permanece constante.
3. Tramo o intervalo $(\mathbf{8 \leq x \leq 10})$. En este intervalo la función es decreciente ya que al aumentar la variable *x*, disminuye *y*.

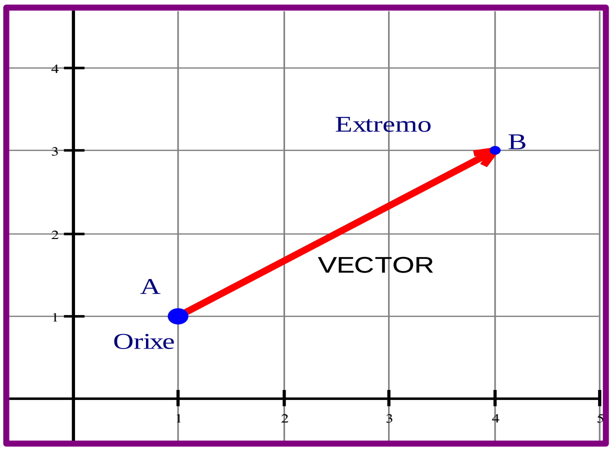
## 2.3 Vectores

### 2.3.1 Vector




Un vector $\overrightarrow{AB}$ **es un segmento** que va del punto A llamado origen a un punto B llamado extremo.

### 2.3.2 Módulo del vector

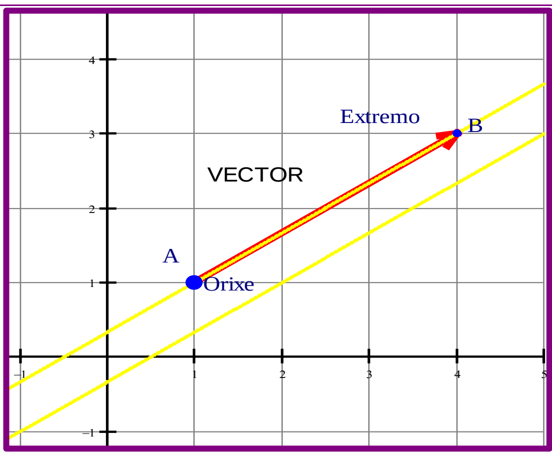



**El módulo** del vector $\overrightarrow{AB}$ **es la longitud del segmento** que va del punto A llamado origen a un punto B llamado extremo.
El módulo del segmento $\overrightarrow{AB}, se\ representa\ por\ |\overrightarrow{AB}|$.

$$|\overrightarrow{AB}| = Módulo\ de\ \overrightarrow{AB}$$

El módulo de un vector es un número siempre positivo o cero.

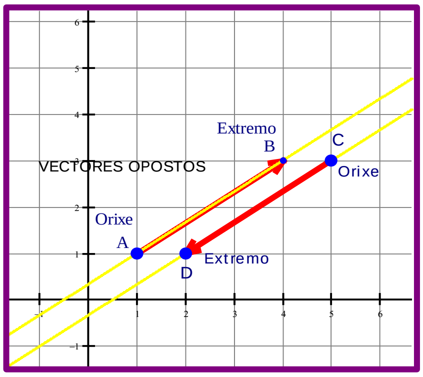
### 2.3.3 Dirección y sentido del vector




La dirección de un *vector* $\overrightarrow{AB}$ es la dirección de la recta que contiene al vector o cualquier otra recta paralela a ella.

El sentido del *vector* $\overrightarrow{AB}$ es el que va del origen *A* al extremo *B*.

## 2.3.4 Vectores opuestos

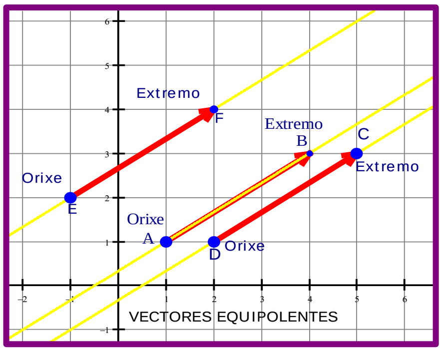



Dos puntos A y B determinan dos vectores fijos: uno será el vector $\overrightarrow{AB}$ y otro el vector $\overrightarrow{BA}$.

Estos dos vectores están en la misma dirección pero el sentido es el opuesto.

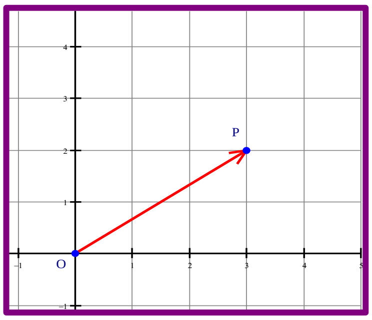
Vectores opuestos: son aquellos que tienen el mismo módulo, la misma dirección pero los sentidos son opuestos.

## 2.3.5 Vectores equipolentes




Dos o más vectores decimos que son equipolentes cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

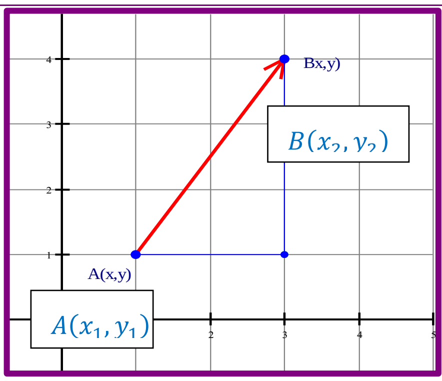
## 2.3.6 Vector de posición de un punto P en el plano de coordenadas




En un sistema de coordenadas tenemos un punto P.

El vector que une el origen de coordenadas O y el punto P y que se representa como $\overrightarrow{OP}$ se denomina vector de posición del punto P.

## 2.3.7 Coordenadas y componentes de un vector en el plano




Si tenemos dos puntos con sus coordenadas:

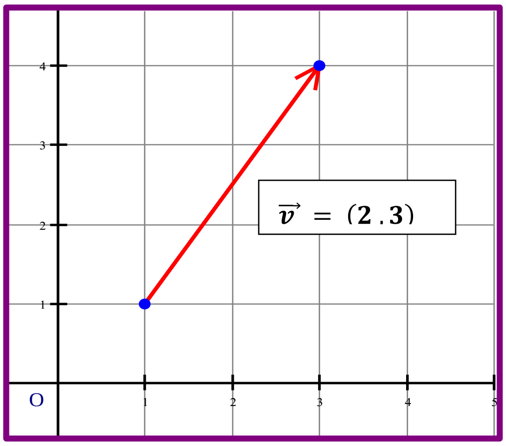
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

Las coordenadas o componentes del vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ serán las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

### Actividades resueltas

Calcular el módulo de un vector cuando se conocen sus componentes o coordenadas. Calcular el módulo del vector $\vec{v} = (2{,}3)$.




Tenemos un vector $\vec{v}$.

Conocemos sus componentes o coordenadas, $\vec{v} = (2, 3)$

En general cuando se conocen los componentes del vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$

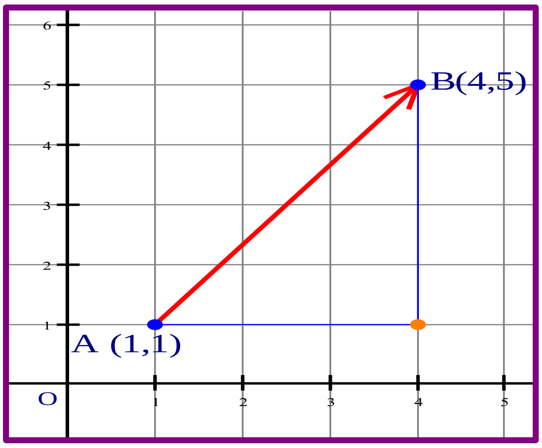
el módulo se calcula:

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$$

Por tanto:

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3{,}60$

Calcular el módulo de un vector cuando se conocen las coordenadas del origen y del extremo, es decir, cuando nos dan las coordenadas de los puntos. Calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.




En este caso no nos dan las coordenadas del vector como ocurría en el ejercicio anterior.
Ahora tenemos las coordenadas del origen y del extremo.

Las coordenadas o componentes del vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ serán las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\,, y_2 - y_1)$, es decir, abscisa del extremo menos abscisa del origen, ordenada del extremo menos ordenada del origen:

$\overrightarrow{AB} = (4 - 1\,, 5 - 1) = (3{,}4)$. Ahora ya tenemos las coordenadas del vector y podemos calcular el módulo:

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

### Actividades propuestas

S14. Calcule el módulo del vector que tiene por componentes $\vec{v} = (2{,}5)$.

S15. Calcule el módulo del vector con los componentes $\vec{u} = (-3{,}4)$.

S16. Calcule el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, siendo las coordenadas de A(2,1), y las coordenadas de B(4,7).

S17. Calcule el módulo del vector $\overrightarrow{CD}$, siendo las coordenadas de C(-2,2) y las coordenadas de D(2,5).

### 2.3.8 Vector unitario

Los vectores **unitarios** son aquellos que tienen de **módulo la unidad**.

## Normalizar un vector

Normalizar un vector consiste en obtener un vector unitario que sea de la misma dirección y sentido que el vector dado.

Para normalizar un vector se divide este por su módulo: $\vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|}$

Ejemplo: Si el vector $\vec{v}$ tiene por componentes $\vec{v} = (3,4)$, hallar el vector unitario de su misma dirección y sentido.

Tenemos el vector: $\vec{v} = (3,4)$

Calculamos el módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Ahora ya podemos calcular su vector unitario: $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

**Actividades propuestas**

S18. Halle el vector unitario del vector $\vec{v} = (5,12)$

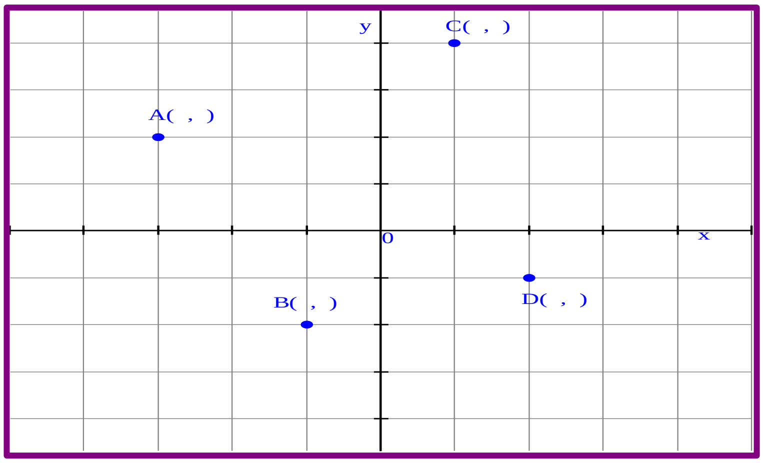
S19. Normalice el vector $\vec{v} = (-3, -4)$

S20. Halle el vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v} = (-6,8)$

# 3. Actividades finales

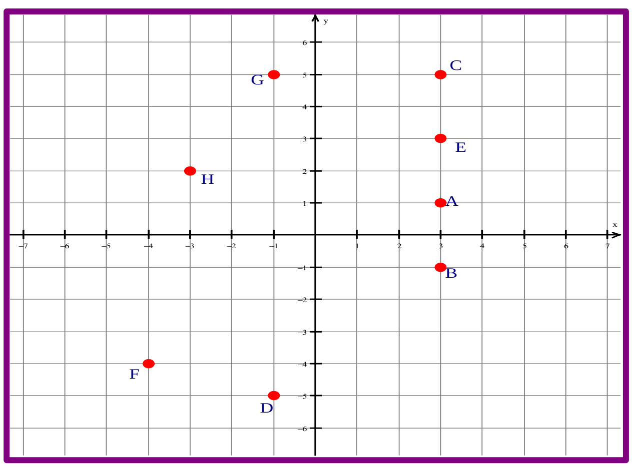
S21. Represente los puntos siguientes en el plano e indique en qué cuadrante se encuentran. A(-2,1); B(-2,-3); C(2,2); D(2,-3).

S22. Indique las coordenadas de los puntos reflejados y el cuadrante en el que se encuentran en el sistema de coordenadas.




S23. Represente los puntos siguientes en el plano: A(2,2), B(0,3), C(-2,2), D(-2,-2), E(0,-3), F(2,-2). A continuación una mediante segmentos los puntos mencionados en el orden en que aparecen. ¿Qué figura quedó representada?

S24. Complete la tabla siguiente con las coordenadas que vienen reflejadas en el sistema de coordenadas.




| | x | y |
|---|---|---|
| A | | |
| B | | |
| C | | |
| D | | |
| E | | |
| F | | |
| G | | |
| H | | |

S25. El perímetro de un cuadrado, en función del lado *x*, viene dado por la fórmula $P = 4x$.

a) Forme la tabla de valores para los valores de x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

b) Represente gráficamente los valores de la tabla.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos?

d) ¿Es una función?

S26. Dado el conjunto inicial $X = \{0,2,4,6,8,10\}$.

a) Asocie a cada elemento del conjunto inicial su cubo más tres unidades y obtenga el conjunto final, Y.

b) Compruebe si es una función y escriba la fórmula que la define.

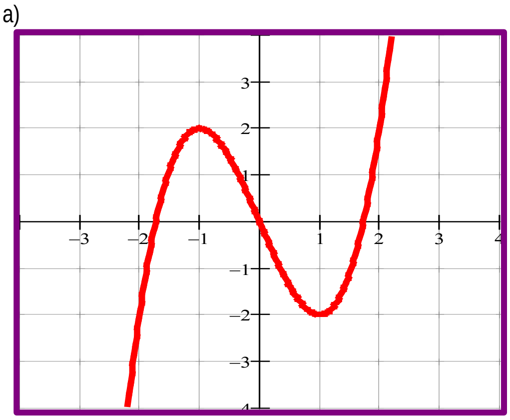
S27. Obtenga tres puntos que pertenezcan a la función: $f(x) = -5x - 1$

S28. Indique a cuál de las funciones siguientes pertenece el punto $(2,20)$:

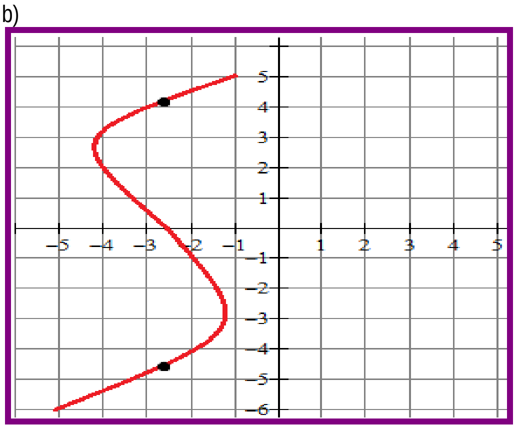
a) $y = 8x - 6$
b) $y = 10x + 2$
c) $y = 12x - 4$

S29. Explique por qué cada una de estas gráficas representa o no una función:

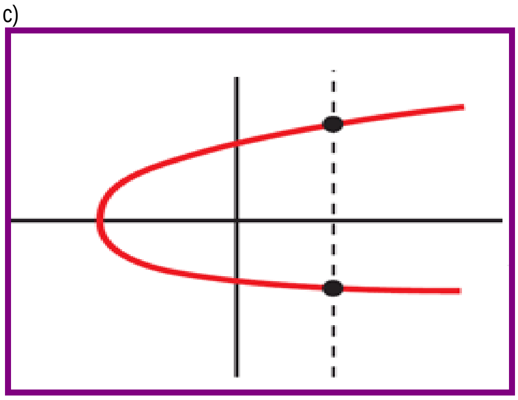
a)



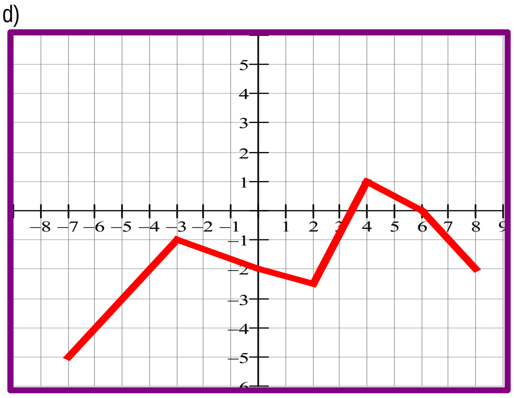
b)



c)



d)



S30. Represente $y = x + 4$, dando a $x$ los valores $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

S31. La función que asocia a cada número entero el siguiente podemos escribirla con la expresión algebraica **y = x + 1**. Represente gráficamente la función siguiendo estos pasos: construir la tabla de valores, situar los pares de abscisas y ordenadas en un sistema de coordenadas y unir los puntos con una línea.

S32. La función que asocia a cada número su triple podemos escribirla con la expresión algebraica **y = 3x**. Represente gráficamente la función siguiendo estos pasos: construir la tabla de valores, situar los pares de abscisas y ordenadas en un sistema de coordenadas y unir los puntos con una línea.

S33. La función que asocia a cada número entero su mitad podemos escribirla con la expresión algebraica $\boldsymbol{y = \frac{x}{2}}$. Represente gráficamente la función siguiendo estos pasos: construir la tabla de valores, situar los pares de abscisas y ordenadas en un sistema de coordenadas y unir los puntos con una línea.

S34. Represente gráficamente las funciones siguientes:

y = -2
x = -1
y = 5
x = -3

S35. Escriba la expresión algebraica que asocia a cada número su cuádruple menos cinco. Represente gráficamente la función.

S36. Sabiendo que el espacio recorrido y el tiempo son magnitudes directamente proporcionales y que un barco recorre en 1 hora una distancia de 15 km:

- Escriba la función asociada a esta proporcionalidad.
- Construya una tabla de valores.
- Represente gráficamente la función.
- Indique cuál es la pendiente de la recta.

S37. Imagine que va a un banco a cambiar euros por dólares. El cambio está en estos momentos a 1,13 dólares por cada euro, pero el banco cobra siempre, no importa la cantidad que cambie, 2,25 dólares de comisión. Calcule cuantos dólares le tendrá que dar el banco por 500 euros.

S38. Calcular el módulo de un vector que tiene por coordenadas $\vec{\mathrm{v}} = (6, -8)$ .

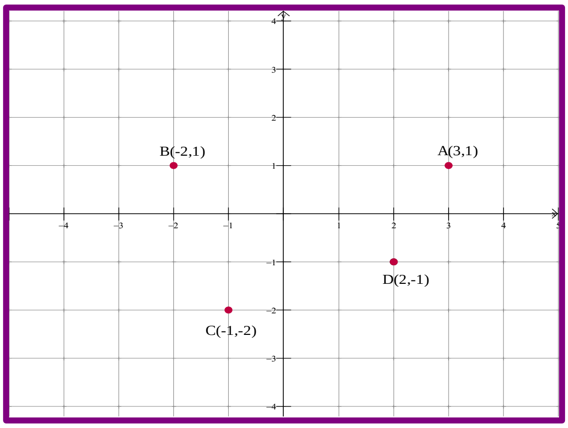
S39. Calcule el módulo del vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, siendo las coordenadas de A(2,5), y las coordenadas de B(6,8).

S40. Halle el vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v} = (6,8)$.

# 4. Solucionario

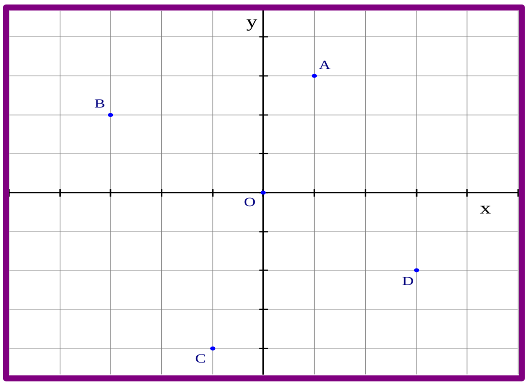
## 4.1 Soluciones de las actividades propuestas

S1.




Punto A(3,1)
Como las dos coordenadas son positivas, el punto estará situado en el cuadrante I.
Punto B(-2,1)
La abscisa es negativa: estará hacia la izquierda. La ordenada es positiva: estará hacia arriba. Por lo tanto el punto estará en el cuadrante II.
Punto C(-1,-2)
Como las dos coordenadas son negativas; el punto estará situado en el cuadrante III.
Punto D(2,-1)
La abscisa es positiva: estará hacia la derecha. La ordenada es negativa: estará hacia abajo. Por lo tanto el punto estará en el cuadrante IV.

S2.




Las coordenadas de un punto vienen determinadas por un par de puntos (x,y), llamados coordenadas cartesianas.

En este ejercicio las coordenadas de los puntos serán:

A(1,3)

B(-3,2)

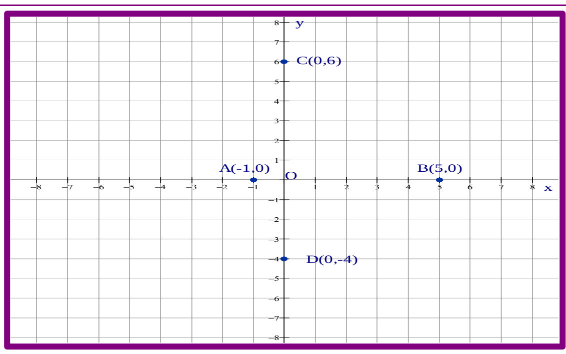
C((-1,-4)

D((3,-2)

O(0,0) es el origen de coordenadas

S3. *El punto A(0,3), la abscisa x = 0; por lo tanto se situará en el eje de ordenadas. El punto B(-2,0), la ordenada y = 0; por lo tanto se situará en el eje de abscisas. El punto C(0,-1), la abscisa x = 0; por lo tanto el punto se situará en el eje de ordenadas. El punto D(-6,0), la ordenada y = 0; por lo tanto el punto se situará en el eje de abscisas.*

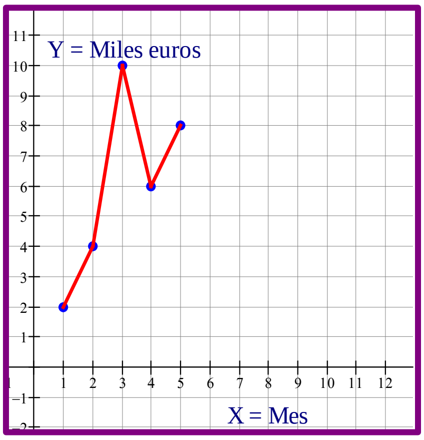
S4.




Los puntos A(-1,0) e B(5,0) tienen la ordenada y = 0; por lo tanto estarán situados sobre el eje de abscisas.

Los puntos C(0,6) y D(0,-4) tienen la abscisa x = 0; por lo tanto habrá que situarlos en el eje de ordenadas.

S5.




a) ¿En qué mes hubo más beneficios? ¿A cuánto ascendieron?
*En el tercer mes. Ascendieron a 10.000 €.*

b) ¿En qué mes hubo menos beneficios? ¿A cuánto ascendieron?
En el primer mes. Ascendieron a 2.000 €.

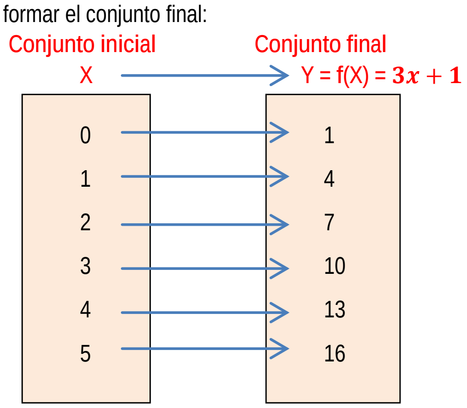
c) ¿En qué mes descendieron los beneficios?
En el cuarto mes.

d) ¿Cual es la variable independiente?
La variable independiente es x = mes.

e) ¿Cuál es la variable dependiente?
La variable dependiente es y = beneficios.

S6.

a) Representamos los conjuntos asociando a cada elemento del conjunto inicial su triple más una unidad para formar el conjunto final:




b) Efectivamente es una función, pues a cada valor de la variable independiente, *x*, le corresponde un único valor de la variable dependiente y = f(x)

La fórmula o expresión que define esta función es la siguiente: y = f(X) = $3x + 1$

Por ejemplo, calculamos el valor de la función cuando x = 3

x = 3 $\Rightarrow$ y = f(X) = 3 · 3 + 1 = 9 + 1 = 10

S7. *El punto $A(-1,3)$ pertenece a la función $y = f(x) = -2x^2 + 5$. Si x = -1, calculamos el valor de $y = f(x) = -2x^2 + 5 = -2 \cdot (-1)^2 + 5 = -2 \cdot 1 + 5 = -2 + 5 = 3$. Para x = $-1 \Rightarrow y = 3$. La función pasa por el punto $A(-1,3)$*

S8. *El punto $B(2,-3)$ pertenece a las funciones: b) $y = f(x) = 3x - 9$ y c) $y = f(x) = -2x^2 + 5$.*

*b) En esta función si x = 2, calculamos el valor de $y = f(x) = 3x - 9 = 3 \cdot 2 - 9 = 6 - 9 = -3$ . Para x= $2 \Rightarrow y = -3$. La función pasa por el punto $B(2,-3)$.*

*c) En esta función si x = 2, calculamos el valor de $y = f(x) = -2x^2 + 5 = -2 \cdot (2)^2 + 5 = -2 \cdot 4 + 5 = -8 + 5 = -3$. Para x= $2 \Rightarrow y = -3$. La función pasa por el punto $B(2,-3)$.*

S9.

a) Elabore una tabla de valores. Tenga en cuenta que x sólo puede tomar valores positivos, pues no tiene sentido una longitud negativa.

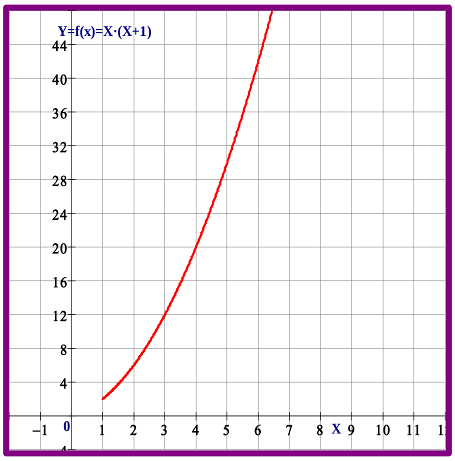
$$y = f(x) = x \cdot (x + 1)$$

b) Dibuje la gráfica correspondiente.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 2 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |

Sí tiene sentido, ya que en este caso la variable independiente, *x*, puede tomar valores naturales y también decimales. Es decir, puede tomar todos los valores intermedios entre dos dados de la variable *x*.




S10.

a) Represente en el plano los valores de la tabla:

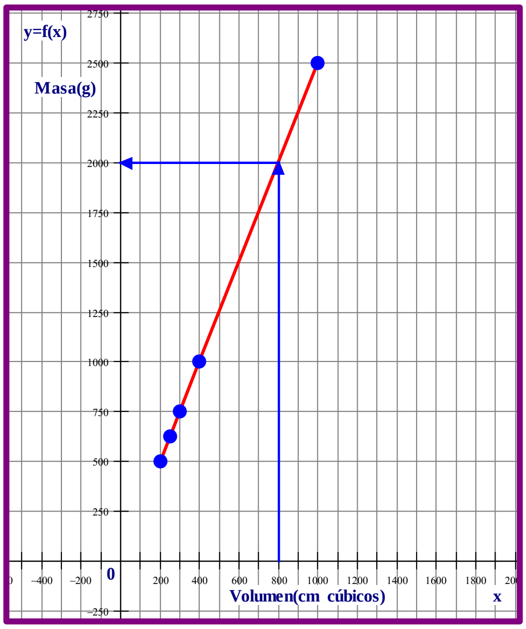
| Volumen ($\mathbf{cm^3}$) | 200 | 250 | 300 | 400 | 1.000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Masa (g) | 500 | 625 | 750 | 1000 | 2.500 |

b) Una, si tiene sentido, los puntos en el orden en que están escritos. ¿Qué línea se obtiene?

Como a la roca de un volumen intermedio le correspondería una masa, también tiene sentido unir los puntos. La línea que se obtiene es una recta.

c) Estime la masa de otra muestra de 800 cm$^3$ de la misma roca a través de la gráfica.

A partir de la gráfica, una muestra de 800 cm$^3$, que es la abscisa, levantamos una perpendicular hasta que toque la recta. Desde ese punto de la recta obtenemos con una paralela al eje "*x*" el punto de corte con el eje de ordenadas. Podemos decir que a 800 cm$^3$ le corresponde una masa de 2.000 g.




S11.

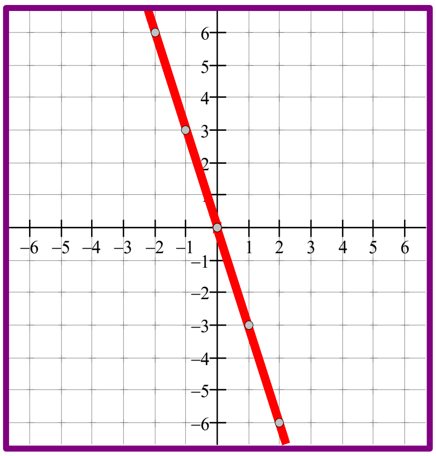
a) Lo primero que hacemos es ir dando valores a *x*, a partir de la fórmula de la función, para calcular los valores de f(x) = y:

| X | 0 | 1 | 2 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y = -3x | 0 | -3 | -6 | 3 | 6 |

b) A continuación trasladamos los pares de puntos obtenidos (x,y) a un sistema de coordenadas cartesianas.

Una vez colocados los puntos, tenemos que ver si tiene sentido unir los puntos. En este caso sí tiene sentido, pues existen entre dos valores de *x* todos los valores intermedios. Unimos los puntos y obtenemos la gráfica.

c) La pendiente de la gráfica es el coeficiente de *x*; por tanto: Pendiente $= -3$



S12.

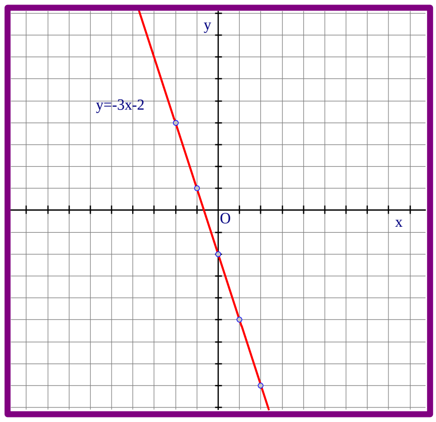
a) Lo primero que hacemos es ir dando valores a *x*, a partir de la fórmula de la función, para calcular los valores de f(x) = y:

| X | 0 | 1 | 2 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y = -3x - 2 | -2 | -5 | -8 | 1 | 4 |

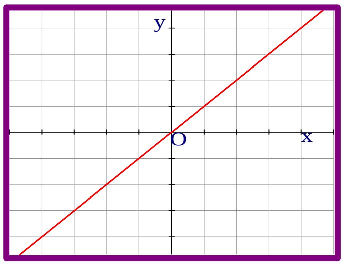
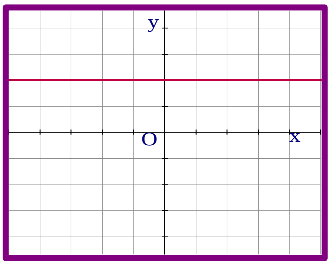
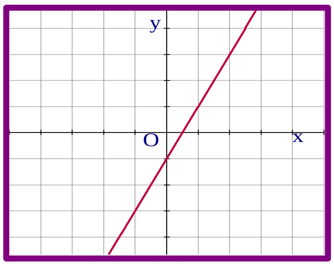
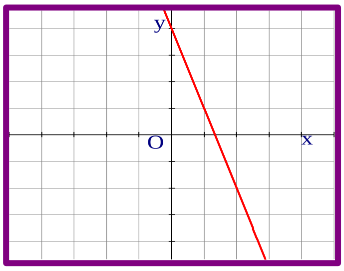
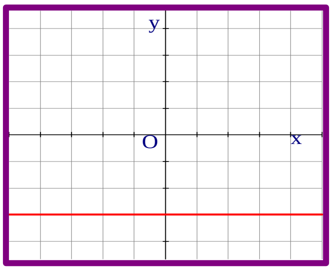
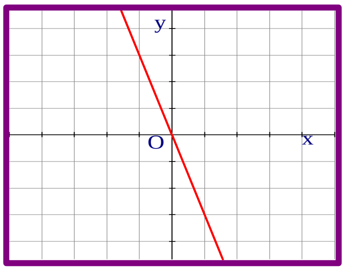
b) A continuación trasladamos los pares de puntos obtenidos (x,y) a un sistema de coordenadas cartesianas y dibujamos la recta.

c) Pendiente $= -3$

Ordenada en el origen $= -2$




S13.

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| y = x,  LINEAL | y = 2, CONSTANTE | y = 2x - 1, AFÍN |
|  |  |  |
| y = -3x + 4, AFÍN | y = -3, CONSTANTE | y = -3x, LINEAL |

S14. *El módulo de un vector, cuando se conocen los componentes,* $\vec{v} = (v_1, v_2) = (2{,}5)$, *se calcula de la siguiente forma:*

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + \ {v_2}^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} = 5{,}38$$

S15. *El módulo de un vector, cuando se conocen los componentes,* $\vec{u} = (u_1, u_2) = (-3, 4)$, *se calcula de la siguiente forma:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + \ {u_2}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

S16. *Las coordenadas o componentes del vector* $\overrightarrow{AB}$ *tendrán como abscisa la diferencia de la abscisa del extremo menos la abscisa del origen, y como ordenada la diferencia de la ordenada del extremo menos la ordenada del origen:* $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (4 - 2, 7 - 1) = (2, 6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 6)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 6{,}32$

S17. *Las coordenadas o componentes del vector* $\overrightarrow{CD}$ *tendrán como abscisa la diferencia de la abscisa del extremo menos la abscisa del origen, y como ordenada la diferencia de la ordenada del extremo menos la ordenada del origen:* $\overrightarrow{CD} = (x_2 - x_1\,, y_2 - y_1) = (2-(-2), 5-2) = (4\,,3) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (4\,,3)$

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

S18. $\vec{v} = (5{,}12)$

$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$\vec{u} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

S19. $\vec{v} = (-3, -4)$

$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{u} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

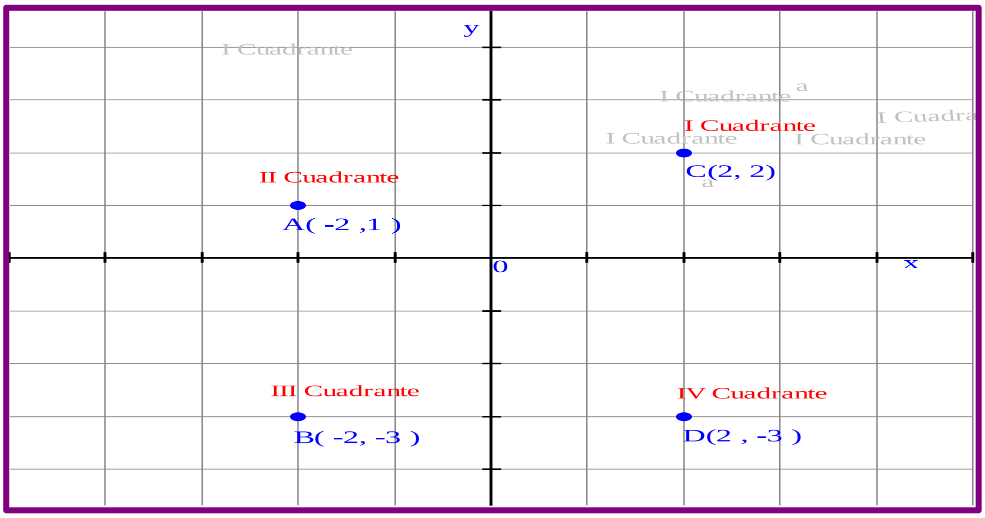
S20. $\vec{v} = (-6, 8)$

$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

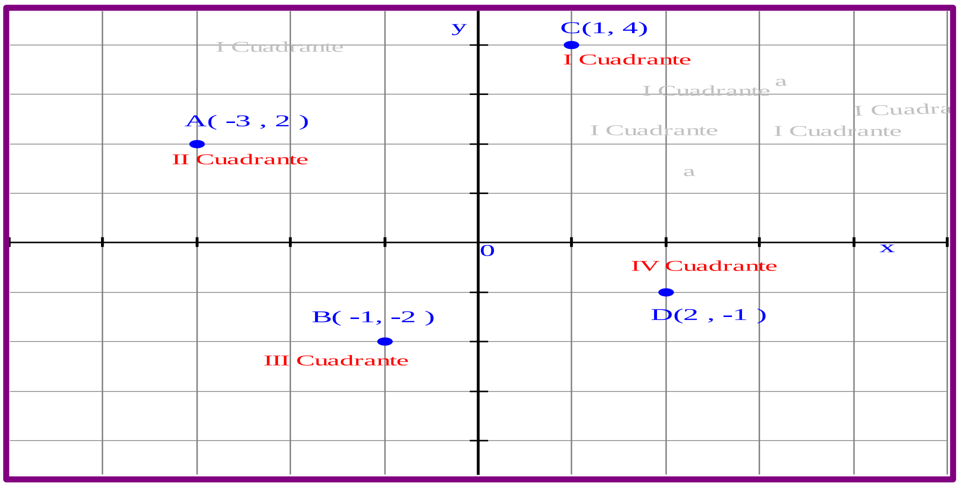
$\vec{u} = \left(\frac{-6}{10}, \frac{8}{10}\right)$

## 4.2 Soluciones de las actividades finales

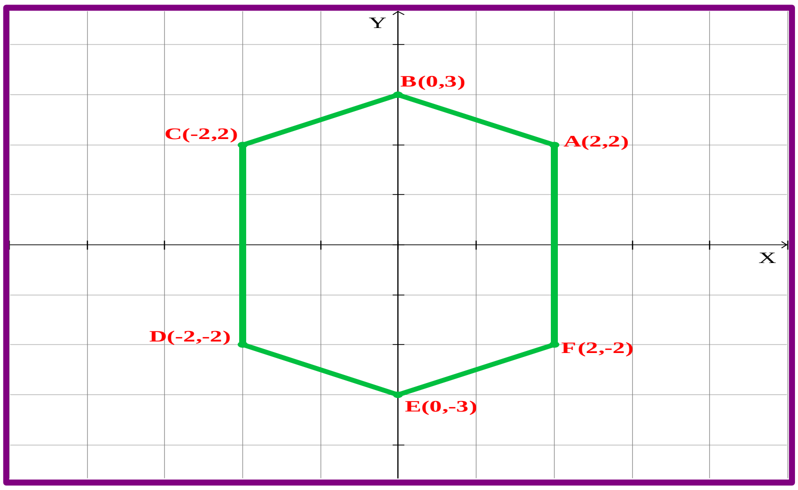
S21.




S22.

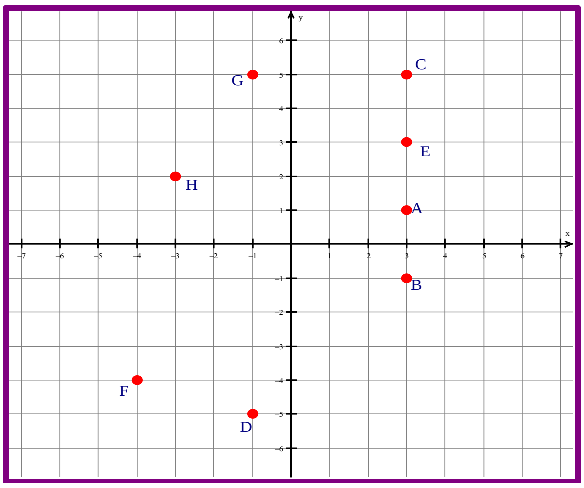



S23.




Al unir los puntos queda representado un hexágono

S24.



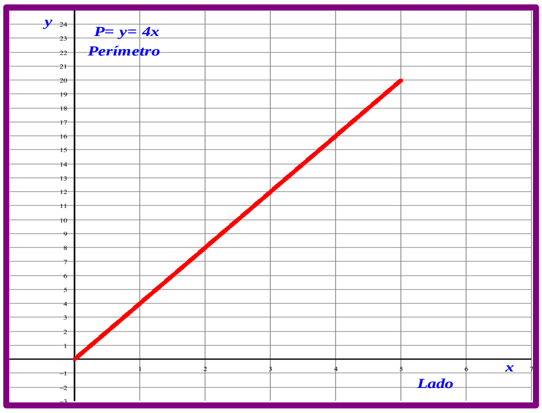

| | x | y |
|---|---|---|
| A | 3 | 1 |
| B | 3 | -1 |
| C | 3 | 5 |
| D | -1 | -5 |
| E | 3 | 3 |
| F | -4 | -4 |
| G | -1 | 5 |
| H | -3 | 2 |

S25.

a) Tabla de valores

| Lado = x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P = y = 4x | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |

b)



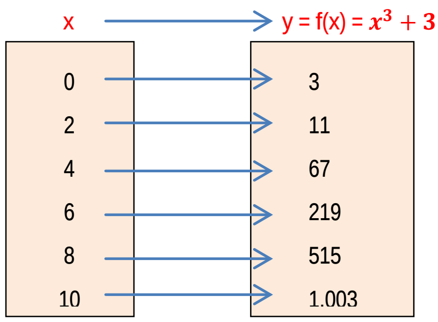

c) Tiene sentido unir los puntos ya que existe el perímetro para cualquier longitud del lado del cuadrado. La relación entre el lado y el perímetro es lineal.

d) Es una función, pues a cada valor de la variable independiente, en este caso el lado, le corresponde uno y sólo un valor de la variable dependiente, en este caso el perímetro.

S26.

a) Representamos los conjuntos asociando a cada elemento del conjunto inicial su cubo más tres unidades para formar el conjunto final:

Conjunto inicial Conjunto final




b) Efectivamente es una función, pues a cada elemento del conjunto inicial le asocia **uno y sólo un elemento** en el conjunto final.

Lo que es lo mismo que a cada valor de la variable independiente, *x*, le corresponde un único valor de la variable dependiente **y = f(x)**.

La fórmula o expresión que define esta función es la siguiente: y = f(x) = $x^3 + 3$

Por ejemplo, calculamos el valor de la función cuando x = 4:

x = 4 ⇒ y = f(x) = $\boldsymbol{x^3} + \mathbf{3}$ = $4^3 + 3 = 64 + 3 = 67$

S27.

Para cada valor numérico de “x” obtenemos otro de “y” que está en función del primero mediante la relación de multiplicar por -5 y al resultado restarle una unidad.

| $\mathbf{y = f(x) = -5x - 1}$ |
|---|
| $\mathbf{f(-1) = -5 \cdot (-1) - 1 = 5 - 1 = 4}$ |
| $\mathbf{f(0) = -5 \cdot (0) - 1 = 0 - 1 = -1}$ |
| $\mathbf{f(1) = -5 \cdot (1) - 1 = -5 - 1 = -6}$ |

Los puntos serían
$(-1,4)$, $(0,-1)$, $(1,-6)$

Obtenemos los tres puntos de la función representados por los pares (x,y) en esta tabla de valores.

| x | y |
|---|---|
| $-1$ | $4$ |
| $0$ | $-1$ |
| $1$ | $-6$ |

S28.

En el punto (2,20), la variable independiente toma el valor de $x = 2$, y la variable dependiente toma el valor de $y = 20$. Por tanto tenemos que comprobar qué función cumplen esos valores:

| x | y = f(x) | y = f(2) | (x,y) |
|---|---|---|---|
| 2 | $\mathbf{8x - 6}$ | $\mathbf{8x - 3 = 8 \cdot 2 - 6 = 10}$ | (2,10) |
| 2 | $\mathbf{10x + 2}$ | $\mathbf{10x + 2 = 10 \cdot 2 + 2 = 22}$ | (2,22) |
| 2 | $\mathbf{12x - 4}$ | $\mathbf{12x - 4 = 12 \cdot 2 - 4 = 20}$ | (2,20) |

En el caso a) $y = 8x - 6$ la función pasa por el punto (2,10).

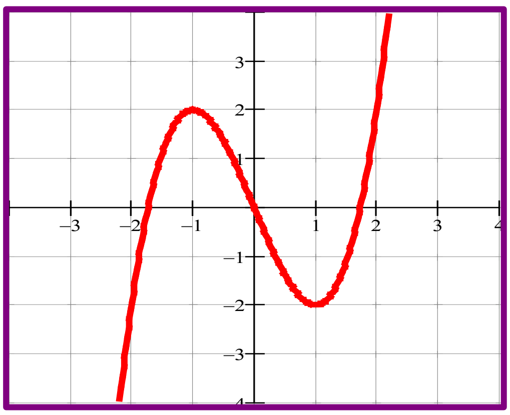
En el caso b) $y = 10x + 2$ la función pasa por el punto (2,22).

En el caso c) $y = 12x - 4$ la función pasa por el punto (2,20).

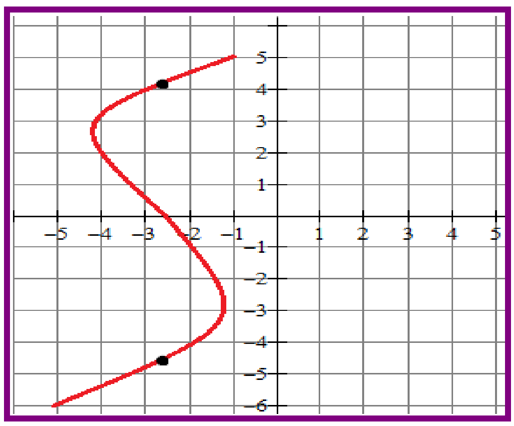
Por lo tanto el punto (2,20) pertenece a esta función.

S29.

a) Es una función porque a cada valor de *x* le corresponde un sólo valor de *y*.

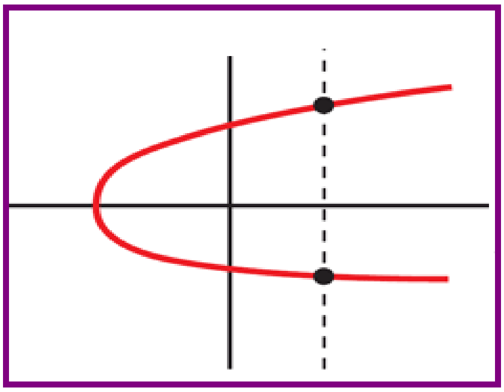


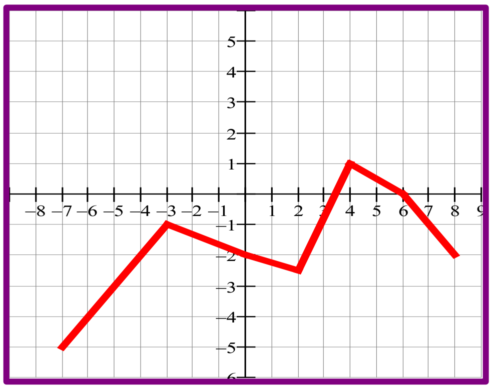
b) No es una función porque, por ejemplo, a la abscisa x=-2,5 le corresponden dos valores de *y*.



c) No es una función pues hay valores de *x* a los que les corresponden dos valores de la ordenada *y*.

d) Es una función porque a cada valor de *x* le corresponde un valor de *y*.

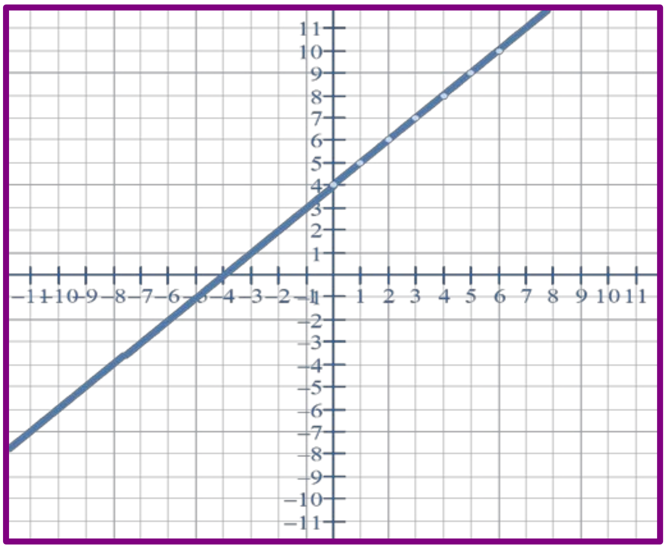




S30.

$y = x + 4$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 5 |
| 2 | 6 |
| 3 | 7 |
| 4 | 8 |
| 5 | 9 |
| 6 | 10 |



S31.

y = x + 1

y = -2 + 1 = -1

y = -1 + 1 = 0

y = 0 + 1 = 1

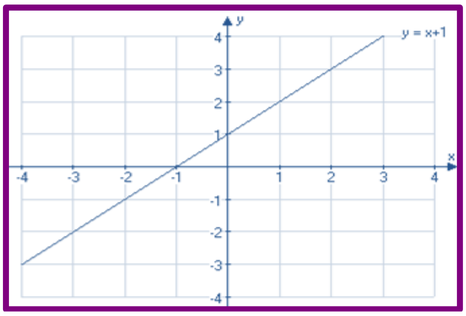
y = 1 + 1 = 2

y = 2 + 1 = 3

➲

| x | y |
|---|---|
| -2 | -1 |
| -1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |

➲




S32.

y = 3x

y = 3 · (-2) = -6

y = 3 · (-1) = -3

y = 3 · 0 = 0

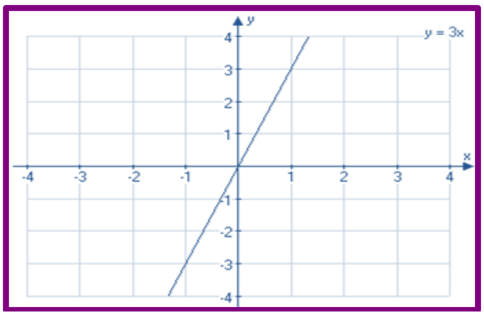
y = 3 · 1 = 3

y = 3 · 2 = 6

➲

| x | y |
|---|---|
| -2 | -6 |
| -1 | -3 |
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |

➲



S33.

y = x/2

y = -4/2 = -2

y = -2/2 = -1

y = 0/2 = 0

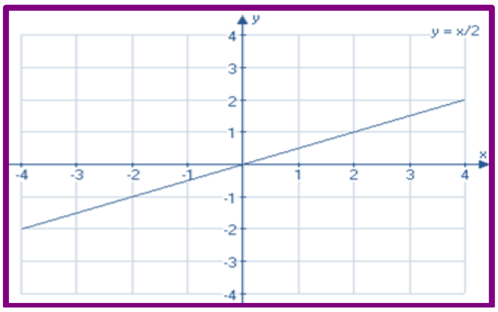
y = 2/2 = 1

y = 4/2 = 2

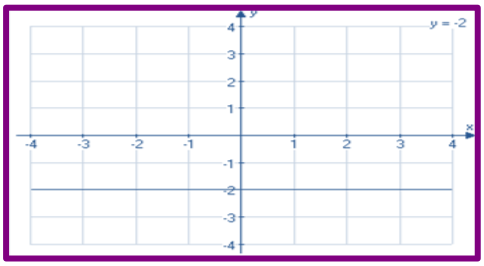
➲

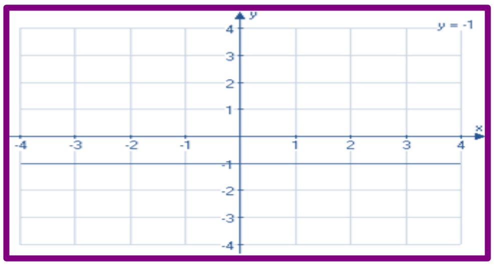
| x | y |
|---|---|
| -4 | -2 |
| -2 | -1 |
| 0 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |

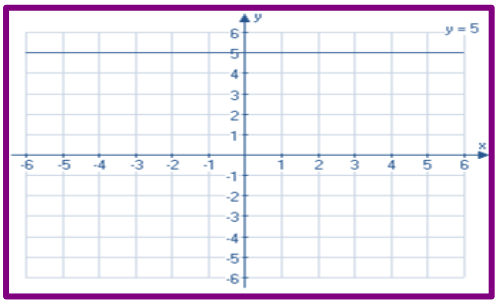
➲

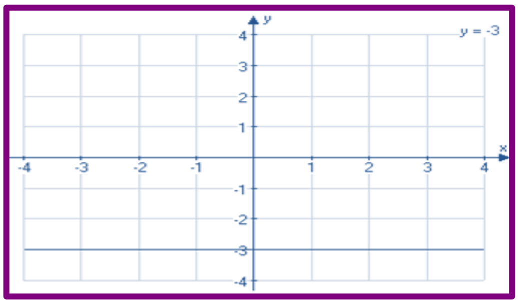



S34.




S35. *La función estará definida por la ecuación* $y = 4x - 5$

y = 4x - 5

y = 4 · (-2) - 5 = -13

y = 4 · (-1) - 5 = -9

y = 4 · 0 - 5 = -5

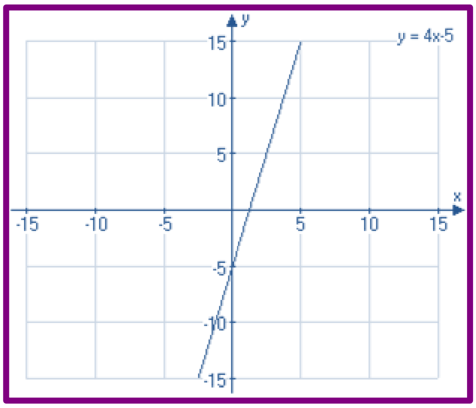
y = 4 · 1 - 5 = -1

y = 4 · 2 - 5 = 3

➲

| x | y |
|---|---|
| -2 | -13 |
| -1 | -9 |
| 0 | -5 |
| 1 | -1 |
| 2 | 3 |

➲



S36. *Espacio = velocidad x tiempo ⇒ e = 15 km/h · t ⇒ y = 15x*

e = v · t
y = 15x

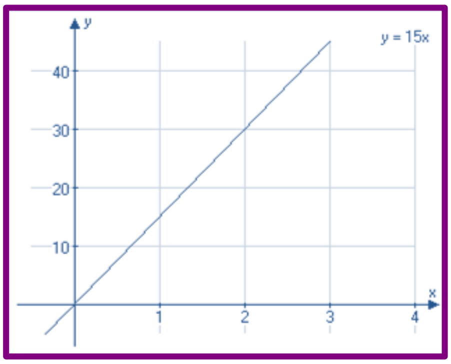
y = 15 · 1 = 15

y = 15 · 2 = 30

y = 15 · 3 = 45

y = 15 · 4 = 60

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 15 |
| 2 | 30 |
| 3 | 45 |
| 4 | 60 |




S37. *En este caso la variable dependiente es el dólar y la variable independiente es el euro. Las dos variables pueden relacionarse tal como está el cambio y = 1,13x. En el enunciado del ejercicio nos dicen que el banco cobra una comisión fija, por lo tanto la ecuación quedaría:*

$$y = 1{,}13x - 2{,}25 \Rightarrow dólar\ = 1{,}13 \cdot X\ euros - 2{,}25 \quad \Rightarrow$$

$$Dólares\ = 1{,}13 \cdot 500\ € - 2{,}25\ = 565 - 2{,}25\ = 562{,}75\ \$$$

S38. $|\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{\boldsymbol{v_1}^2 + \boldsymbol{v_2}^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

S39. *Primero calculamos las coordenadas del vector* $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (6 - 2{,}8 - 5) = (4{,}3) \Rightarrow\ AB = (4{,}3).$ *Ahora ya podemos calcular el módulo* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

S40. *Primero tenemos que hallar el módulo del vector* $\vec{v}\ =\ (6{,}8) \Rightarrow |\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64}\ \Rightarrow \sqrt{100} = 10.\ Calculamos\ el\ vector\ unitario\ \vec{u} = \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right)$

# 5. Glosario

| | | |
|---|---|---|
| A | ▪ Abscisa | Para indicar un punto en el plano se requieren dos coordenadas: P(x,y). La primera coordenada (x) se conoce como abscisa. La segunda coordenada (y) se conoce como ordenada. |
| | ▪ Abierto, intervalo | Intervalo que no incluye los valores extremos. Se denota por (a,b). Geométricamente, el intervalo incluye todos los puntos de la recta numérica entre *a* y *b*, pero excluyendo estos dos valores. |
| C | ▪ Cartesiano, plano | Sistema de coordenadas en el que los ejes son mutuamente perpendiculares. |
| | ▪ Cerrado, intervalo | Intervalo que incluye sus valores extremos. Se denota por $[a, b]$. Geométricamente, el intervalo$[a, b]$ incluye todos los puntos de la recta numérica entre ***a*** y ***b***, incluyendo estos dos valores. |
| | ▪ Componente | Los componentes de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son cada uno de los números $v_1$ e $v_2$. |
| | ▪ Continuidad | Una función se denomina continua entre dos valores del eje de abscisas $[a, b]$ si toma todos los valores entre f(a) y f(b) y si se puede dibujar en ese intervalo sin despegar la punta del lápiz del papel sobre el cual se dibuja. |
| | ▪ Coordenada | Una coordenada es un número al cual le corresponde un punto de la recta numérica.<br>Las coordenadas son números que indican la posición de un punto en el plano: P(x,y) |
| | ▪ Cortes con los ejes | En una función, son los puntos donde esta función corta el eje de abscisas (eje *x*) cuando y = 0, y donde corta el eje de ordenadas (eje *y*) cuando x = 0. |
| | ▪ Crecimiento | Decimos que una función es creciente en un tramo o intervalo cuando al aumentar “x”, aumenta “y”. |
| | ▪ Cuadrante | En un sistema de coordenadas rectangulares, el plano queda dividido en 4 regiones. Cada una de esas regiones es un cuadrante. |
| D | ▪ Decrecimiento | Decimos que una función es decreciente en un tramo o intervalo cuando al aumentar “x”, disminuye “y”. |
| | ▪ Dependencia funcional | Se dice que la variable *y* depende funcionalmente de la variable *x* si es posible escribir la relación que existe entre ellas mediante una ecuación. En cuyo caso *y* es la variable dependiente (depende de *x*) y *x* es la variable independiente. |
| | ▪ Discontinuidad | Una función es discontinua entre dos valores del eje de abscisas cuando para dibujar su gráfica hay que levantar el lápiz. Los puntos donde no es continua la función se llaman puntos de discontinuidad. |
| | ▪ Discreta | Se dice que una variable toma valores discretos cuando sólo puede tomar valores de manera entera. Lo contrario de discreto es continuo. |
| F | ▪ Función | Una función es una relación entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera magnitud se le asocia un único valor de la segunda. |
| | ▪ Función afín | La función afín tiene la ecuación $y = mx + n$. Se representa por una recta que no pasa por el origen de coordenadas. Corta al eje *y* en el punto (0,n). |
| | ▪ Función constante | La función constante tiene la ecuación $y = k$. En esta función el valor de *y* no depende de *x*. Se representa por una recta paralela al eje de abscisas a una distancia *k* de este. |
| | ▪ Función lineal | La función lineal o de proporcionalidad relaciona dos magnitudes proporcionales. Tiene la ecuación $y = mx$. Se representa por una recta que pasa siempre por el origen de coordenadas, la constante de proporcionalidad es *m* y tiene que ver con la inclinación o pendiente de la recta. |

| | | |
|---|---|---|
| M | ▪ Magnitud | Propiedad de los cuerpos que puede ser medida, como puede ser el tamaño, el peso, etc. Es un número que indica la medida de una cualidad. |
| | ▪ Máximo | Se llama máximo de una función al punto en que la ordenada toma el mayor valor. El punto más alto de la función. |
| | ▪ Máximo relativo | En una función son los puntos en que su ordenada es mayor que la de los puntos de su alrededor, tanto a su derecha como a su izquierda. |
| | ▪ Mínimo | Se llama mínimo de una función al punto en que la ordenada toma el menor valor. El punto más bajo de la función. |
| | ▪ Mínimo relativo | En una función son los puntos en que su ordenada es menor que la de los puntos de su alrededor, tanto a su derecha como a su izquierda. |
| | ▪ Módulo de un vector | El módulo de un vector es la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo de un vector es siempre un número positivo. |
| N | ▪ Normalizar un vector | Normalizar un vector consiste en hallar otro vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector dado. Para normalizar un vector, se divide este por su módulo. |
| O | ▪ Ordenada | Dadas las coordenadas de un punto en el plano P(x,y), la primera coordenada (x) se llama abscisa y la segunda coordenada (y) se llama ordenada. |
| P | ▪ Pendiente | La pendiente de una recta ($y = mx$ o $y = mx \pm b$) indica la inclinación de esta, teniendo en cuenta su situación con respecto al eje *x* y al eje *y*. Es el valor que nos indica *m*.<br>Si *m* es positivo, la recta es creciente y se sitúa en los cuadrantes I e III.<br>Si *m* es negativo, la recta es decreciente y se sitúa en los cuadrantes II e IV.<br>Geométricamente, la pendiente indica cuántas unidades avanza verticalmente la gráfica por cada unidad avanzada en el sentido del eje de las *x*. |
| | ▪ Plano cartesiano | Plano que utiliza un sistema de coordenadas cartesianas para determinar las coordenadas de los puntos. |
| S | ▪ Segmento | Intervalo de la recta delimitado por dos puntos fijos sobre ella. El segmento que se inicia en el punto A y termina en el punto B se denota por $\overline{AB}$. |
| | ▪ Sistema coordenado | Conjunto de ejes que sirven para indicar las coordenadas de puntos. Cuando los ejes son mutuamente perpendiculares y todos utilizan la misma unidad de medida en cada eje, se dice que es un sistema de coordenadas cartesiano. |
| V | ▪ Variable independiente | Es aquella cuyo valor no depende de otra variable. En una función es el valor de *x* y se representa en el eje de abscisas. |
| | ▪ Variable dependiente | Es aquella cuyos valores dependen de los que tome otra variable. En una función se designa por *y* o $f_{(x)}$ y se representa en el eje de ordenadas. |
| | ▪ Vector | En Física un vector es una magnitud definida en un sistema de referencia que se caracteriza por tener módulo (o longitud) y una dirección. Su expresión geométrica consiste en segmentos de recta orientados hacia un cierto lado, asemejándose a una flecha. |
| | ▪ Vector unitario | Es un vector que tiene por módulo la unidad. |

# 6. Bibliografía y recursos

### Bibliografía


- *Libros para a educación secundaria a distancia de adultos. Ámbito científico-tecnolóxico*, Consellería de Educación e Ordenación Universitaria.
- *Ámbito científico-tecnolóxico. Educación secundaria para persoas adultas. Nivel I,* Ed. Safel, 2010.
- *Secundaria 2000 Matemática I. Enseñanza secundaria para persoas adultas*, Ed. Santillana, 1999.
- *Matemáticas. Educación secundaria de adultos*, Colección eduforma, Ed. Mad-Sevilla.
- *Matemáticas ESO 1*, Ed. Anaya, 2016.
- *Matemáticas Serie Práctica ESO 1*, Ed. Obradoiro Santillana, 2004.
- *Wikipedia, la enciclopedia libre.*


### Enlaces de Internet

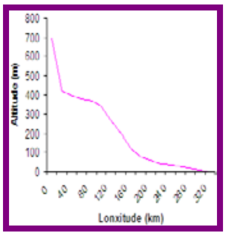
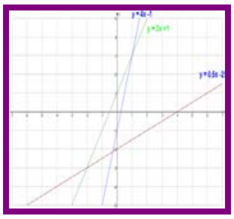
En estos enlaces puede encontrar trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- hhttp://www.vitutor.com
- http://www.apuntes mareaverde.org.es
- http://www.recursos.cnice.mec.es/descartes
- https://es.wikipedia.org/
- http://aulamatematica.com/
- http://www.recursos.cnice.mec.es

# 7. Anexo. Licencia de recursos

### Licencias de recursos utilizados en la unidad didáctica

- Las figuras geométricas utilizadas en esta unidad están todas recogidas del material de educación secundaria para personas adultas: *Ámbito científico-tecnolóxico. Módulo 2. Unidade didáctica 8*, Consellería de Educación e Ordenación Universitaria.

| RECURSO (1) | DATOS DEL RECURSO (1) | RECURSO (2) | DATOS DEL RECURSO (2) |
|---|---|---|---|
| <br>RECURSO 1 | ▪ Autoría: Consellería de Educación, Xunta de Galicia<br>▪ Licencia: Uso educativo.<br>▪ Procedencia: Ámbito científico-tecnolóxico. Módulo 2. Unidade didáctica 8. | <br>RECURSO 2 | ▪ Autoría: Consellería de Educación, Xunta de Galicia.<br>▪ Licencia: Uso educativo.<br>▪ Procedencia: Ámbito científico-tecnolóxico. Módulo 2. Unidade didáctica 8. |