Resolución examen B 1º Bachiller

pr. 1 Sea $f(x) = a + \dfrac{b}{x+c}$ a, b, c números reales

1.1 <u>$y=2$ es asíntota horizontal de $y=f(x)$ en la parte negativa</u>

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[a + \frac{b}{x+c} \right] = 2$$

$$a = 2$$

1.2 <u>$x=1$ es asíntota vertical de $y=f(x)$</u>

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 1} \left[a + \frac{b}{x+c} \right] = \pm\infty$$

$$a + \frac{b}{1+c} = \pm\infty \quad \text{(a nivel simbológico)}$$

$$\frac{b}{1+c} = \pm\infty \longrightarrow c = -1$$

1.3 <u>$P(6,3)$ pertenece a la gráfica de $y=f(x)$</u>

$$f(x) = 2 + \frac{b}{x-1}$$

$P(6,3)$ pertenece a la gráfica de $y=f(x)$ $\longrightarrow$ $f(6) = 3$

p.2 En el intervalo $(-\infty, 2]$ es una función lineal, su expresión es de la forma

$$y = ax + b$$

pasa por el punto $A(0,0) \longrightarrow y(0) = 0 \longrightarrow b = 0$

pasa por el punto $B(2,-2) \longrightarrow y(2) = -2 \longrightarrow 2a + b = -2$

$a = -1$

$$y = -x$$

En el intervalo $(2,7)$ es otra función lineal, su expresión es de la forma

$$y = px + r$$

pasa por el punto $C(2,2) \longrightarrow y(2) = 2 \longrightarrow 2p + r = 2$

pasa por el punto $D(7,4) \longrightarrow y(7) = 4 \longrightarrow 7p + r = 4$

$5p = 2$

$p = 2/5$

$\frac{4}{5} + r = 2$

$r = \frac{6}{5}$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$$

En el intervalo $[7, \infty)$ es otra función lineal, su expresión es de la forma

$$y = mx + n$$

pasa por el punto $E(7,4) \longrightarrow y(7) = 4 \longrightarrow 7m + n = 4$

pasa por el punto $F(12,0) \longrightarrow y(12) = 0 \longrightarrow 12m + n = 0$

$5m = -4$

$m = \frac{-4}{5}$

Resolución examen B 1º Bachiller

$$-\frac{28}{5} + n = 4 \quad \text{———} \quad n = \frac{48}{5}$$

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{48}{5}$$

La función a trozos tiene por expresión analítica

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2}{5}x + \frac{6}{5} & \text{si } 2 < x \leq 7 \\ -\frac{4}{5}x + \frac{48}{5} & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

1.2

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (-x) = -2 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}\right) = 2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \text{no existe } \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$\lim_{x \to 7} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7} \left(\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}\right) = 4 \\ \lim_{x \to 7^+} f(x) = \lim_{x \to 7} \left(-\frac{4}{5}x + \frac{48}{5}\right) = 4 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \lim_{x \to 7} f(x) = 4$$

Resolución examen B 1º Bachiller

nº3 Se dice que f y g son funciones inversas si

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ g)(x) = x$$

Calcula la función inversa de $f(x) = \ln(3x+1)$

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} y = \ln(3x+1) \xrightarrow{\quad g \quad} x \text{ (en función de } y)$$

$$y = \ln(3x+1)$$

$$e^{y} = 3x+1$$

$$e^{y} - 1 = 3x$$

$$x = \frac{e^{y}-1}{3} \text{, esto es}$$

$$g(y) = \frac{e^{y}-1}{3}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left[\ln(3x+1)\right] = \frac{e^{\ln(3x+1)} - 1}{3} = \frac{3x+1-1}{3} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f\left[\frac{e^{x}-1}{3}\right] = \ln\left(3 \cdot \frac{e^{x}-1}{3} + 1\right) = \ln\left(e^{x}\right) = x$$

dominio de $f(x) = \ln(3x+1)$

$x \in D_1$ si y sólo si: $3x+1>0 \longrightarrow 3x>-1 \longrightarrow x > \frac{-1}{3}$

dominio de $g(x) = \frac{e^x-1}{3}$

$D_2 = \mathbb{R}$

dominio de $(f\circ g)$

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$x \in$ dominio de $f\circ g$ si: $x \in D_2$ y además $g(x) \in D_1$. En nuestro caso $x\in$ dominio de $f\circ g$ si: $g(x) > \frac{-1}{3}$, es decir:

$$\frac{e^x-1}{3} > \frac{-1}{3}$$

$$e^x - 1 > -1$$

$e^x > 0$ que se cumple siempre

dominio de $f\circ g = \mathbb{R}$

Resolución examen B 1º Bachiller

p.4. Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ indicando la posición de $y=f(x)$ respecto de ellas. Representa razonadamente la función $y=f(x)$

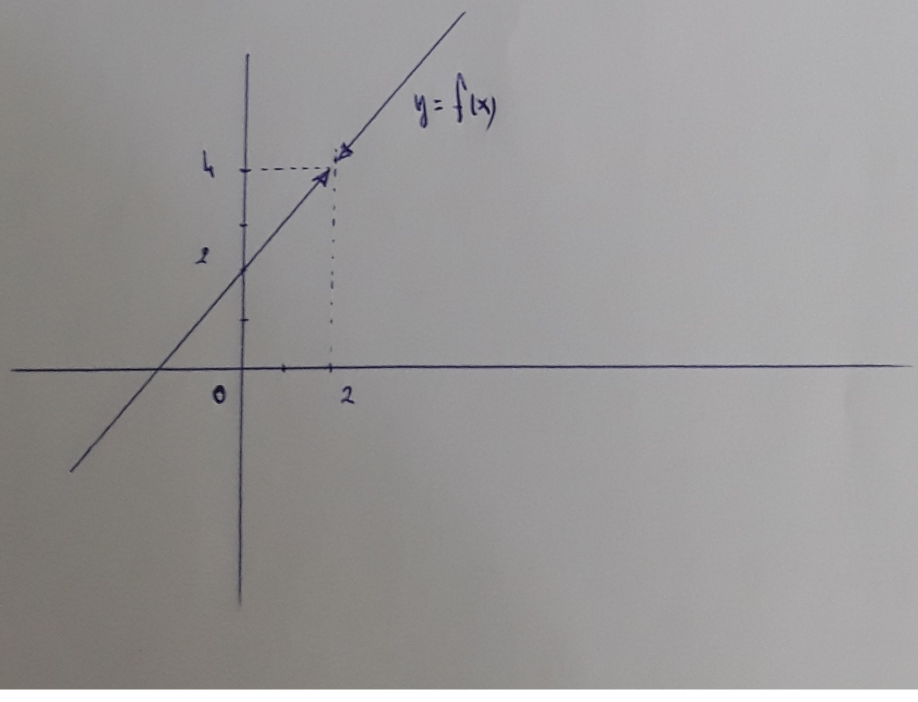
4.1

Aunque parece lo contrario, la recta $x=2$ no es asíntota vertical de la función porque

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ IND} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Comentario

La función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ coincide con la función $g(x) = x+2$ excepto para $x=2$. (no existe $f(2)$ y $g(2)=4$



Resolució examen B . 1r Bachillerato

4.2 Asímptotes Horizontals

No posee asíntotas horizontals porque

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x-2} \text{ IND } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-4/x}{1-2/x} = \begin{cases} \infty & \text{si } x\to\infty \\ -\infty & \text{si } x\to-\infty \end{cases}$$

4.3 Asímptotes Oblicuas

$$y = mx+b$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-2x} \text{ IND } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-4/x^2}{1-2/x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-4}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-4/x}{1-2/x} = 2$$

$y = x+2$ és asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$\text{signo}\left[f(x)-(mx+b)\right] = \text{signo}\left[\frac{x^2-4}{x-2} - (x+2)\right] = \text{signo} \frac{x^2-4-(x+2)(x-2)}{x-2}$$

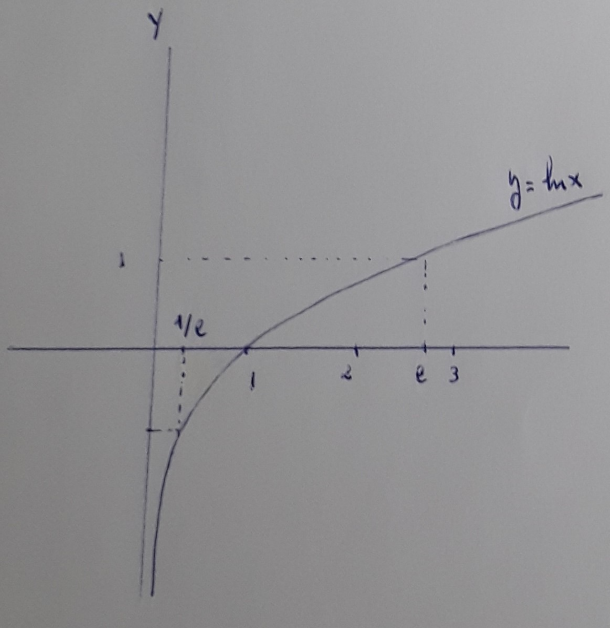
$= \text{signo de } 0$ interpreta este resultado

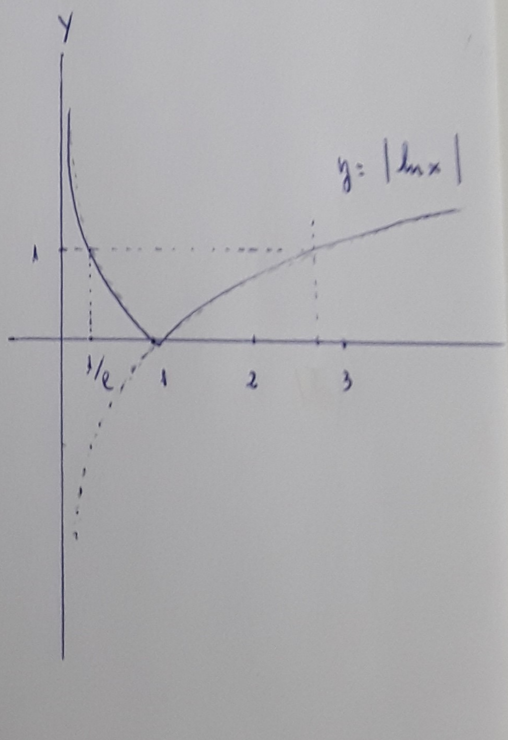
Resolución examen B. 1º Bachillerato

nº 5

5.1 <u>Define y representa</u> $f(x) = |\ln x|$

$$f(x) = |\ln x| = \begin{cases} \ln x & \text{si } \ln x \geq 0 \\ -\ln x & \text{si } \ln x \leq 0 \end{cases}$$

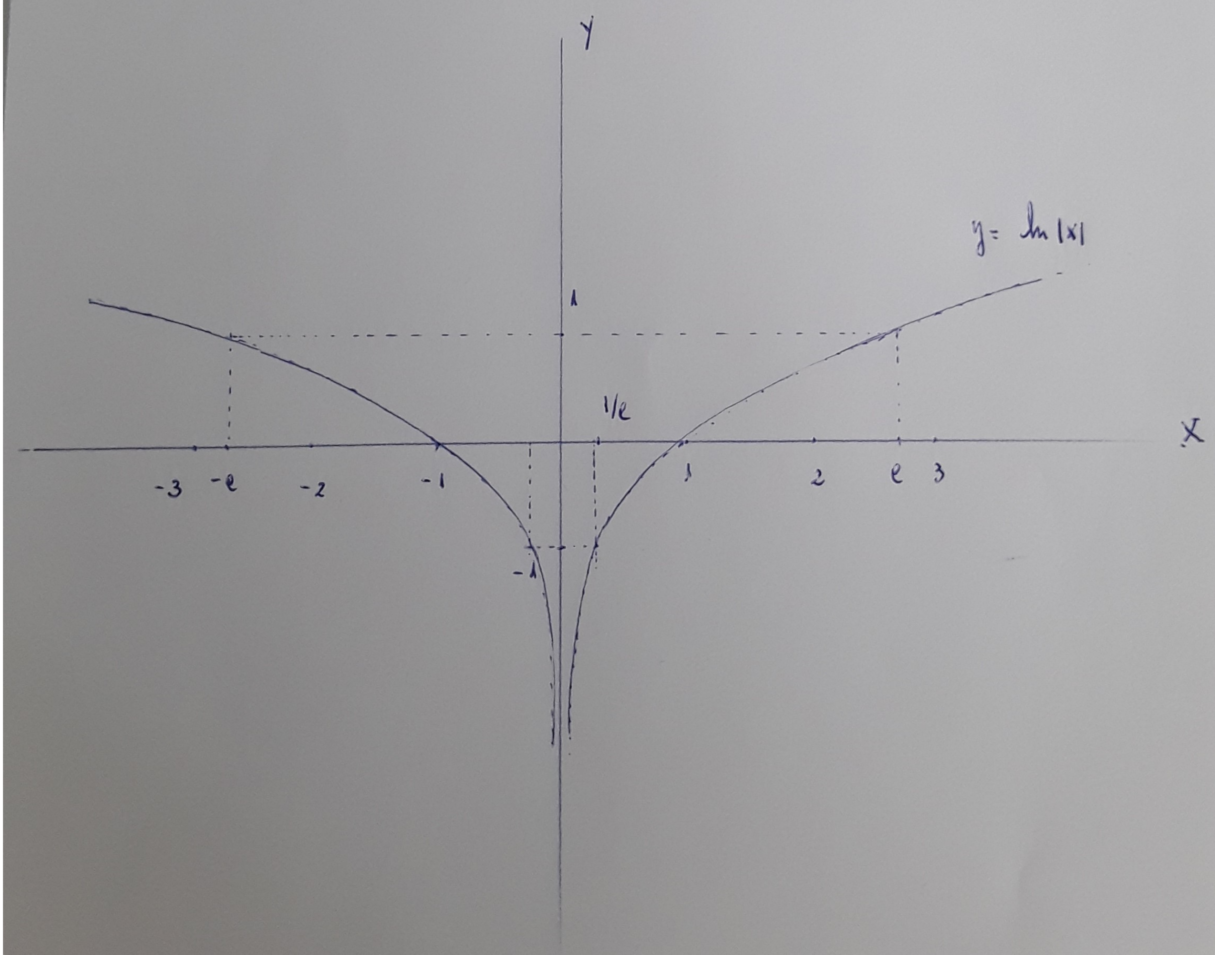




Resolució, examen B 1r Bachillerato

5.2 Define y representa $f(x) = \ln|x|$

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Resolución examen B 1º Bachillerato

nº 6

$$f(x) = \frac{x+3}{|x|-3} \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-3} & \text{si } x \geq 0 \\ \\ \dfrac{x+3}{-x-3} = -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{x-3} \text{ IND} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1+3/x}{1-3/x} = 1$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{0} = \pm\infty$$

$$\text{signo}_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x-3} = \frac{+}{+} = + \longrightarrow \lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty$$

$$\text{signo}_{x \to 3^-} \frac{x+3}{x-3} = \frac{+}{-} = - \longrightarrow \lim_{x \to 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty$$

no existe $\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x-3}$

Resolució, examen B 1r Batxillerat

n: 7 $\qquad f(x) = 3x^2 - 2x$

Calcula:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 - 2x - 8 & x-2 \\ \hline 0 & 3x+4 \end{array}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (3x+4) = 10$$