

3 ECUACIONES

3.1 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

LEMBRA

- Son da forma: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$
- Ecuaciones completas ($b \neq 0$ y $c \neq 0$): Resólvense aplicando a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Ecuaciones incompletas:

$$\text{Se } b = 0 \rightarrow ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$\text{Se } c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{-b}{a}$$

EXERCICIO RESOLTO

Resolver: a) $x^2 + 9x + 8 = 0$

b) $3x^2 - 48 = 0$

c) $2x^2 - 5x = 0$

a) $a = 1, b = 9, c = 8$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-9 \pm 7}{2} \begin{cases} x = -1 \\ x = -8 \end{cases}$$

b) $3x^2 - 48 = 0 \rightarrow 3x^2 = 48 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm \sqrt{16} \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$

c) $2x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(2x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} \end{cases}$

1 Resolve as seguintes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$

b) $4x^2 - 9 = 0$

c) $6x^2 + 2x = 0$

d) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

e) $x^2 + 25 = 0$

f) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

2 Resolve as seguintes ecuacións e comproba as solucións:

a) $\frac{x^2}{3} - 2 = 3x + \frac{x^2 - 12}{6}$

b) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} = 1 - \frac{x + 7}{12}$

c) $\frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$

d) $x(x - 3) + (x + 4)(x - 4) = 2 - 3x$

e) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$

f) $(2x + 1)^2 = 1 + (x + 1)(x - 1)$

g) $3x(x + 4) - x(x - 1) = 15$

h) $\frac{x}{3}(x - 1) - \frac{x}{4}(x + 1) + \frac{3x + 4}{12} = 0$

3 Resolve estas ecuacións

a) $x + 2 + 3x^2 = \frac{5x^2 + 6x}{2}$

b) $(x + 2)^2 - 3 = 4x$

c) $(x - 3)(2x - 5) + (x - 1)(x - 3) - 18 = 0$

d) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

e) $2x + 3(x - 4)^2 = 37 + (x - 3)(x + 3)$

f) $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x = 0$

g) $3x(2x + 3) + x(x - 4) + 2 = 2x(3x + 1)$

h) $\frac{(x - 1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x + 1}{5} = 0$

4 Acha o valor que debe ter c para que a ecuación $2x^2 + 12x + c = 0$ teña solución única.

5 Escribe a condición que deben cumprir a , b e c para que a ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ teña:

a) Só unha solución.

b) Dúas solucións.

c) Ningunha solución.

3.2 ECUACIONES BICADRADAS

LEMBRA

- Son da forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a \neq 0$
- Para resolverlas, podemos hacer un cambio de variable chamando $x^2 = z$.

Así, obtemos

$$az^2 + bz + c = 0, \text{ que é unha ecuación de segundo grao.}$$

- Resolvemos a ecuación, obtendo o valor (ou valores) de z , e desfacemos o cambio de variable:

$$x = \pm \sqrt{z}$$

EXERCICIO RESOLTO

Resolver: a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ c) $x^4 - 25x^2 = 0$

$$\text{a) } x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{x^2 = z} z^2 - 13z + 36 = 0$$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} z = 4 \\ z = 9 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm \sqrt{4} \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \\ z = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{9} \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \end{array} \right\} \text{Ten 4 solucións.}$$

$$\text{b) } x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2 = z} z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} z = -4 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} z = -4 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow \text{Non dá solución para } x. \\ z = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{1} \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \text{Ten 2 solucións.}$$

$$\text{c) } x^4 - 25x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 25) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 25 = 0 \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \text{Ten 3 solucións.}$$

1 Resolve

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + x^2 + 2 = 0$

c) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$

d) $x^4 - 1 = 0$

2 Resolve estas ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 = 0$

d) $x^4 + 1 = 0$

e) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

f) $x^4 + x^2 = 0$

g) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$

h) $x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$

i) $x^2(x^2 - 17) + 16 = 0$

k) $x^4 + 100 = 29x^2$

l) $x^4 - \frac{13}{36}x^2 + \frac{1}{36} = 0$

m) $(2x^2 + 1)(x^2 - 3) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) - 8$

n) $\frac{1}{4}(3x^2 - 1)(x^2 + 3) - \frac{1}{3}(2x^2 + 1)(x^2 - 3) = 4x^2$

3.3 ECUACIONES FACTORIZADAS

LEMBRA

As ecuacións do tipo $(x - a) \cdot (x - b) \dots (x - k) = 0$ resólvense igualando a cero cada factor, porque un produto é igual a 0 se o é algún dos seus factores.

EXERCICIO RESOLTO

Resolver a ecuación $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = 0$.

Buscamos dúas raíces enteiras entre os divisores de 18.
Así chegamos a un polinomio de segundo grao, $x^2 - 9$.

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = (x + 1)(x + 2)(x^2 - 9) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \end{array} \right\} \text{Estas son as solucións da ecuación.}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -7 & -27 & -18 \\ -1 & & -1 & -2 & 9 & 18 \\ \hline & 1 & 2 & -9 & -18 & 0 \\ -2 & & -2 & 0 & 18 & \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 & \end{array}$$

1 Resolve as seguintes ecuacións:

a) $(x - 3)(x - 25)(x + 1) = 0$

b) $x(x + 4)(x - 2) = 0$

c) $(2x - 11)(6x - 15)^2 = 0$

$$2x - 11 = 0 \rightarrow x = \dots$$

$$(6x - 15)^2 = 0 \rightarrow 6x - 15 = 0 \rightarrow x = \dots$$

d) $x(x^2 - 4)(3x + 18) = 0$

$$x = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$$

$$3x + 18 = 0 \rightarrow x = \dots$$

e) $x^2(x + 2)(x^2 - 1) = 0$

f) $(x + 2)(x^2 + 1) = 0$

g) $(x + 3)^2(x^2 + 2) = 0$

h) $(-x - 1)^2(x^2 - 5) = 0$

2 Descompón en factores e resolve as seguintes ecuacións:

a) $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$

b) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

c) $5x^3 - 20x^2 - 20x + 80 = 0$

d) $x^3 - 13x + 12 = 0$

e) $6x^3 - 15x^2 + 12x - 3 = 0$

f) $x^3 + x - 2 = 0$

g) $x^3 - 9x = 0$

h) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

i) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

k) $(x^2 + x)(4x^2 - 1) = 0$

3 Escribe, en cada caso, unha ecuación que teña a solucións que se indican:

a) $3 e - 1$

b) $0, 2 e - 2$

c) $0, 1 e 17$

4 Escribe dúas ecuacións de grao 3 que só teñan como solución $x = 2$.

3.4 ECUACIONES CO x NO DENOMINADOR

LEMBRA

Para resolver unha ecuación deste tipo, reducimos as fraccións a común denominador, achando o mín.c.m. dos denominadores. Cando teñamos o mesmo denominador nos dous membros da ecuación, igualamos os numeradores. Neste proceso, poden aparecer solucións falsas; por iso **é necesario comprobar todas as solucións obtidas**, substituíndoas na ecuación inicial.

EXERCICIO RESOLTO

Resolver a ecuación $\frac{x-3}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{2-3x}{x^2-1}$.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - x = x(x-1) \\ x^2 + x = x(x+1) \\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mín.c.m.} = x(x-1)(x+1). \text{ Para reducir as fraccións a denominador} \\ \text{común, dividimos o mín.c.m. entre cada denominador e o resultado} \\ \text{multiplicámolo polo numerador.} \end{array}$$

$$\frac{(x-3)(x+1) - (x+3)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(2-3x)x}{x(x-1)(x+1)} \rightarrow -4x = 2x - 3x^2$$

$$3x^2 - 6x = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Esta solución non é válida, porque anula os denominadores do} \\ \text{primeiro membro e non se pode dividir por 0.} \\ x = 2 \rightarrow \frac{2-3}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{Esta si que é válida.} \end{cases}$$

A solución é $x = 2$.

1 Resolve as seguintes ecuacións

a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3x^2-13}{x^2-x} = 3 + \frac{x-3}{x}$

b) $\frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x^2} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{x+2} + \frac{3x}{x-2} + \frac{8-3x^2}{x^2-4} = 0$

d) $\frac{15}{x} - 2 = \frac{72-6x}{2x^2}$

e) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x+6}{2}$

f) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

2 Resolve as ecuaciones siguientes:

a) $\frac{1}{8} - \frac{1}{x^2+4} = \frac{2-x}{2x^2+8}$

b) $\frac{3x+1}{x-2} + 4 = \frac{x}{x+2} + \frac{x^2}{x^2-4}$

c) $\frac{10}{3} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{x+5}{x-5}$

d) $\frac{3x}{x^2-9} = 1 + \frac{x}{2(x-3)}$

e) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{2-x}{x} = 3$

f) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{8}{3}$

g) $\frac{x}{2x-1} + \frac{2(x^2-1)}{2x^2-x} = 1 + \frac{2}{x}$

h) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{4}$

3 Comprueba que estas dúas ecuaciones non teñen solución:

a) $\frac{x}{x-3} - \frac{2x+1}{x^2-9} = \frac{1}{x+3}$

b) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{2x+2} = \frac{x-1}{4x+4}$

4 Comprueba que calquera número distinto de 2 é solución desta ecuación:

$$\frac{2x}{3x-6} - \frac{x}{2x-4} = 1 - \frac{5x-12}{6x-12}$$

Transforma a ecuación ata que chegues a $0x=0$, que se verifica para calquera valor de x .

Por que ten que ser x distinto de 2?