XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para personas adultas

Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 4

Unidad didáctica 3

Funciones

Índice

1. Introducción

1.1 Descripción

En esta unidad estudiaremos uno de los conceptos más importantes en las Matemáticas, el concepto de función. Ya conocemos el concepto por los módulos anteriores, sus características más destacables, sus gráficas etc.

En esta unidad estudiaremos de una manera más rigurosa los conceptos estudiados en los módulos anteriores y ampliaremos otros nuevos. Podemos distinguir dos bloques:

- Haremos un repaso del concepto de función y estudiaremos características destacables como el dominio, los puntos de corte con los ejes, el crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos. También veremos la continuidad y la periodicidad de las funciones.
- En un segundo bloque repasaremos algunas funciones ya estudiadas en los módulos anteriores como la función lineal y cuadrática. También ampliaremos conocimientos con las nociones básicas de las funciones de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica con sus aplicaciones en nuestra vida cotidiana.

1.2 Conocimientos previos

Esta unidad se basa en los conocimientos previos adquiridos en los módulos anteriores, de los cuales se hará un pequeño recordatorio que nos ayudará a adquirir unos nuevos conocimientos. Sería muy útil repasar ciertos contenidos como:

- Concepto de función.
- Gráfica de una función.
- Características destacables de una función: dominio, corte con los ejes, crecimiento/decrecimiento, máximos/mínimos y continuidad.
- Resolver ecuaciones de primer y segundo grado.
- Función lineal y cuadrática de la unidad 3 de Matemáticas del módulo III.

1.3 Criterios de evaluación

- Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algébrica.

2. Secuencia de contenidos y actividades

2.1 Funciones y elementos característicos importantes

En este apartado repasaremos el concepto de función y los elementos característicos más destacables para su estudio.

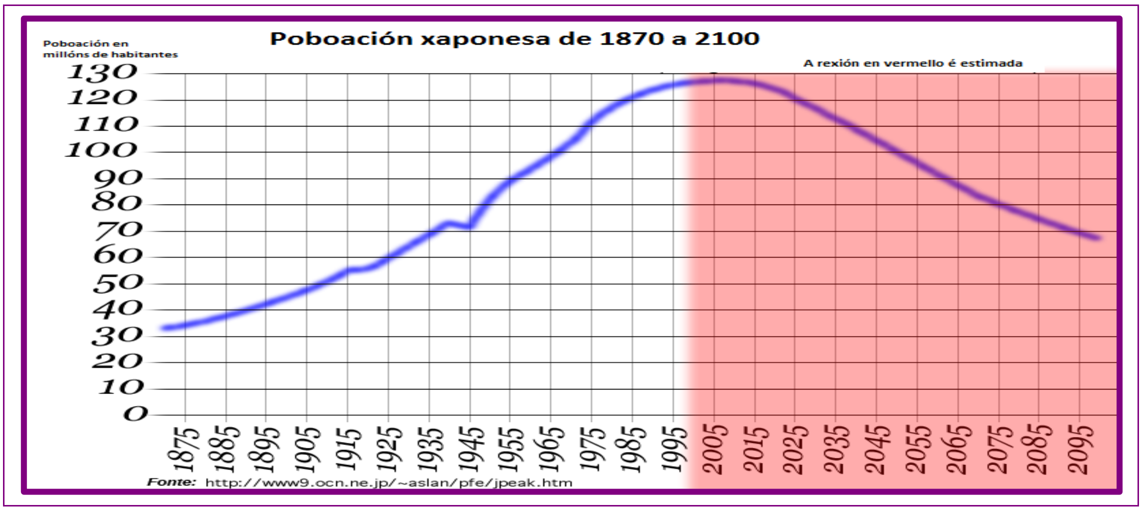
2.1.1 Concepto de función

Un función *f* es una relación entre dos variables numéricas, *x* e *y*, en la que a cada valor de *x* le corresponde como mucho un valor de *y*. A *x* le llamamos variable independiente y a *y* variable dependiente ya que depende del valor de *x*. Se escribe $y = f(x)$.

Las funciones pueden venir dadas de diferentes modos:

Mediante su gráfica

La gráfica siguiente muestra el desarrollo demográfico de Japón en un estudio publicado en el año 2000.



Se trata de una función porque a cada valor *x*, en este caso los años, le corresponde un único valor de y, en este caso los millones de habitantes.

Mediante un enunciado

Le pedimos un presupuesto a un carpintero para arreglar la madera del suelo del piso porque está algo viejo. El carpintero nos comenta que dejará la madera como nueva a razón de 10 €/m^2.

Con este enunciado podemos deducir que:

$$x \rightarrow Es\ el\ número\ de\ metros\ cuadrados\ de\ madera\ del\ piso$$
$$y \rightarrow Es\ la\ cantidad\ de\ €\ que\ cobrará\ por\ arreglar\ la\ madera\ del\ piso$$

Mediante una tabla de valores

La evolución del euríbor mensual del año 2016 es la siguiente:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
0,042	-0,008	-0,012	-0,010	-0,013	-0,028
Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
-0,056	-0,048	-0,057	-0,069	-0,074	-0,080

Mediante su expresión analítica

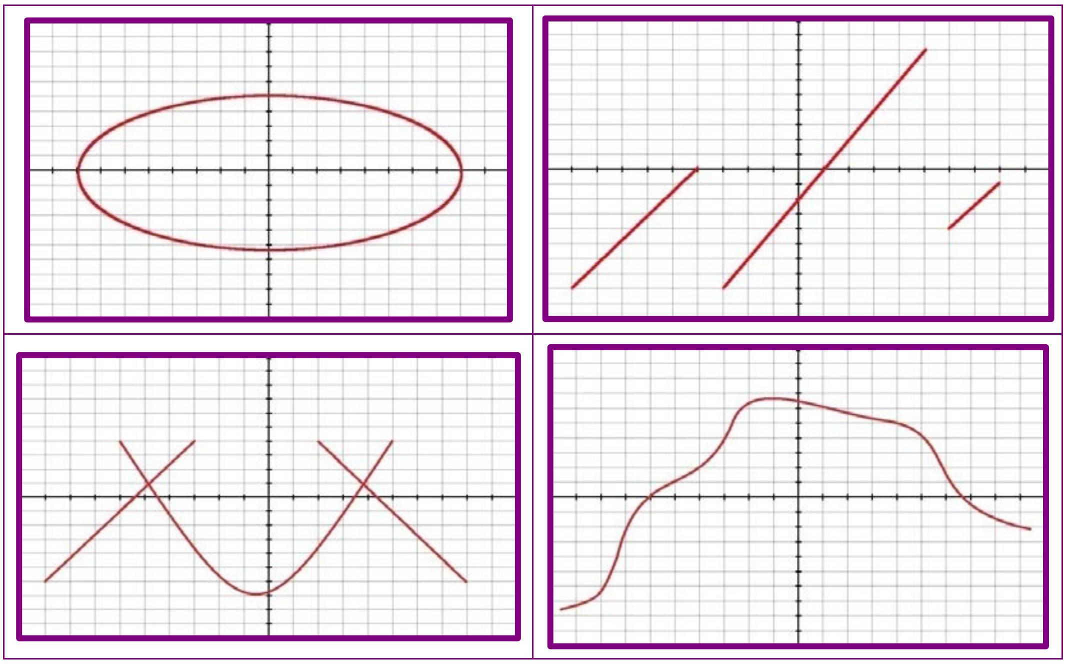
El área de una esfera en función de su radio es $A = 4\pi r^2$. De esta expresión podemos concluir que *r* es la variable independiente y *A* la variable dependiente. En concordancia con lo visto anteriormente la función sería $y = 4\pi x^2$.

Actividades propuestas

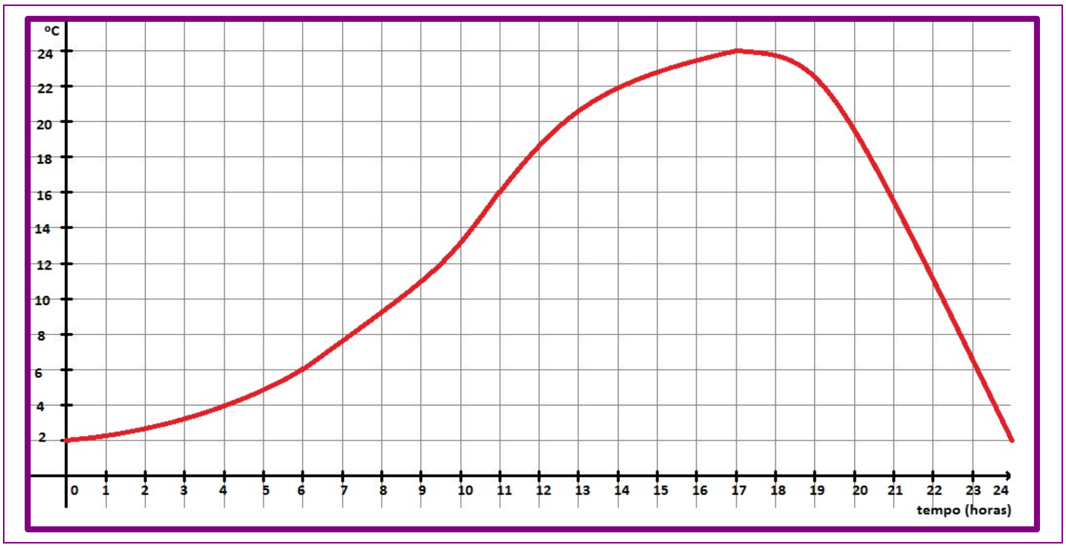
S1. Determine si los siguientes enunciados que relacionan magnitudes son o no funciones:

- El radio de una circunferencia y su longitud.
- El peso de una persona y su altura.
- El número de amigos y el número de regalos recibidos en un aniversario.
- El número de bollos de pan que compró y lo que pagó por ellos.

S2. Indique si las siguientes gráficas corresponden o no a una función:

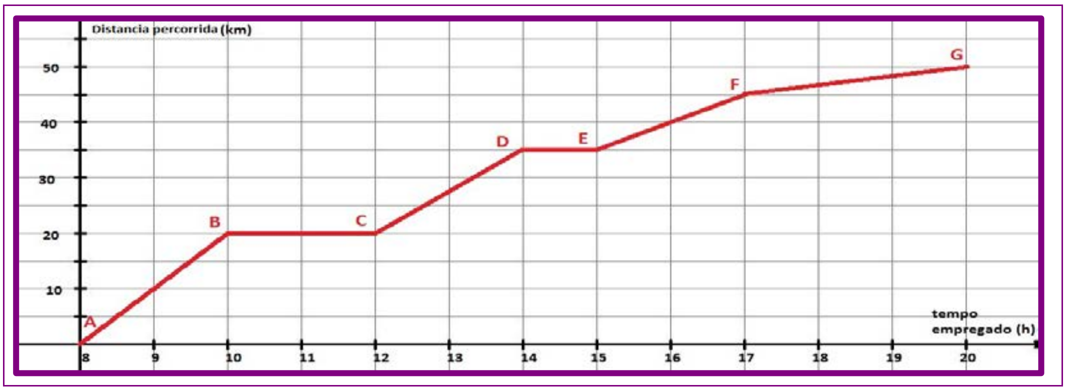


S3. La gráfica muestra la temperatura medida a lo largo de un día de otoño en Ourense.



- ¿Es la gráfica de una función? ¿Cuáles son las variables?
- ¿Alcanzaron temperaturas negativas ese día en la ciudad de Ourense?
- En esta época hay muchos resfriados porque hay mucha diferencia entre las temperaturas entre la noche y el día, ¿de qué diferencia térmica estamos hablando?
- ¿Cuál fue la temperatura máxima alcanzada en el día? ¿Y la mínima?

S4. La siguiente gráfica muestra el desarrollo del recorrido en una excursión que se hizo por la Serra do Courel.



- ¿Se trata de una función?
- ¿Cuáles son las variables? Indica cual es la independiente y la dependiente.
- ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
- ¿Cuántas veces pararon a descansar? ¿A qué horas?
- ¿Cuánto tiempo estuvieron en movimiento?
- ¿Cuántos km recorrieron?
- ¿Fueron más rápido en el tramo AB o en el EF?

S5. En una determinada tienda utilizan como producto en promoción un determinado envase de leche cuyo precio es 1 € cada unidad. No permiten vender por persona más de 9 envases. Entregan la siguiente tabla de valores:

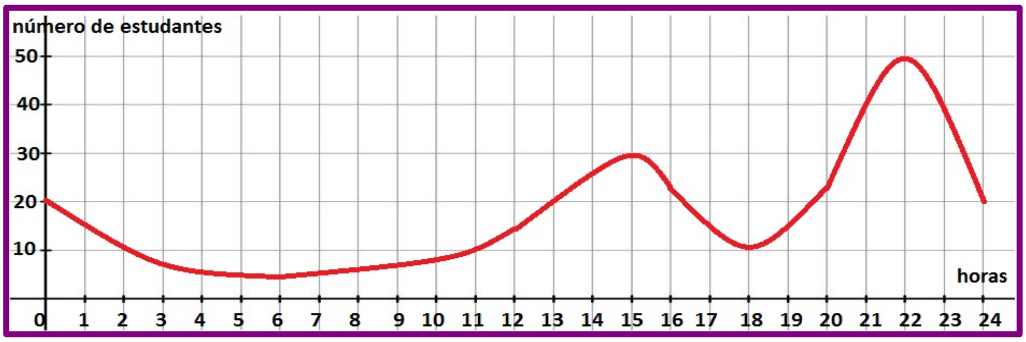
Número de unidades	1	2	3	4	5	6	7	8	9
€ que pagan	1	2	2	3	4	4	5	6	6

- ¿Se trata de una función?
- ¿Cuáles son las variables?
- Dibuje la gráfica con estos datos.
- ¿Tiene sentido en la gráfica dibujar las líneas que unen los puntos dibujados anteriormente?

S6. La siguiente función $f(x) = 55 - 0{,}05x$ expresa el peso de un ciclista a lo largo de una carrera contrarreloj de 40 Km, en la que *x* representa los km recorridos. Responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto pesa el ciclista antes de la carrera? ¿Y al acabar la carrera?
- En la mitad de la carrera, ¿cuánto pesa?
- Dibuje la gráfica de la función.

S7. Esta gráfica representa el número de estudiantes que ve la televisión a lo largo de un día en una pequeña residencia de universitarios y universitarias cuyo número de plazas es de 50 y están todas cubiertas.



- ¿Cuántos estudiantes están viendo la televisión a las 12 de la noche?
- ¿Cuáles son las horas donde se alcanza el máximo número de estudiantes viendo la televisión?
- ¿A qué cree que se puede deber que presente dos montañas?
- ¿Hay algún momento del día donde estén todos los estudiantes viendo la televisión?

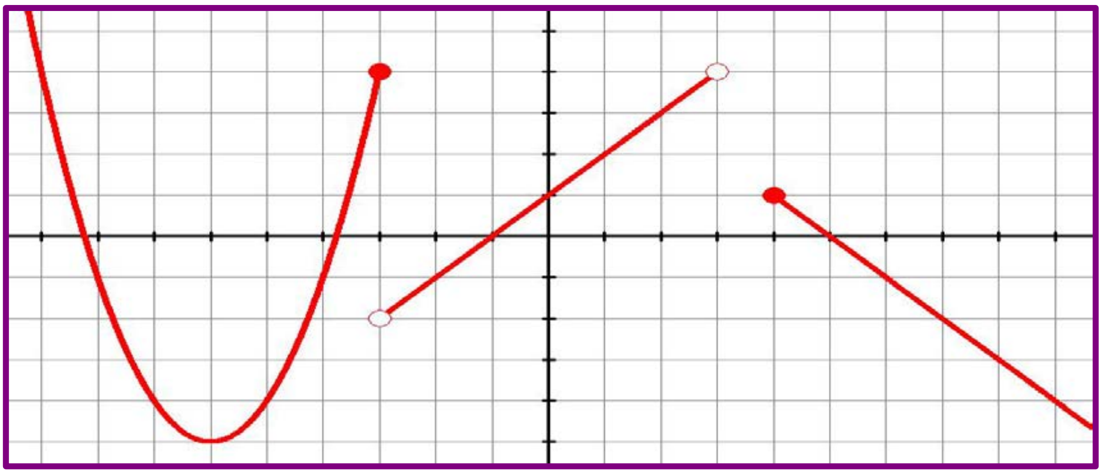
S8. Sacamos del congelador un trozo de carne y lo dejamos sobre la mesa de la cocina. La siguiente gráfica muestra la variación de la temperatura del trozo de carne hasta que se descongela completamente.

– ¿A qué temperatura estaba la carne dentro del congelador?
– ¿Después de una hora seguía congelada?
– ¿Qué temperatura tenía la carne después de 4 horas?
– ¿A qué temperatura estaba la cocina?

2.1.2 Dominio de definición de una función

Definimos **dominio de una función** $f(x)$, y se expresa $Domf(x)$, como el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente *x* para los que la función nos proporciona sus correspondientes valores *y*.

En la gráfica de una función, su dominio es fácil de visualizar, basta ver los valores de x que se pueden representar. Fijémonos en la siguiente gráfica:



El $Domf(x) = (-\infty, 3) \cup [4, +\infty)$. Para el valor $x = -3$ la función proporciona el valor $y = 4$.

Cuando la función viene expresada mediante su expresión analítica, su dominio puede quedar restringido si alguna operación no se puede hacer, por ejemplo:

- *Funciones con denominadores*

  Fijémonos en la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Su dominio es $Domf(x) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ puesto que el valor $x = 1$ anula el denominador y la función no proporcionaría valor y.

- *Función con raíces de índice par*

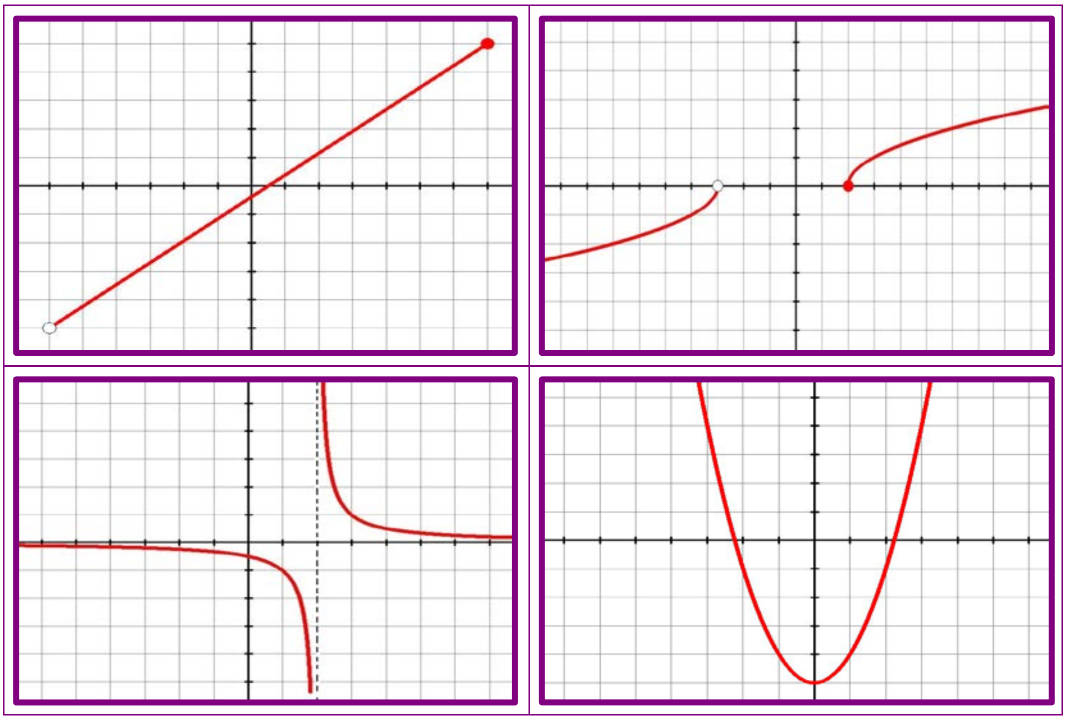
  Fijémonos en la función $f(x) = \sqrt{x-1}$. Su dominio es $Domf(x) = [1, +\infty)$ puesto que para valores inferiores a 1 la raíz no se podría hacer y por tanto la función no proporcionaría valores y.

- *Dependiendo del contexto en el que tenga sentido la función*

  La función $f(x) = 2\pi x$, que expresa la longitud de la circunferencia y *x* es la longitud del radio, solo tiene sentido para valores positivos de *x* puesto que no existen circunferencias de radio negativo.

Actividades propuestas

S9. Calcule el domino de las siguientes funciones:



S10. Calcule el domino de las siguientes funciones expresadas mediante sus expresiones analíticas.

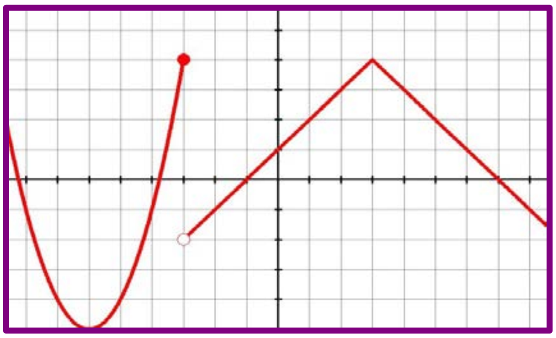
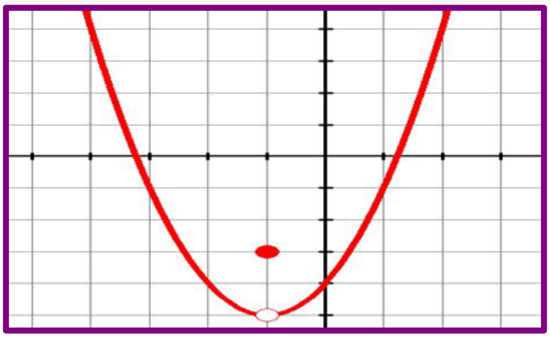
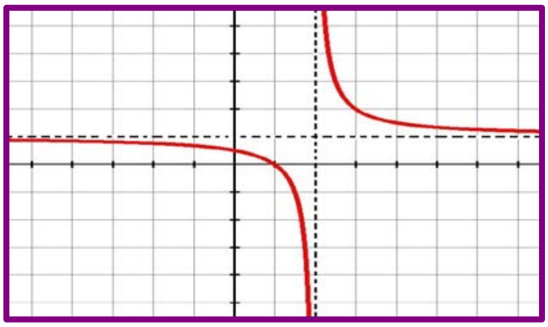
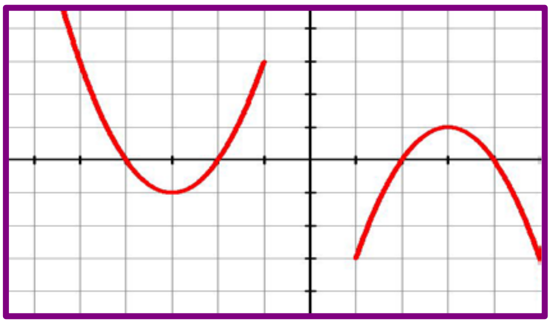
$y = \frac{x-1}{x^2-4}$	$y = \sqrt{x+2}$	$y = \frac{1}{x-2}$
$y = \sqrt[4]{x+4}$	$y = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$	$y = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$

S11. Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

- La función que representa el consumo eléctrico en un día.
- La función que representa el área de una esfera en función de su radio.
- La función que representa el número de calorías diarias consumidas durante un mes de 30 días.

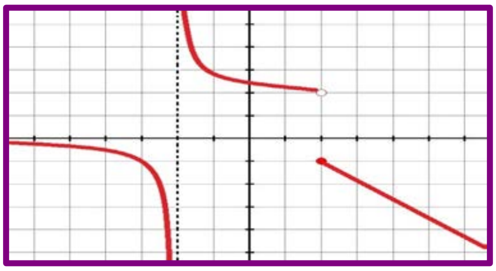
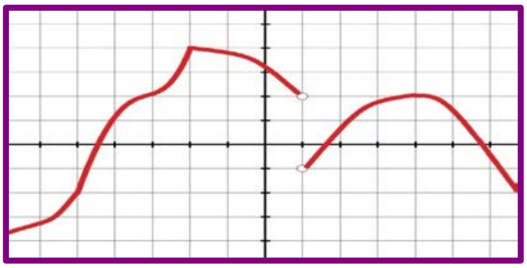
2.1.3 Continuidad de una función

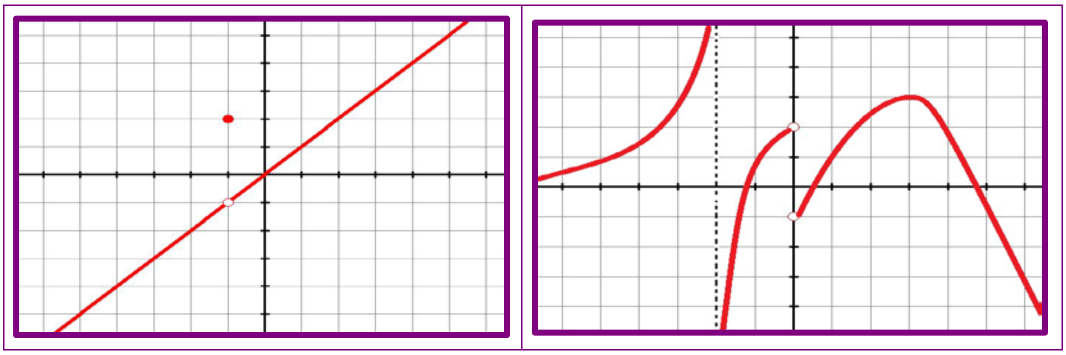
Una función es continua cuando su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. A las funciones cuyas gráficas presentan varios trazos les llamamos discontinuas. Podemos encontrar diversos tipos de discontinuidades, observe las siguientes gráficas:

	
Existe una discontinuidad en x=-3.	Existe una discontinuidad en x=-1.
	
Existe una discontinuidad en x=2 puesto que no existe ni función.	Donde no hay función no tiene sentido ver si la función es discontinua.

Actividad propuesta

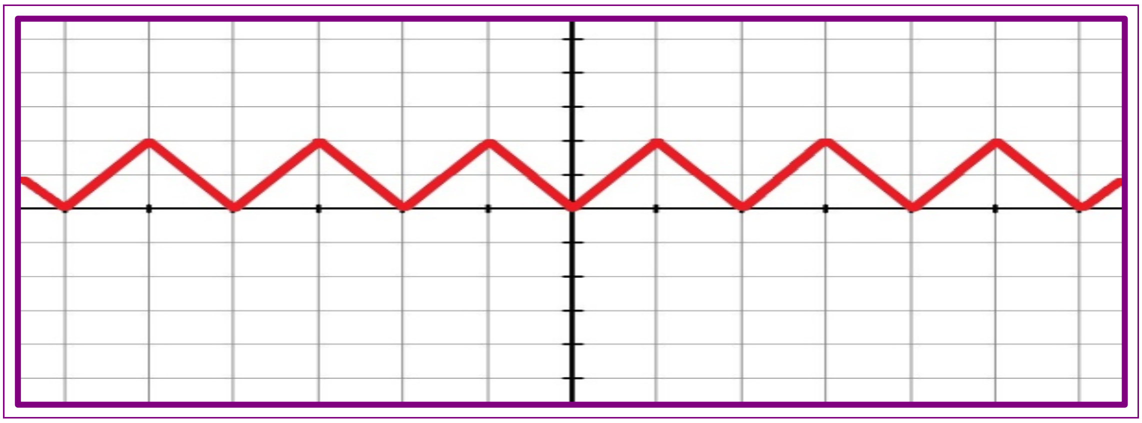
S12. Indique cuales son los puntos de discontinuidad de las funciones cuyas gráficas son las siguientes:



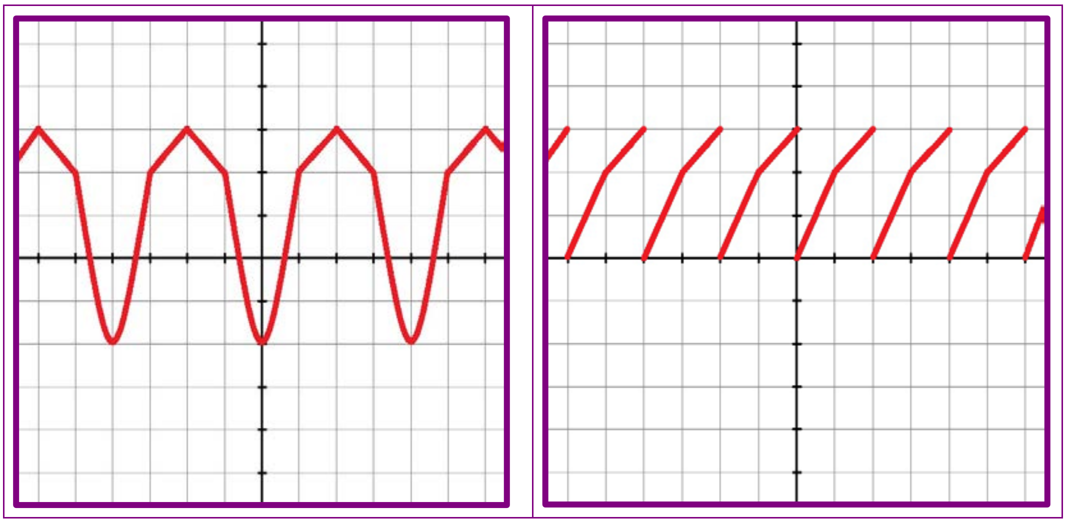
2.1.4 Periodicidad

Una función es periódica cuando su gráfica se repite cada cierto intervalo, a este se le llama período. Por ejemplo, la función cuya gráfica es la siguiente es periódica con período 2.



Actividad propuesta

S13. Indique si las siguientes gráficas son o no periódicas y el período en caso de que lo sean.



2.1.5 Puntos de corte con los ejes

- Los puntos de corte con el eje X son los que se obtienen de resolver la ecuación $f(x) = 0$, son de la forma $(x, 0)$. Pueden existir o no estos puntos de corte y la cantidad de ellos puede variar entre ninguno e infinitos dependiendo de la función.
- Los puntos de corte con el eje Y son lo que se obtiene de calcular $f(0)$. Es de la forma $(0, y)$. Evidentemente solo puede existir uno de ellos para que estemos hablando de una función.

Actividad resuelta

Dada la función $f(x) = x^2 - x - 6$, calcule los puntos de corte con los ejes:

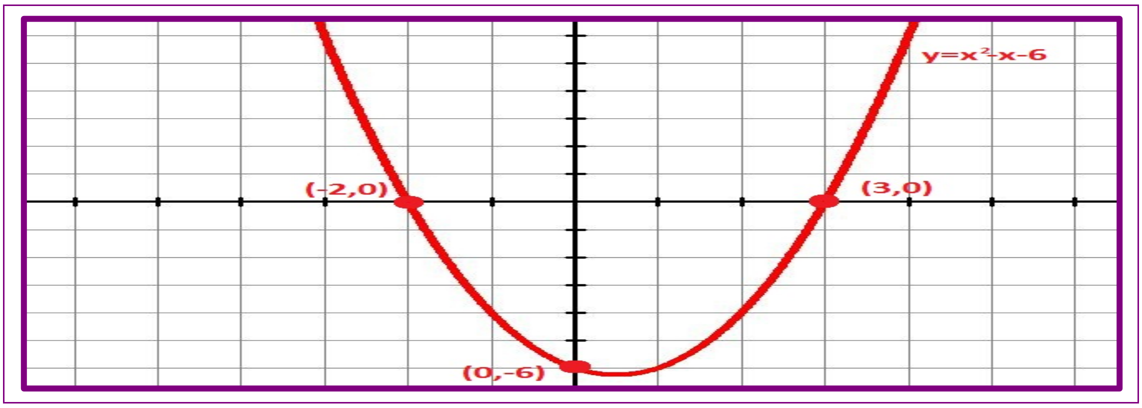
- Eje X

Calculemos $f(x) = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = -2 \; e \; x = 3$. Por lo tanto los puntos de corte con el eje X son $(-2,0)$ e $(3,0)$.

- Eje Y

Calculemos $f(0)$. Si hacemos la sustitución, obtenemos que $f(0) = -6$ y por lo tanto el punto de corte con el eje Y es $(0, -6)$.

Si observamos la gráfica de la función podemos ver cuales son los puntos de corte con los respectivos ejes.



Actividad propuesta

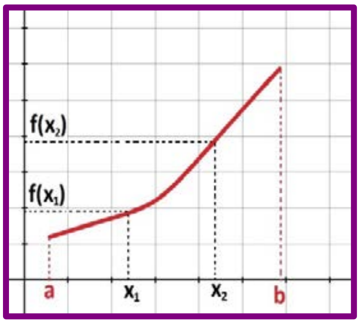
S14. Calcule los puntos de corte con los dos ejes de las siguientes funciones:

$y = 2x^2 - 3x - 2$	$y = x + 3$
$y = 6 - 3x$	$y = x^2 - 4x + 3$

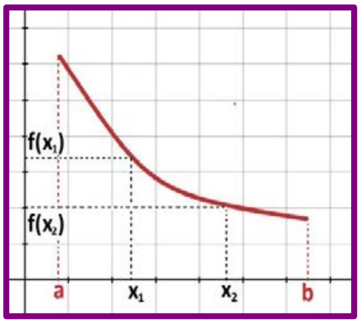
2.1.6 Crecimiento y decrecimiento

Dada una función $f(x)$, definida en un intervalo (a, b). Si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo, que cumplan que $x_1 < x_2$ sucede que:

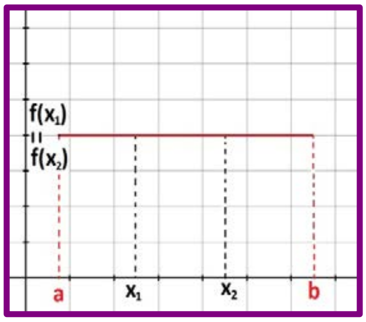
- $f(x_1) < f(x_2)$, entonces la función es creciente en el intervalo (a, b).
- $f(x_1) > f(x_2)$, entonces la función es decreciente en el intervalo (a, b).
- $f(x_1) = f(x_2)$, entonces la función es constante en el intervalo (a, b).



Función creciente



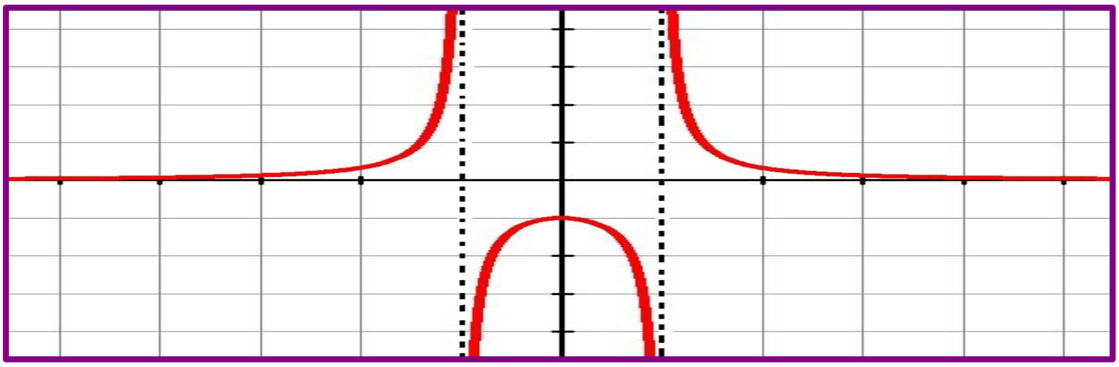
Función decreciente



Función constante

Actividad resuelta

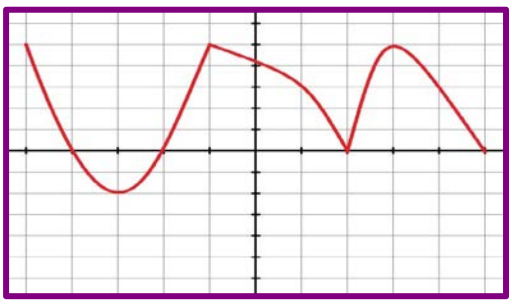
Estudie el crecimiento/decrecimiento de la siguiente función:

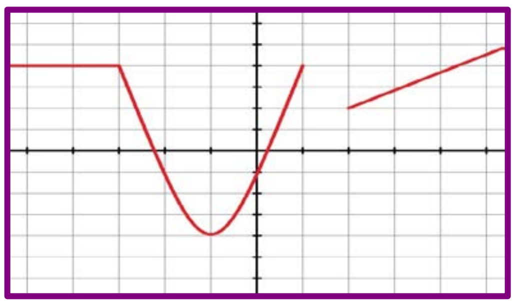


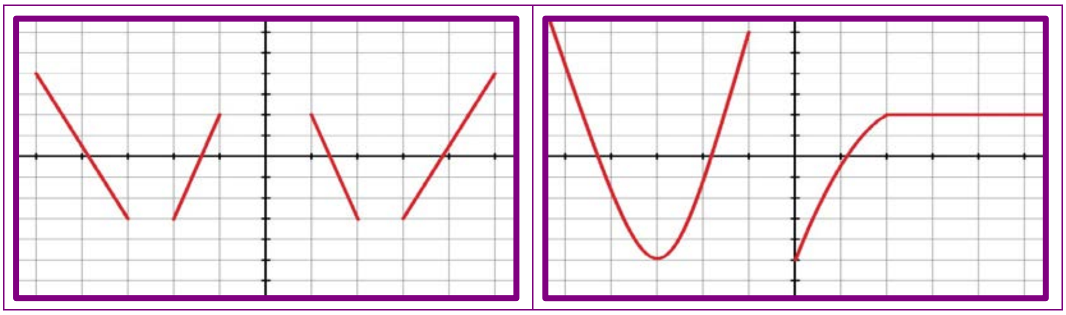
La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1,0)$ es decreciente en $(0,1) \cup (1, +\infty)$.

Actividad propuesta

S15. Encuentre los intervalos en los que las siguientes funciones son crecientes y de crecentes:







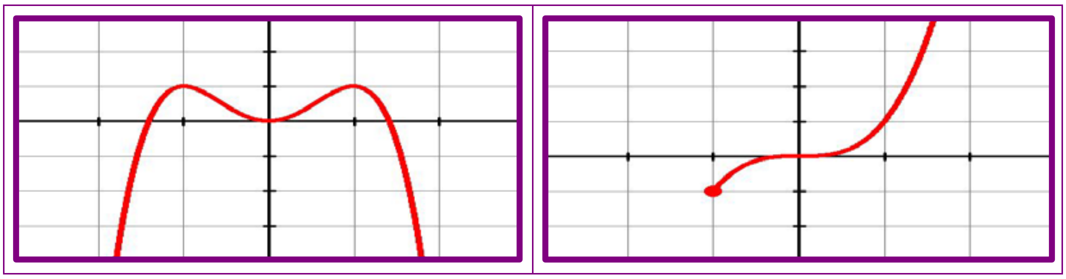
2.1.7 Máximos y mínimos

- Decimos que una función presenta un máximo relativo o máximo local en un punto, cuando el valor de la función en el dicho punto es mayor que cualquiera de los valores que están a su alrededor más cerca. Diremos que la función presenta un máximo absoluto cuando el valor de la función es mayor que todos los valores en todo su dominio.
- Decimos que una función presenta un mínimo relativo o máximo local en un punto, cuando el valor de la función en el dicho punto es menor que cualquiera de los valores que están a su alrededor más cerca. Diremos que la función presenta un mínimo absoluto cuando el valor de la función es mayor que todos los valores en todo su dominio.

Observemos la siguiente gráfica en la que podemos comprender de modo más visual lo que acabamos de ver.

Actividad propuesta

S16. Indique los máximos y mínimos relativos y absolutos en estas gráficas de funciones:



2.2 Funciones elementales y usos en nuestra vida cotidiana

2.2.1 Función lineal

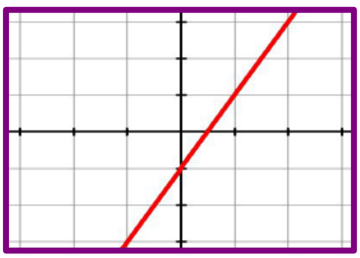
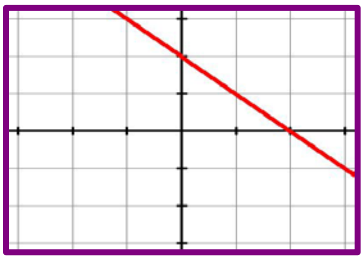
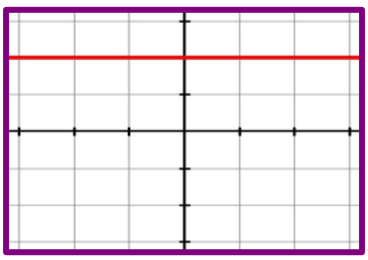
Una función lineal es aquella cuya representación gráfica es una línea recta. Su expresión analítica es del tipo $y = mx + n$, en la que *m* y *n* son números reales. El valor *m* recibe el nombre de pendiente de la recta.

- Cuando $m = 0$, la función lineal es constante $y = n$.
- Cuando $n = 0$, la función recibe el nombre de función de proporcionalidad directa $y = mx$.
- Cuando $m \neq 0$ puede suceder lo siguiente:
  - Si $m > 0$ la función es creciente.
  - Si $m < 0$ la función es decreciente.

Para representar una función lineal basta encontrar dos puntos de la línea recta, esto lo haremos mediante una tabla de valores en la que inventaremos dos de ellos para la variable *x* y calcularemos los valores de *y*.

Actividades resueltas

Encuentre las gráficas de las siguientes funciones:

<table>
<tr><td>$y = 2x - 1$</td><td>$y = -x + 2$</td><td>$y = 2$</td></tr>
<tr>
<td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>1</td><td>$y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$</td></tr><tr><td>2</td><td>$y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>$y = 0 + 2 = 2$</td></tr><tr><td>1</td><td>$y = -1 + 2 = 1$</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>$y = 2$</td></tr><tr><td>1</td><td>$y = 2$</td></tr></table></td>
</tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Una persona sale de su vivienda a una velocidad constante de 4 km/h. Calcule la expresión analítica y la gráfica de la función que represente la distancia a su vivienda a lo largo del tiempo.

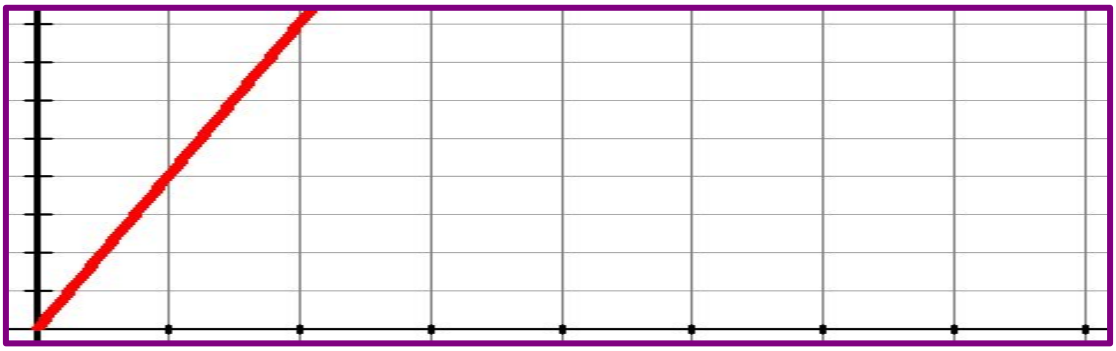
Definimos primero las variables:

$$x \rightarrow Tiempo\ en\ horas.$$
$$y \rightarrow Distancia\ a\ su\ vivienda\ en\ km.$$

Hacemos una tabla de valores de la función:

x	0	1	2	3
y	0	4	8	12

Sacamos en conclusión que la expresión analítica y la gráfica de la función que buscamos es:



$y = 4x$

Actividades propuestas

S17. Represente las gráficas de las siguientes funciones lineales.

$y = -2x + 3$	$y = -1$
$y = \frac{x}{2} + 1$	$y = 4x - 3$

S18. Una persona que se encuentra a 20 km de su casa comienza a andar en línea recta en dirección a esta a una velocidad de 4 km/h. Halle la expresión analítica de la función que relaciona el tiempo con la distancia a su vivienda. Describa la función, represéntela gráficamente y analice el punto de corte con el eje x.

S19. Un fontanero cobra por desplazamiento 25 € y por cada hora de trabajo 15 €. Halle la expresión analítica y gráfica de la función que relaciona las horas de trabajo y los euros que gana el fontanero.

S20. El precio de una determinada tarifa de teléfono es de 6 € /mes por los datos consumidos hasta 2 gigas y 0,15 € por establecimiento de llamada realizada.

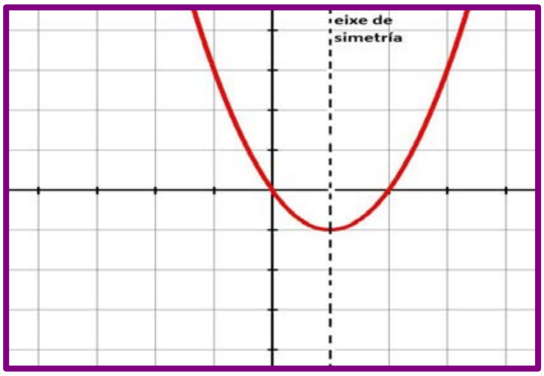
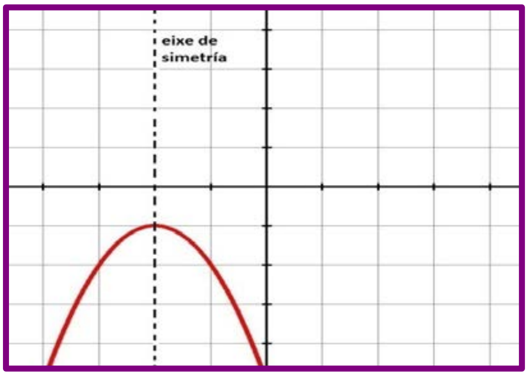
- Halle la expresión analítica de la función que relaciona el número de llamadas realizadas con la cantidad que paga mensualmente.
- Si un mes realiza 15 llamadas, ¿cuánto deberá pagar?
- Se pagó 7,05 €, ¿cuántas llamadas realizó?

S21. Un ciclista bebe la razón de 0,5 litros cada 10 km. Si el equipo de apoyo para ese ciclista lleva 40 litros de agua. Calcule la expresión de la función que relaciona los km recorridos con la cantidad de agua que le queda al equipo. Después de 240 km, ¿cuántos litros de agua le quedan al equipo?

2.2.2 Función cuadrática

Una función cuadrática tiene por expresión analítica $y = ax^2 + bx + c$, siendo *a, b* y *c* números reales y cumpliendo que $a \neq 0$. Su gráfica se llama parábola y se trata de una curva simétrica con respecto a un eje paralelo al eje OY.

- Si $a > 0$, la parábola tiene un mínimo.
- Si $a < 0$, la parábola tiene un máximo.

$Si\ a > 0$	$Si\ a < 0$
	

Para la representación gráfica de una función cuadrática es recomendable realizar una serie de pasos, veámoslo en las siguientes actividades resueltas:

Actividad resuelta

Halle la gráfica de la siguiente función cuadrática $y = x^2 - 6x + 5$.

- Calculemos el vértice de la parábola que se encuentra en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$.

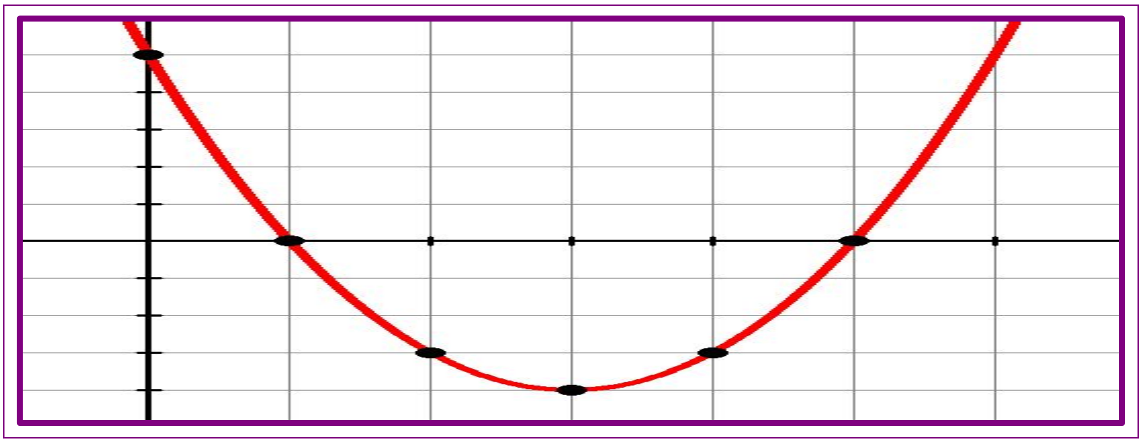
En este caso $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right) = \left(\frac{6}{2\cdot 1}, \frac{-36+4\cdot 1\cdot 5}{4\cdot 1}\right) = (3,-4)$.

- Sabemos que este punto es un mínimo, puesto que $a > 0$.
- Hacemos una tabla de valores próximos al vértice, basta con dos valores de x.

x	y
2	-3
4	-3

Si los valores están a la misma distancia del vértice, los valores que nos proporciona la función son los mismos.

- Calculemos los puntos de corte.
  - Eje x. Resolvemos $x^2 - 6x + 5 = 0$ y obtenemos los puntos $(1,0)$ y $(5,0)$.
  - Eje y. Para $x = 0$ obtenemos $y = 5$, por lo tanto en el punto $(0,5)$.
- Representemos todos los puntos obtenidos y uniéndolos, dibujamos la parábola.



Un niño pequeño golpea una bola de bádminton. La altura a la que se encuentra en cada instante, *t*, expresada en segundos, viene dada por la siguiente expresión, $h = 4t - t^2$.

- Dibuje la gráfica de la función.
- ¿En qué momento alcanzó la máxima altura?
- Cuando cayó, ¿cuánto tiempo llevaba la bola en el aire?

Para dibujar la parábola seguimos los pasos del ejercicio anterior:

- Calculamos el vértice de la parábola que se encuentra en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$.

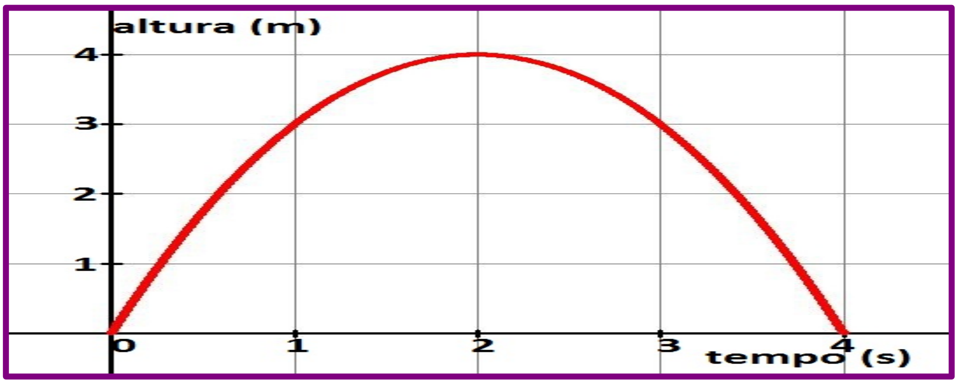
En este caso $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right) = \left(\frac{-4}{2\cdot(-1)}, \frac{-16+4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)}\right) = (2, 4)$.

- Sabemos que este punto es un máximo puesto que $a < 0$.
- Haremos una tabla de valores próximos al vértice, basta con dos valores de x.

x	y
1	3
3	3

Si los valores están a la misma distancia del vértice, los valores que nos proporciona la función son los mismos.

- Calculemos os puntos de corte:
  - Eje x. Resolvemos $-t^2 + 4t = 0$ y obtenemos los puntos $(0{,}0)$ y $(4{,}0)$.
  - Eje y. Para $x = 0$ obtenemos $y = 0$, por lo tanto en el punto $(0{,}0)$. Esto ya podíamos deducirlo puesto que sabemos que solo puede cortar el eje OY en un solo punto.
- Representemos todos los puntos obtenidos y uniéndolos, dibujamos la parábola.



La altura máxima la consiguió a los 2 segundos y fue 4 metros. Cuando cayó la pelota llevaba en el aire 4 segundos.

Actividades propuestas

S22. Represente gráficamente las siguientes funciones cuadráticas:

$y = x^2 + 2x$	$y = -x^2 - 6x - 5$	$y = -x^2 + 2x + 3$
$y = 2x^2 - 8$	$y = x^2 - 6x$	$y = x^2 - 9$

S23. Los beneficios anuales de una empresa de quesos gallegos están dados por la función $y = 200x - 4x^2$, donde *y* se expresa en cientos de euros y *x* en cientos de quesos.

– ¿Cuántos quesos deben hacer para que los beneficios sean máximos?

– ¿Cuáles serían, en este caso, los beneficios?

– ¿A partir de qué cantidad de quesos la empresa generaría pérdidas?

S24. Reintroducimos para repoblar, una raza extinta de cabra gallega en la Serra do Courel. Al principio se reprodujeron rápidamente pero los recursos empezaron a escasear y la población decreció. El número de individuos de esta especie a lo largo de los *t* años viene dada por la expresión $I = -t^2 + 34t + 35$.

– ¿Con cuántos individuos se empezó a repoblar?

– ¿En qué momento la población alcanzó su nivel máximo? En ese momento, ¿cuántos individuos había?

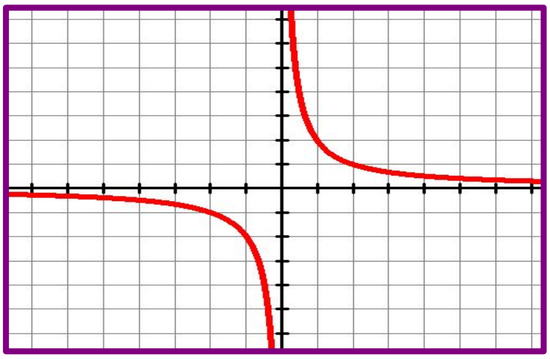
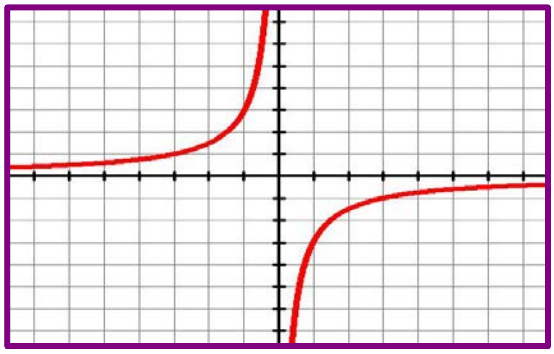
S25. Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está justo en la mitad y puede parar cualquier balón que pase a menos de 2,5 metros de altura. El jugador puede escoger dos trayectorias, las correspondientes a las funciones cuadráticas $y = -0{,}05x^2 + 0{,}4x$ ou $y = -0{,}2x^2 + 1{,}6x$. ¿Cuál de las dos trayectorias es la mejor? Explica el motivo.

2.2.3 Función de proporcionalidad inversa

Las funciones de proporcionalidad inversa son aquellas cuyas expresiones analíticas son de la forma $y = \frac{k}{x}$, siendo k un número real distinto de cero.

Las funciones de proporcionalidad inversa son aquellas que relacionan las magnitudes inversamente proporcionales.

Observe las gráficas de las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

$y = \frac{2}{x}$	$y = \frac{-3}{x}$
	

Actividad resuelta

El precio del alquiler de una furgoneta de 8 plazas es de 240 €. Calcule la expresión analítica da función que expresa la cantidad de dinero que debe pagar por persona, en función del número de personas que viajen en la furgoneta.

Haremos para eso una tabla de valores que nos ayude a visualizar dicha expresión:

X	Número de personas que viajan en la furgoneta	1	2	3	4
Y	€ / persona que viaja en la furgoneta	240	120	80	60

Podemos observar que $x \cdot y = 240$, por tanto la expresión es $y = \frac{240}{x}$.

Actividades propuestas

S26. Unos abuelos deciden pagarles a sus nietos y netas por pintar el piso donde veranean 3.000 €. Este dinero deben repartirlo entre los nietos y nietas que colaboren en el trabajo. Haga una tabla de valores que nos ayude a calcular la expresión analítica de la función que exprese el dinero que recibirá cada nieto o nieta, en función del número de participantes en el trabajo.

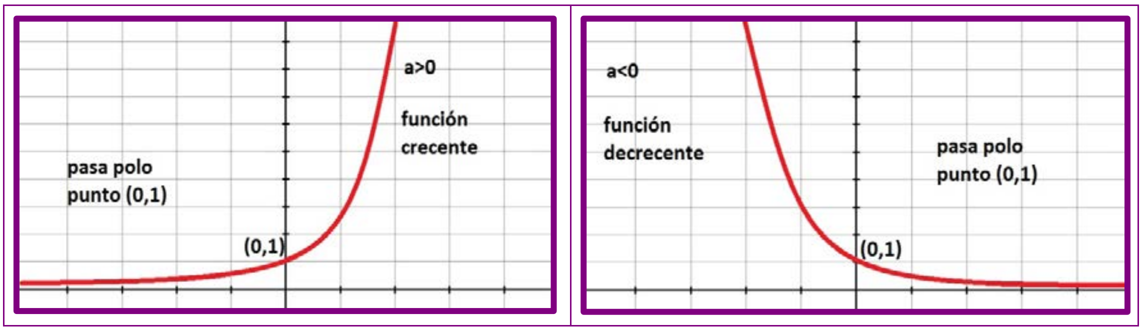
S27. Hacemos un pedido de pienso para alimentar durante 30 días a los 5 perros que tengo en casa, 3 son nuestros y 2 de dos vecinos que piensan ir de vacaciones. Haga una tabla de valores que nos ayude a calcular la expresión de la función que relaciona el número de perros con el tiempo que duraría la comida. Si los dueños deciden no ir en el último momento de vacaciones, ¿para cuánto tiempo nos duraría la comida?

S28. Pedimos un presupuesto la una agencia de viajes sobre el precio de una determinada actividad que cuesta 1800 € para el alumnado de una universidad. Se buscan patrocinadores para sufragar los gastos de la actividad y estos pagarán a partes iguales. Haga una tabla de valores donde las variables sean el número de patrocinadores y el dinero que pone cada patrocinador para pagar la actividad. ¿Cuál será la expresión de la función que relaciona estas dos variables?

2.2.4 Función exponencial

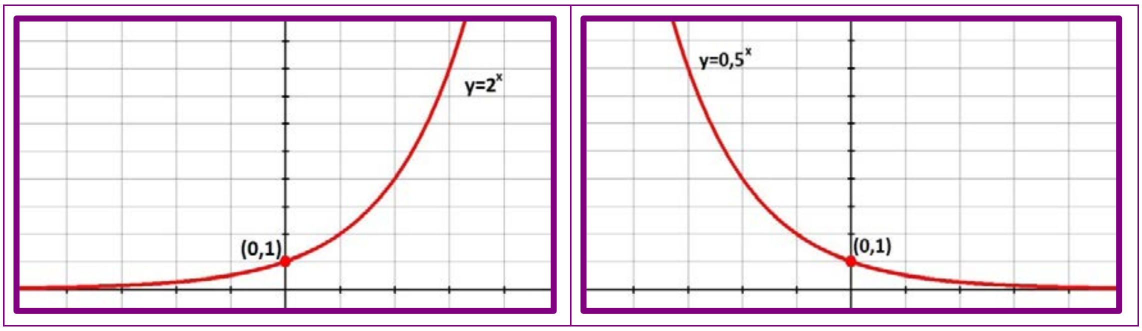
La función exponencial es una función de la forma $y = a^x$, donde a es un número real positivo y distinto de 1.

La gráfica de la función exponencial es una curva como las que se muestran a continuación.



Actividad resuelta

Dibuje las gráficas de las funciones $y = 2^x$ y $y = 0{,}5^x$.



Un determinado virus se reproduce por bipartición cada minuto. Conseguimos aislar uno de ellos y propiciamos un ambiente apto para su multiplicación. Halle la expresión de la función que representa el dicho experimento y que relacione el tiempo y el número de virus en función del tiempo transcurrido.

Definimos las siguientes variables:

$$x \rightarrow Tiempo\ transcurrido\ medido\ en\ minutos.$$
$$y \rightarrow Número\ de\ virus\ que\ hay\ a\ lo\ largo\ del\ tiempo.$$

La expresión quedaría de la siguiente manera: $y = 2^x$, y nos permitiría responder a preguntas como:
¿Cuántos virus hay después de 10 minutos?

La respuesta sería muy sencilla, bastaría sustituir $x = 10$ en la expresión y obtendríamos como resultado 1.024.

Curiosidad matemática

Existe un número en las matemáticas de especial importancia, el número $e = 2{,}71828182846 \ldots$. La función $y = e^x$ aparece en las principales ecuaciones de la física, de la química, de la economía etc. Esta función aparece, por ejemplo, en ecuaciones que expresan el crecimiento de ciertas poblaciones de virus y bacterias, en los intereses bancarios, en las pruebas del carbono 14, utilizadas para datar por ejemplo la edad geológica de los fósiles etc.

Actividades propuestas

S29. Se estima que el precio de la vivienda subirá anualmente un 5,5%. Se valora el precio de una determinada vivienda en 135.000 €. Halle la expresión analítica de la función que expresa a lo largo de los años la valoración de esta vivienda. ¿Cuál será la valoración dentro de 5 años?

S30. Invertimos durante 25 años un capital de 50.000€ a 3%. Halle la expresión de la función que expresa el capital obtenido con el tiempo en años. ¿Cuál será el capital después de 15 años?

S31. Nos proponemos ahorrar todos los días el doble del anterior. Si comenzamos por 5 céntimos, calcule la función que expresa el capital ahorrado a lo largo de los días. ¿Cuál es la cantidad que tendría que ahorrar el último día del mes (30 días)? ¿Es factible el propósito?

S32. Un determinado antibiótico muy potente hace que la cantidad de ciertas bacterias en el cuerpo se reduzca a la mitad cada hora que pasa. Se estima que la cantidad de bacterias presente en el cuerpo cuando tomamos el antibiótico es de 100 millones de ellas. Halle la expresión analítica de la función que relaciona las horas con la cantidad de bacterias en el cuerpo. Pasado un día, ¿cuántas bacterias se estima que haya en el cuerpo?

2.2.5 Función logarítmica

¿Qué pasaría si tuviésemos que calcular el valor de $2^x = 8$? La respuesta sería muy sencilla puesto que $2^3 = 8$. El valor sería $x = 3$.

Para resolver este tipo de problemas es por lo que se define una nueva operación matemática llamada logaritmo en base a.

$$\log_a P = x \leftrightarrow a^x = P$$

Actividad resuelta

Calcule los siguientes logaritmos y explique el motivo.

$\log_2 8 = 3\ porque\ 2^3 = 8$	$\log_3 9 = 2\ porque\ 3^2 = 9$
$\log_2 {}^1\!/_2 = -1\ porque\ 2^{-1} = {}^1\!/_2$	$\log_5 125 = 3\ porque\ 5^3 = 125$

Al igual que se definen las función exponenciales $y = a^x$, con $a > 0\ e\ a \neq 1$ representan el desarrollo de ciertos procesos, también se pueden definir las funciones que representen los procesos inversos. Vimos en el apartado anterior que la función $y = 2^x$ representaba el número de virus a lo largo del tiempo. Si nos interesara saber la expresión que representa el tiempo en función del número de virus, obtendríamos la función logarítmica (función inversa a la primera) $y = \log_2 x$.

Actividad resuelta

Un determinado virus se reproduce por bipartición cada minuto. Para esto conseguimos aislar uno de ellos y propiciamos un ambiente apto para su multiplicación. Calcule la expresión de la función que representa el tiempo transcurrido en función del número de virus.

Definimos las siguientes variables:

$$x \rightarrow \textit{Número de virus que hay a lo largo del tiempo.}$$

$$y \rightarrow \textit{Tiempo transcurrido medido en minutos.}$$

Hagamos una tabla de valores que nos ayuden a ver cómo se desarrolla el proceso:

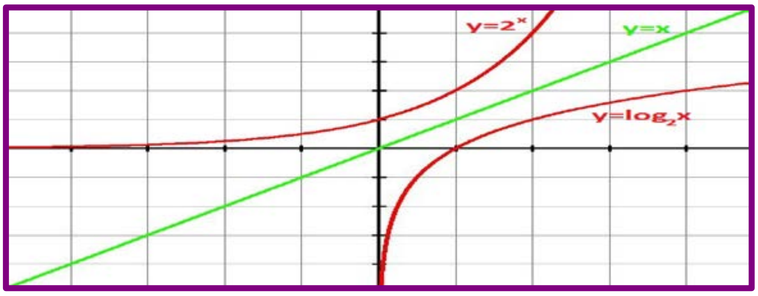
x	Número de virus	1	2	4	8	16	32	64
y	Tempo transcorrido	0	1	2	3	4	5	6

La expresión quedaría de la siguiente manera: $y = \log_2 x$, y nos permitiría responder a preguntas como:

¿Cuánto tiempo transcurrió si hay un total de 1.024?

La respuesta sería muy sencilla, bastaría sustituir $x = 1.024$ en la expresión y obtendríamos como resultado $10\ min$.

Las funciones $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ decimos que son **funciones inversas** y sus gráficas son simétricas respeto a la recta $y = x$. Esto es algo que sucede con todas las funciones y sus inversas aunque no profundizaremos sobre esto en este módulo IV. Vea la gráfica de estas dos funciones:



Curiosidad matemática

Como la función exponencial, la función logarítmica se utiliza con asiduidad en los cálculos y desarrollo de las matemáticas, las ciencias naturales y las ciencias sociales. Entre otros fines, se usa ampliamente para «comprimir» la escala de medida de magnitudes cuyo crecimiento, demasiado rápido, dificulta su representación visual o la sistematización del fenómeno que representa.

- En las ciencias sociales, la usamos en aplicaciones sobre el crecimiento o decrecimiento de ciertas poblaciones.
- En la química, es famosa la utilización que se hace del logaritmo en el estudio de los pH, que lo utilizamos para calcular el nivel de acidez de determinados productos.
- En la geología, es famosa la escala de Richter, utilizada para indicar la magnitud y fuerza de un terremoto.
- En la astronomía es muy útil pues los números son extremadamente grandes y hay que comprimirlos en números más fáciles de manejar. Por ejemplo la intensidad de la luz de una estrella a mucha distancia.

3. Actividades finales

S33. Se midió la temperatura en una de las salas de un hospital durante 8 horas y se construyó la siguiente tabla de valores:

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatura (ºC)	14	15	18	25	28	24	19	15

- ¿Tiene sentido unir los puntos?
- Dibuje la gráfica aproximada.
- Si sabemos que la calefacción estaba encendida y que hubo un momento en que la apagaron, ¿podría decir en qué momento la apagaron?

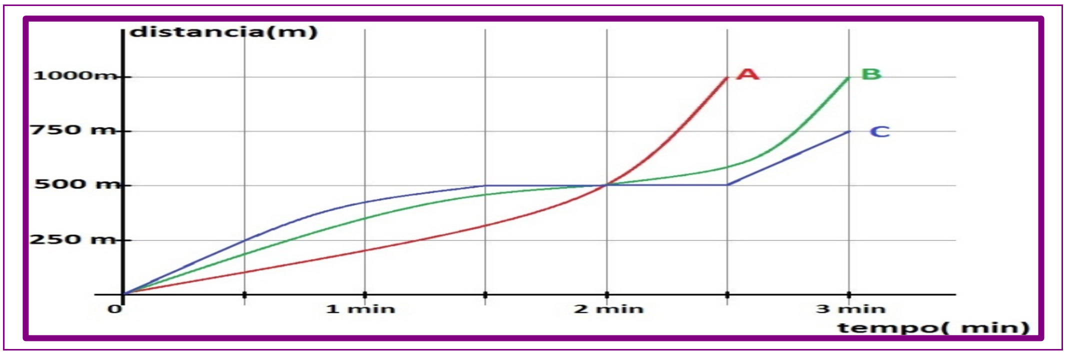
S34. En una panadería nos hacen una oferta todos los jueves de final de mes: por cada dos empanadas que compremos nos regalan una. El precio de las empanadas es de 10 €.

- Haga una tabla de valores que represente dicha oferta.
- ¿Se trata de una función?
- ¿Cuáles son las variables?
- Dibuje la gráfica con estos datos.
- ¿Tiene sentido en la gráfica dibujar las líneas que unen los puntos dibujados anteriormente?

S35. Montamos nuestra hija pequeña en una noria de 2 metros de radio en las fiestas del barrio.

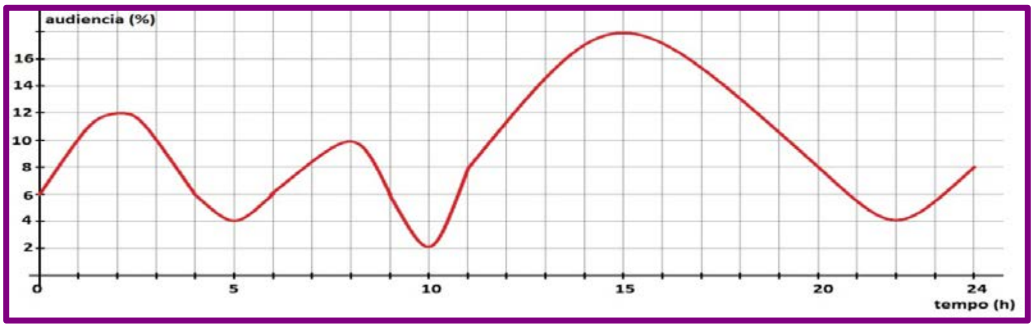
- Represente aproximadamente la gráfica de la función que relaciona el número de vueltas con la altura que alcanza la niña cuando está subida en la noria.
- ¿La gráfica de la función se repite? ¿Se trata de una función periódica?

S36. Tres corredores, A, B y C, participan en una carrera. Fíjese en la gráfica que representa dicha carrera y responda las siguientes preguntas:



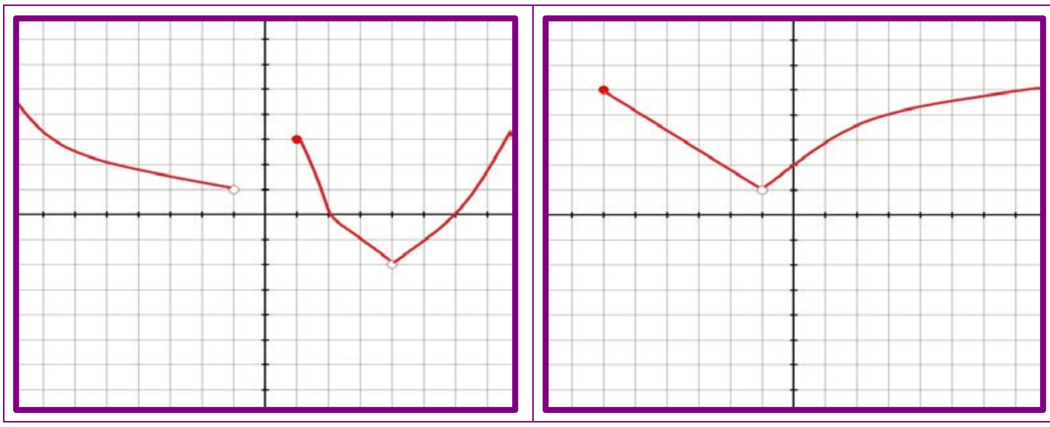
- Se sabemos que por lo menos alguno de ellos acabó todo el recorrido, ¿podría decir cuál fue la distancia de la carrera?
- ¿Cuántos corredores acabaron todo el recorrido? ¿Qué corredor no acabó?
- ¿Cuál fue el primero en llegar a la meta?
- ¿Cuál fue el corredor que empezó a mayor ritmo? ¿Lo adelantaron en algún momento?
- ¿Cuál fue el corredor que llegó en primer lugar?

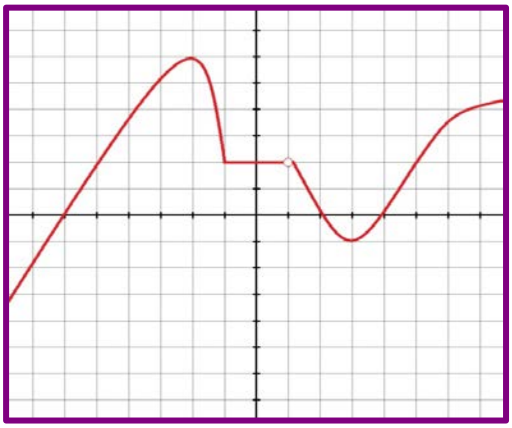
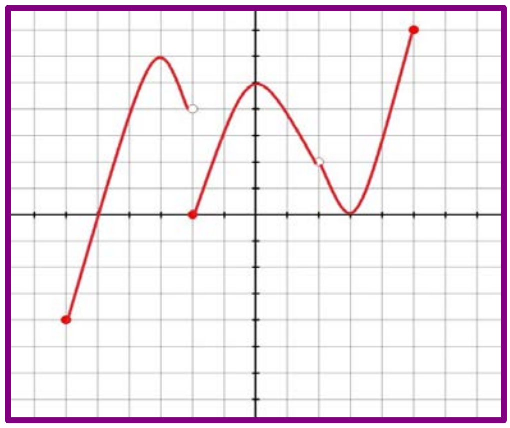
S37. Esta gráfica muestra la evolución de la audiencia de una cadena de radio a lo largo de un día. Responda las siguientes preguntas:



- ¿Se trata de la gráfica de una función?
- Exponga cuales son las variables dependiente e independiente.
- ¿En qué horas aumenta el porcentaje de audiencia a lo largo del día? ¿Y en cuáles disminuye?
- ¿A qué hora se alcanza el máximo de audiencia? ¿Y el mínimo?
- ¿Cuál es la variación de audiencia entre las 10.00 h y las 15.00 h?

S38. Estudie el dominio, puntos de corte con los ejes, crecimiento/decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de las siguientes funciones:



S39. Calcule el dominio de las siguientes funciones expresadas mediante sus expresiones analíticas.

$y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 9}$	$y = \sqrt{x - 2}$
$y = \sqrt[4]{x - 3}$	$y = \dfrac{1}{3x - 9}$
$y = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 3}$	$y = \dfrac{x - 2}{x^2 - x}$

S40. Una persona participa en una carrera y corre a una velocidad de 15 km/h. Es un corredor de élite y estos tienen que salir 5 km antes de la salida. Responda las siguientes preguntas:

- Haga una tabla de valores de la función que expresa los kilómetros desde la salida y el tiempo en horas.
- Halle la función analítica de la función anterior.
- Después de 5 horas, ¿a qué distancia se encuentra de la salida este corredor?
- Hay un control de carrera a los 47,5 km. ¿Cuánto tiempo lleva corriendo este corredor cuando pasa por ese control?

S41. Una compañía de teléfonos los ofrecen dos tarifas para llamar a China. En la tarifa A tenemos que pagar una cuota fija de 10 €/mes más 0,05 €/min y en la tarifa B pagamos las llamadas a 0,10 €/min.

- Calcule las expresiones analíticas de las funciones que expresan el gasto mensual en cada una de las tarifas en función de los minutos de las llamadas realizadas.
- Halle el valor de los minutos para los que pagaría igual en las dos tarifas.
- ¿A partir de cuántos minutos interesa una u otra tarifa?

S42. Una empresa que fabrica bicicletas obtiene unos beneficios al mes por su venta que vienen dados por la función $f(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20.000$. Responda las siguientes preguntas:

– ¿Cuántas bicicletas deben fabricarse para que el beneficio sea máximo?
– En un mes de vacaciones donde la fábrica no produce bicicletas, ¿cuáles son las pérdidas en ese mes?
– Halle el dominio de la función.
– Halle los puntos de corte con el eje OX y explique cómo se desarrollan los beneficios en cada uno de los intervalos que delimitan estos puntos en este eje.

S43. Se hace un estudio de como lanza el martillo un lanzador de peso que va a un campeonato mundial para optimizar su esfuerzo. Analizan la trayectoria de los lanzamientos y los ordenadores nos proporcionan esta función: $f(x) = -0{,}002x^2 + 0{,}16x + 1{,}8$. Responda las siguientes preguntas:

– ¿A qué altura máxima sube el martillo?
– Si la longitud mínima para asistir al dicho campeonato es de 85 m, ¿se espera que este lanzador de martillo compita en este campeonato?
– ¿Cuál es la altura del lanzador?

S44. Un estanque tarda en llenarse de agua 6 horas con 7 llaves abiertas. Haga una tabla de valores que nos ayude a calcular la expresión de la función que relaciona el número de llaves, *x*, con el tiempo, *y*, que tardan en llenar de agua el estanque.

S45. Una familia tiene un acuario y pretende alimentar durante 20 días los 40 peces que viven en él. Para eso compra comida para pescados.

– ¿Qué función proporciona el tiempo que durará la comida en función del número de peces que hay en el acuario?
– Si cuando cuentan bien el número de peces encuentra allí 50, ¿cuánto tiempo durará la comida?

S46. Colocamos en el banco 15.250 € al 3,25% de interés anual. Responda las siguientes preguntas:

– Escriba la función que expresa el capital acumulado, *y*, en función del tiempo, *t*, que permanezca el dinero en el banco.
– ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse?

S47. En una central nuclear tenemos una determinada substancia radiactiva que se desintegra siguiendo una determinada regla $C(t) = 5 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5}}$, donde *C* es la cantidad de sustancia radioactiva en kg y *t* el tiempo en años. Responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué cantidad de substancia radiactiva hay al principio?
- ¿Qué cantidad de substancia tendremos dentro de 10 años?
- ¿Qué tiempo debe pasar para que la cantidad de sustancia baje hasta la mitad?

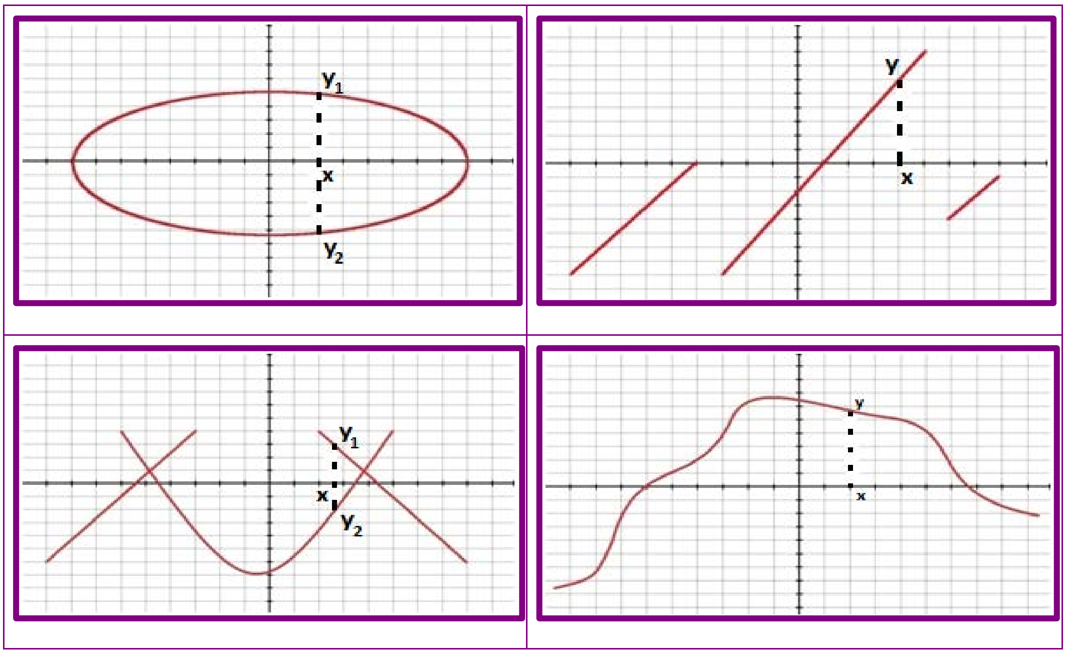
4. Solucionario

4.1 Actividades propuestas

S1. Determine si los siguientes enunciados que relacionan magnitudes son o no funciones. Soluciones:

- Sí es una función porque para cada valor del radio le corresponde un único valor de la longitud.
- No es función porque a un determinado peso pueden corresponderle varias alturas.
- No es función porque a un número determinado de amigos pueden corresponderle varias cantidades de regarlos percibidos.
- Sí es una función porque a cada número de bollos de pan comprados le corresponde un único valor de euros que pagar.

S2. Indique si las siguientes gráficas corresponden o no la una función. Solución:



- Las gráficas 1 y 3 no se corresponden con gráficas de funciones porque hay valores de *x* que le corresponden dos valores de *y*.
- Las gráficas 2 y 4 si son de una función porque para un valor cualquiera de *x* solo le corresponde un solo valor de *y*.

S3. La gráfica muestra la temperatura medida a lo largo de un día de otoño en Ourense. Solución:

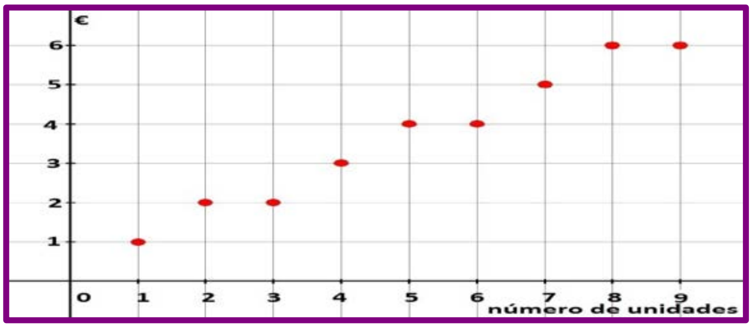
- Es la gráfica de una función porque a cada valor del tiempo le asigna un solo valor de las temperaturas. Las variables son el tiempo y la temperatura.
- No se alcanzaron temperaturas negativas.
- Una diferencia de 22 grados.
- La máxima de 24 y la mínima de 2.

S4. La siguiente gráfica muestra el desarrollo del recorrido en una excursión que se hizo por la Serra do Courel. Solución:

- Se trata de una función porque a cada valor de tiempo le asigna un único valor de distancia.
- La variable independiente es el tiempo medido en horas y la variable independiente la distancia recorrida medida en kilómetros.
- 12 horas.
- Pararon por 1ª vez 2 horas das 10 a las 12 horas y por 2ª vez una hora de las 14 a las 15 horas.
- Estuvieron en movimiento 9 horas.
- Recorrieron 50 km.
- En el tramo AB.

S5. En una determinada tienda utilizan como producto en promoción un determinado envase de leche cuyo precio es 1€ cada unidad. No permiten vender por persona más de 9 envases. Solución:

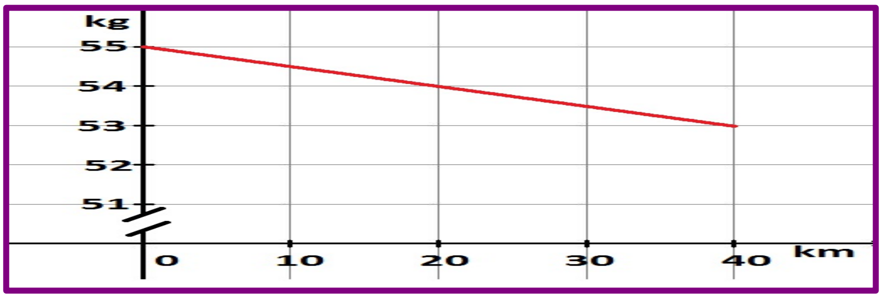
- Se trata de una función porque a cada valor del número de unidades solo le asigna un único valor de euros que pagan.
- Las variables son el número de unidades y los euros que pagan por ellas.



- No tiene sentido comprar 1,5 unidades así que tampoco tendría sentido unir los puntos.

S6. La siguiente función $f(x) = 55 - 0{,}05x$ expresa el peso de un ciclista a lo largo de una carrera contrarreloj de 40 Km, donde x son los km recorridos. Soluciones:

- Pesa 55 kg al principio de la carrera. Al final pesa 53 kg.
- 54 kg.



S7. Esta gráfica representa el número de estudiantes que ve la televisión a lo largo de un día en una pequeña residencia de universitarios y universitarias cuyo número de plazas es de 50 y están todas cubiertas. Soluciones:

- 20 estudiantes.
- A las 15 h y a las 22 h.
- Puede ser debido la que la esas horas están almorzando o descansando después de almorzar.
- A las 22 h están los 50 estudiantes viendo la televisión.

S8. Sacamos del congelador un trozo de carne y lo dejamos sobre la mesa de la cocina. La siguiente gráfica muestra la variación de la temperatura del trozo de carne hasta que se descongela completamente. Soluciones:

- -15 grados.
- 0 grados.
- 10 grados.
- 20 grados.

S9. Calcule el domino de las siguientes funciones. Solución:

$(-6, 7]$	$(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$
$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$	$\mathbb{R}$

S10. Calcule el dominio de las siguientes funciones expresadas mediante sus expresiones analíticas. Solución:

$(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$	$[-2,+\infty)$	$(-\infty,2) \cup (2,+\infty)$
$[-4,+\infty)$	$(-\infty,2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$	$\mathbb{R}$

S11. Halle el dominio de las siguientes funciones. Solución:

- $[0,24)$
- $[0,+\infty)$
- $1,2,3 \ldots 29,30.$

S12. Indique cuales son los puntos de discontinuidad de las funciones cuyas gráficas son las siguientes. Solución:

Discontinuidades en $x=-2$ y $x=2$	Discontinuidad en $x=1$
Discontinuidad en $x=-1$	Discontinuidades en $x=-2$ y $x=0$

S13. Indique si las siguientes gráficas son o no periódicas y el período en caso de que lo sean. Solución:

Período 4	Período 2

S14. Calcule los puntos de corte con los dos ejes de las siguientes funciones. Soluciones:

$eje\ OX \rightarrow (-2,0)$ **y** $\left(\frac{-1}{2},0\right)$ $eje\ OY \rightarrow (0,-2)$	$eje\ OX \rightarrow (-3,0)$ $eje\ OY \rightarrow (0,3)$
$eje\ OX \rightarrow (2,0)$ $eje\ OY \rightarrow (0,6)$	$eje\ OX \rightarrow (1,0)$ **y** $(3,0)$ $eje\ OY \rightarrow (0,3)$

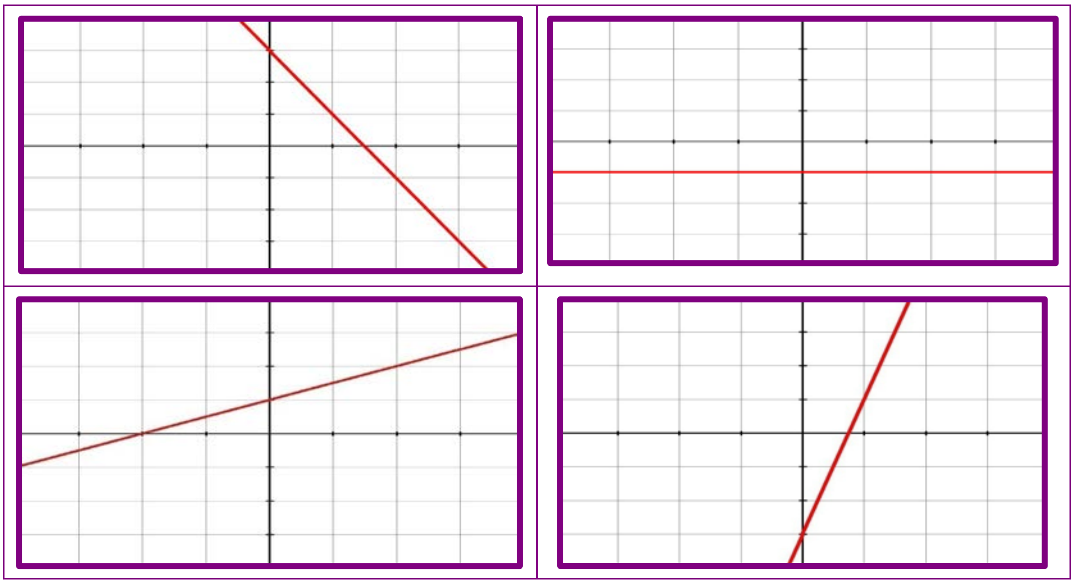
S15. Halle los intervalos donde las siguientes funciones son crecientes y decrecientes. Soluciones:

$\uparrow en\ (-3,-1) \cup (2,3)$ $\downarrow en\ (-5,-3) \cup (-1,2) \cup (3,5)$	$constante\ en\ (-\infty,-3)$ $\uparrow en\ (-1,1) \cup (2,+\infty)$ $\downarrow en\ (-3,-1)$
$\uparrow en\ (-2,-1) \cup (3,5)$ $\downarrow en\ (-5,-3) \cup (1,2)$	$constante\ en\ (2,+\infty)$ $\uparrow en\ (-3,-1) \cup (0,2)$ $\downarrow en\ (-\infty,-3)$

S16. Indique los máximos y mínimos relativos y absolutos en estas gráficas de funciones. Soluciones:

En $(-1,1)$ e $(1,1)$ hay máximos relativos y absolutos.	En $(-1,-1)$ hay un mínimo absoluto.
En $(-4,-6)$ hay un mínimo relativo y absoluto, en $(-1,7)$ hay un máximo relativo y en $(4,-3)$ hay un mínimo relativo.	En $(-4,6)$ hay un máximo relativo y absoluto, en $(0,-7)$ hay un mínimo relativo y en $(4,4)$ hay un máximo relativo.

S17. Represente las gráficas de las siguientes funciones lineales. Solución:



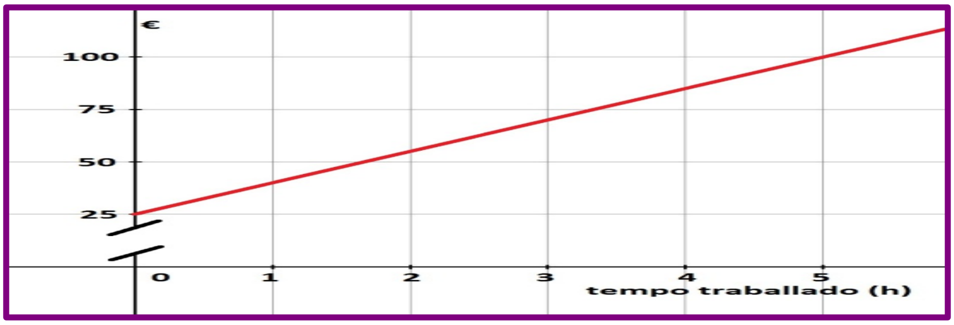
S18. Una persona que se encuentra a 20 km de su casa comienza a andar en línea recta en dirección a esta a una velocidad de 4 km/h. Halle la expresión analítica de la función que relaciona el tiempo con la distancia a su vivienda. Describa la función, represéntela gráficamente y analice el punto de corte con el eje *x*. Soluciones:

- La expresión es $y = 20 - 4x$ donde *x* es el tiempo medido en horas e *y* la distancia a su casa.
- La función es decreciente puesto que a medida que pasa el tiempo la persona se acerca a su vivienda.

– Corta en el punto $(5{,}0)$ que significa que a las 5 horas de comenzar a andar, llegó a su casa.

S19. Un fontanero cobra por desplazamiento 25 € y por cada hora de trabajo 15 €. Halle la expresión analítica y gráfica de la función que relaciona las horas de trabajo y los euros que gana el fontanero. Soluciones:

– La expresión analítica es $y = 25 + 15x$, donde x representa las horas que trabaja el fontanero e *y* la cantidad que cobra en euros.



S20. El precio de una determinada tarifa de teléfono es de 6 €/mes por los datos consumidos hasta 2 gigas y 0,15 € por establecimiento de llamada realizada. Soluciones:

– La expresión analítica es $y = 6 + 0{,}15x$, si *x* es el número de llamadas e *y* la cantidad que debemos pagar.

– 8,25 €.

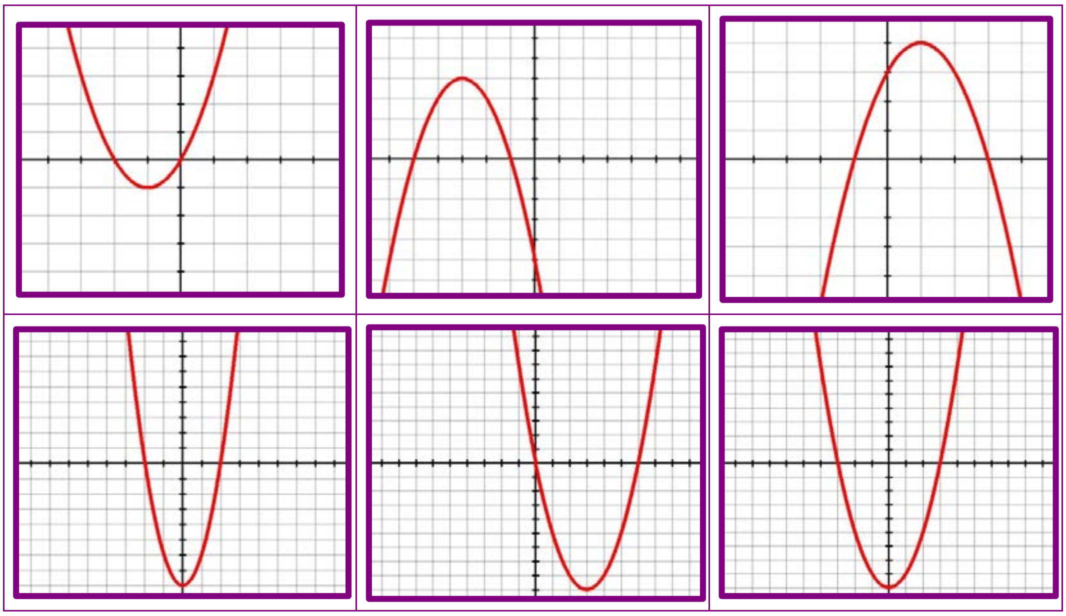
– 7 llamadas.

S21. Un ciclista bebe la razón de 0,5 litros cada 10 km. Si el equipo de apoyo para ese ciclista lleva 40 litros de agua. Calcule la expresión de la función que relaciona los km recorridos con la cantidad de agua que le queda al equipo. Después de 240 km, ¿cuántos litros de agua le quedan al equipo? Soluciones:

– La expresión analítica es $y = 40 - 0{,}05x$, si *x* es el número de km recorridos e *y* el número de litros que tiene el equipo de apoyo.

– Después de 240 km el equipo solo tiene 28 litros.

S22. Represente gráficamente las siguientes funciones cuadráticas. Soluciones:



S23. Los beneficios anuales de una empresa de quesos gallegos están dados por la función $y = 200x - 4x^2$, donde *y* se expresa en cientos de euros y *x* en cientos de quesos. Soluciones:

- El beneficio es máximo cuando se hacen 2.500 quesos.
- Los beneficios serían máximo 250.000 €.
- A partir de los 5.000 quesos.

S24. Reintroducimos para repoblar, una raza extinta de cabra galega en la Serra do Courel. Al principio se reprodujeron rápidamente pero los recursos empezaron a escasear y la población decreció. El número de individuos de esta especie a lo largo de los *t* años viene dada por la expresión $I = -t^2 + 34t + 35$. Soluciones:

- 35 individuos.
- El máximo de la función es el punto $(17, 324)$, por tanto a los 17 años había 324 individuos.

S25. Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está justo en la mitad y puede parar cualquier balón que pase a menos de 2,5 metros de altura. El jugador puede escoger dos trayectorias, las correspondientes a las funciones cuadráticas $y = -0{,}05x^2 + 0{,}4x$ o $y = -0{,}2x^2 + 1{,}6x$. ¿Cuál de las dos trayectorias es la mejor? Soluciones:

Para la segunda porque el máximo se alcanza a los 4 metros con una altura de 3,2 metros, por lo tanto el portero no pararía el balón. Para la primera quedaría solo a 0,8 metros.

S26. Unos abuelos deciden pagarles a sus nietos y netas por pintar el piso donde veranean 3.000€. Este dinero deben repartirlo entre los nietos y netas que colaboren en el trabajo. Haga una tabla de valores que nos ayude a calcular la expresión analítica de la función que exprese el dinero que recibirá cada nieto o neta, en función del número de participantes en el trabajo. Soluciones:

– La tabla de valores es:

x	Número de nietos y nietas que trabajan	1	2	3
y	Cantidad en € que percibirá cada uno de ellos	3000	1500	1000

– La función es $y = \frac{3.000}{x}$.

S27. Hacemos un pedido de pienso para alimentar durante 30 días a los 5 perros que tengo en la casa, 3 son nuestros y 2 de dos vecinos que piensan ir de vacaciones. Haga una tabla de valores que nos ayude a calcular la expresión de la función que relaciona el número de perros con el tiempo que duraría la comida. Si los dueños deciden no ir en el último momento de vacaciones, ¿para cuánto tiempo nos duraría la comida? Soluciones:

– La tabla de valores es:

x	Número de perros	5	1	2	3
y	Tiempo que durará la comida (días)	30	150	75	50

– La función es $y = \frac{150}{x}$.

– La comida para nuestros 3 perros duraría 50 días.

S28. Pedimos un presupuesto a una agencia de viajes sobre el precio de una determinada actividad que cuesta 1800 € para el alumnado de una universidad. Se busca patrocinadores para sufragar los gastos de la actividad y estos pagarán a partes iguales. Haga una tabla de valores donde las variables sean el número de patrocinadores y el dinero que aporta cada patrocinador para pagar la actividad. ¿Cuál será la expresión de la función que relaciona estas dos variables? Soluciones:

– La tabla de valores es:

x	Número de patrocinadores	1	2	3
y	Cantidad que paga cada patrocinador (€)	1.800	900	600

– A función é $y = \frac{1800}{x}$.

S29. Se estima que el precio de la vivienda subirá anualmente un 5,5%. Se valora el precio de una determinada vivienda en 135.000 €. Halle la expresión analítica de la función que expresa a lo largo de los años la valoración de esta vivienda. ¿Cuál será la valoración dentro de 5 años? Soluciones:

- La expresión es $y = 135000 \cdot 1{,}055^x$.
- Dentro de 5 años valdrá 176.439,60 €

S30. Invertimos durante 25 años un capital de 50.000€ al 3%. Halle la expresión de la función que expresa el capital obtenido con el tiempo en años. ¿Cuál será el capital después de 15 años? Soluciones:

- La expresión es $y = 50.000 \cdot 1{,}03^x$
- Dentro de 15 habrá 77.898,37 €

S31. Nos proponemos ahorrar todos los días el doble del anterior. Se comenzamos por 5 céntimos, calcule la función que expresa el capital ahorrado a lo largo de los días. ¿Cuál es la cantidad que tendría que ahorrar el último día del mes (30 días)? Es factible el propósito. Soluciones:

- La expresión analítica es $y = 5 \cdot 2^x$ donde *x* representa el número de días e *y* se expresa en céntimos.
- El último día del mes tendríamos que ahorrar 5.368.709.120 céntimos, es decir, 53.587.091,20 €. Sería imposible ahorrar esto a este ritmo.

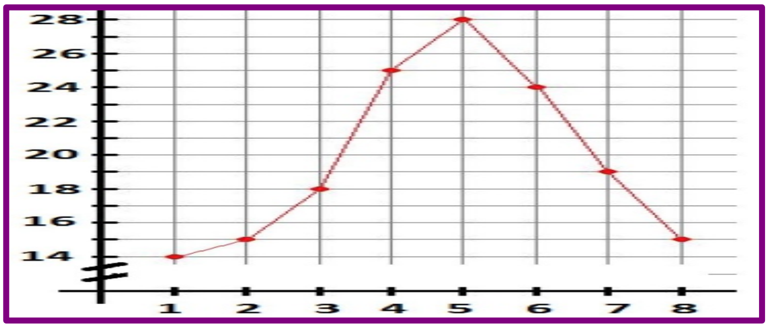
S32. Un determinado antibiótico muy potente hace que la cantidad de ciertas bacterias en el cuerpo se reduzca a la mitad cada hora que pasa. Se estima que la cantidad de bacterias presentes en el cuerpo cuando tomamos el antibiótico es de 100 millones de ellas. Halle la expresión analítica de la función que relaciona las horas con la cantidad de bacterias en el cuerpo. Pasado un día, ¿cuántas bacterias se estima que haya en el cuerpo? Soluciones:

- La expresión es $y = 100.000.000 \cdot 0{,}5^x$.
- Después de 24 horas habrá $y = 100000000 \cdot 0{,}5^{24} = 5{,}96$, es decir, unas 6 bacterias en el cuerpo aproximadamente.

4.2 Actividades finales

S33. Se midió la temperatura en una de las salas de un hospital durante 8 horas y se construyó la siguiente tabla de valores. Soluciones:

- Tiene sentido unir los puntos para darnos una idea aproximada de cómo sería la gráfica de la función que describe el fenómeno que estamos estudiando aunque no aportaría datos muy precisos.
- La gráfica sería aproximadamente de este modo:



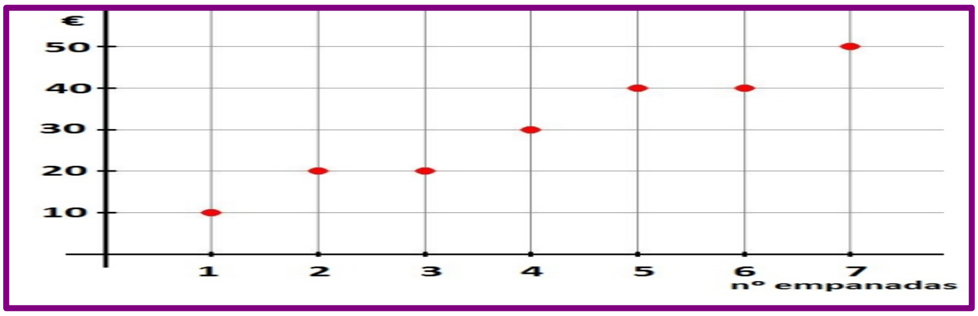
- Aproximadamente en la quinta hora apagaron la calefacción. Este dato, como dijimos no es preciso porque no sabemos exactamente hasta que hora subió la temperatura.

S34. En una panadería nos hacen una oferta todos los jueves de final de mes: por cada dos empanadas que compremos nos regalan una. El precio de las empanadas es de 10 €. Soluciones:

- La tabla de valores es:

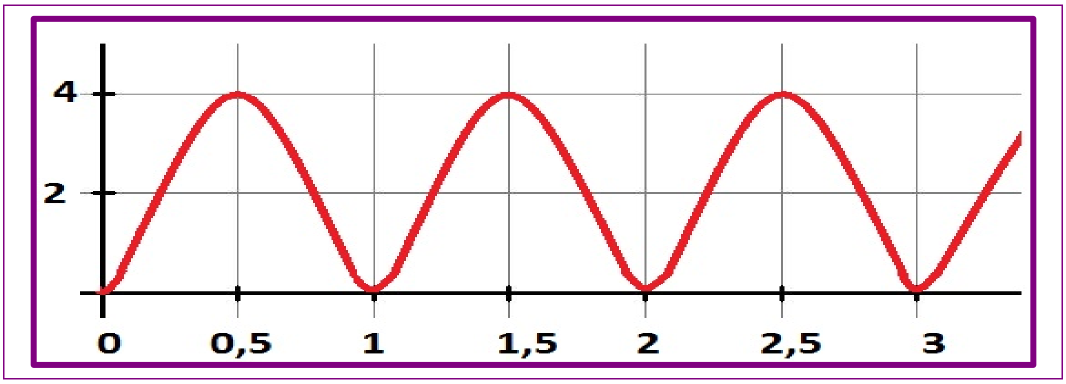
Número de empanadas	1	2	3	4	5	6	7
Precio que debemos pagar en €	10	20	20	30	40	40	50

- Se trata de una función porque a cada valor de la variable "número de empanadas" le corresponde un único valor de la variable "precio en € que debemos pagar".



- No tiene sentido dibujar las líneas que unen los puntos porque la función no está definida en puntos intermedios, es decir, no existen 1,33 empanadas por ejemplo.

S35. Montamos nuestra hija pequeña en una noria de 2 metros de radio en las fiestas del barrio. Soluciones:



– La función es periódica con período 1 porque la noria sube de igual modo en cada vuelta.

S36. Tres corredores, A, B y C, participan en una carrera. Fíjese en la gráfica que representa dicha carrera y responda las siguientes preguntas. Soluciones:

– 1.000 metros.
– Acabaron dos corredores, A e B. El corredor C no acabó.
– El corredor A.
– Empezó a mayor ritmo el corredor A y lo adelantaron los corredores B y C a los 2 minutos.
– Llegó en primer lugar el corredor A.

S37. Esta gráfica muestra a evolución de la audiencia de una cadena de radio a lo largo de un día. Responda las siguientes preguntas. Soluciones:

– Se trata de la gráfica de una función porque a cada valor de las horas del día le hace corresponder un porcentaje de audiencia.
– La variable independiente es “horas del día” y la variable dependiente “porcentaje de audiencia”.
– La audiencia sube en porcentaje de las 00.00 hasta las 2.00h, de las 5.00 hasta las 08.00h, de las 10.00 hasta las 15.00h y de las 22.00 hasta las 00.00h del día siguiente. En el resto de horas, el porcentaje baja.
– El máximo se consigue a las 15.00 h y el mínimo a las 10.00 h.
– La variación del porcentaje es de un 16%.

S38. Estudie el dominio, puntos de corte con los ejes, crecimiento/decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de las siguientes funciones. Soluciones:

Dominio: $(-\infty,-1) \cup [1,4) \cup (4,+\infty)$ Puntos de corte eje OX: $(2,0)$ e $(6,0)$ Puntos de corte eje OY: No hay. Crecimiento: $(4,+\infty)$ Decrecimiento: $(-\infty,-1) \cup (1,4)$ Constante: Máximos relativos: No hay Mínimos relativos: No hay. Máximos absolutos: No hay. Mínimos absolutos: No hay.	Dominio: $[-6,-1) \cup (-1,+\infty)$ Puntos de corte eje OX: No hay. Puntos de corte eje OY: $(0,2)$ Crecimiento: $(-1,+\infty)$ Decrecimiento: $(-6,-1)$ Máximos relativos: No hay Mínimos relativos: No hay. Máximos absolutos: No hay. Mínimos absolutos: No hay.
Dominio: $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$ Puntos de corte eje OX: $(-6,0)$, $(2,0)$ e $(4,0)$ Puntos de corte eje OY: $(0,2)$ Crecimiento: $(-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$ Decrecimiento: $(-2,-1) \cup (1,3)$ Constante: $(-1,1)$ Máximos relativos: $(-2,6)$ Mínimos relativos: $(3,-1)$ Máximos absolutos: $(-2,6)$ Mínimos absolutos: No hay.	Dominio: $[-6,2) \cup (2,5]$ Puntos de corte eje OX: $(-5,0)$, $(-2,0)$ e $(3,0)$ Puntos de corte eje OY: $(0,5)$ Crecimiento: $(-6,-3) \cup (-2,0) \cup (3,5)$ Decrecimiento: $(-3,-2) \cup (0,2) \cup (2,3)$ Máximos relativos: $(-3,6)$ e $(0,5)$ Mínimos relativos: $(3,0)$ Máximos absolutos: $(5,7)$ Mínimos absolutos: $(-6,-4)$

S39. Calcule el dominio de las siguientes funciones expresadas mediante sus expresiones analíticas. Soluciones:

$Domf = (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,+\infty)$	$Domf = [2,+\infty)$
$Domf = [3,+\infty)$	$Domf = (-\infty,3) \cup (3,+\infty)$
$Domf = \mathbb{R}$	$Domf = (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$

S40. Una persona participa en una carrera y corre a una velocidad de 15 km/h. Es un corredor de élite y estos tienen que salir 5 km antes de la salida. Responda las siguientes preguntas. Soluciones:

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Distancia desde la salida (km)	-5	10	25	40	55	70	85

- $y = 15x - 5$
- Se encuentra a 70 km de la salida.

– Lleva corriendo 3,5 h.

S41. Una compañía de teléfonos nos ofrece dos tarifas para llamar a China. En la tarifa A tenemos que pagar una cuota fija de 10 €/mes más 0,05 €/min y en la tarifa B pagamos las llamadas a 0,10 €/min. Soluciones:

Tarifa A	$y = 0{,}05x + 10$
Tarifa B	$y = 0{,}10x$

– Si realizo 200 min en llamadas pagaría igual en cualquiera de las tarifas.

– Me interesa más la tarifa A si gasto más de 200 min, y la tarifa B en el caso contrario.

S42. Una empresa que fabrica bicicletas obtiene unos beneficios al mes por su venta que vienen dados por la función $f(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20.000$. Responda las siguientes preguntas. Soluciones:

– Puesto que $a = -0{,}1 < 0$, la parábola tiene un máximo en el vértice. Utilizando la fórmula expuesta en la unidad, $x = 1.750$ bicicletas.

– En un mes de vacaciones no se fabrican bicicletas, así que $f(0) = -20.000$ €.

– El dominio como función matemática evidentemente es $\mathbb{R}$, pero en este caso el dominio solo tiene sentido para $[0, +\infty)$ puesto que no se puede fabricar un número de bicicletas negativo.

– Los puntos de corte son aproximadamente estos:

$$x = \frac{-350 \pm \sqrt{114.500}}{2 \cdot (-0{,}1)} \rightarrow x_1 \approx 58 \; e \; x_2 \approx 3442$$

Cuando se fabrican hasta aproximadamente 58 bicicletas los beneficios son negativos. Desde aproximadamente 58 hasta 3.442 bicicletas los beneficios son positivos y a partir de ahí los beneficios vuelven a ser negativos. En el primer intervalo no se producen las suficientes bicicletas para que haya beneficios, en el segundo intervalo hay beneficios y en el tercer intervalo los beneficios vuelven a ser negativos debido a muchas posibles causas. Por ejemplo, la empresa no dispone de un sitio para almacenar las bicicletas y tiene que invertir en lugares para almacenarlas, y por lo tanto esto genera gastos.

S43. Se hace un estudio de como lanza el martillo un lanzador de peso que va a un campeonato mundial para optimizar su esfuerzo. Analizan la trayectoria de los lanzamientos y los ordenadores nos proporcionan esta función: $f(x) = -0{,}002x^2 + 0{,}16x + 1{,}8$. Responda las siguientes preguntas. Soluciones:

- Puesto que $a = -0{,}002 < 0$, la parábola tiene un máximo en el vértice. Utilizando la fórmula expuesta en la unidad, el vértice se encuentra en $x = 40$ m. Para calcular la altura máxima calcularemos $f(40) = 5$ m.
- Calculemos los puntos de corte con el eje OX y obtenemos $x_1 = -10 \; e \; x_2 = 90$. Esto quiere decir que el martillo cae a 90 m y por lo tanto el lanzador asistiría al campeonato.
- La altura del lanzador es $f(0) = 1{,}8$ m.

S44. Un estanque tarda en llenarse de agua 6 horas con 7 grifos abiertos. Haga una tabla de valores que nos ayude a calcular la expresión de la función que relaciona el número de grifos, *x*, con el tiempo, *y*, que tardan en llenar de agua el estanque. Soluciones:

x	Número de grifos	7	1	2	3
y	Horas	6	42	21	14

- La función tiene como expresión $y = \frac{42}{x}$.

S45. Una familia tiene un acuario y pretende alimentar durante 20 días los 40 peces que viven en él. Para eso compra comida para peces. Soluciones:

x	Número de peces	40	1	2	4
y	Número de días	20	800	400	200

- Entonces la función es $y = \frac{800}{x}$.
- 16 días.

S46. Colocamos en el banco 15.250 € al 3,25% de interés anual. Responda las siguientes preguntas. Soluciones:

- $y = 15.350 \cdot 1{,}0325^x$.
- Probando con valores de x, podemos llegar a la conclusión de que tardaremos aproximadamente 34 años y medio.

S47. En una central nuclear tenemos una determinada sustancia radiactiva que se desintegra siguiendo una determinada regla $C(t) = 5 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5}}$, donde *C* es la cantidad de sustancia radiactiva en kg y *t* el tiempo en años. Soluciones:

- 5 kg.
- $C(10) = 5 \cdot 0{,}5^2 = 1{,}25 \; kg$.
- $2{,}5 = 5 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5}} \rightarrow 0{,}5 = 0{,}5^{\frac{t}{5}} \rightarrow t = 5 \; años$.

5. Glosario

C	▪ Continuidad	Una función es continua cuando su gráfica puede dibujarse de un solo trazo.
	▪ Crecimiento	Dada una función $f(x)$, definida en un intervalo (a, b). Si para cualquier par de puntos x_1 e x_2 del intervalo, que cumpla que $x_1 < x_2$ sucede que $f(x_1) < f(x_2)$, entonces la función es creciente en el intervalo (a, b).
D	▪ Decrecimiento	Dada una función $f(x)$, definida en un intervalo (a, b). Si para cualquier par de puntos x_1 e x_2 del intervalo, que cumpla que $x_1 < x_2$ sucede que $f(x_1) > f(x_2)$, entonces la función es creciente en el intervalo (a, b).
	▪ Dominio	Definimos dominio de una función f(x), y se expresa Domf(x), como el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente x para los que la función nos proporciona sus correspondientes valores y.
F	▪ Función	Una función, f, es una relación entre dos variables numéricas, x e y, en la que a cada valor de x le corresponde como mucho un valor de y.
	▪ Función cuadrática	Una función cuadrática tiene por expresión analítica y=ax^2+bx+c, siendo a, b y c números reales y cumpliendo que a≠0.
	▪ Función exponencial	La función exponencial es una función de la forma y=a^x, donde a es un número real positivo y distinto de 1.
	▪ Función inversa	Le llamamos función inversa de otra *f* a aquella función cuya gráfica es simétrica con respecto a la recta y=x de la gráfica de *f*.
	▪ Función lineal	Una función lineal es aquella cuya representación gráfica es una línea recta. Su expresión analítica es del tipo y=mx+n, donde m y n son números reales.
	▪ Función logarítmica	Función inversa de la función exponencial.
	▪ Función de proporcionalidad inversa	Aquella cuya expresión analítica es de la forma $y = \frac{k}{x}$, siendo k un número real distinto de cero.
M	▪ Máximo absoluto	Una función presenta un máximo absoluto cuando el valor de la función es mayor que todos los valores en todo o su dominio.
	▪ Máximo relativo	Una función decimos que presenta un máximo relativo o máximo local en un punto, cuando el valor de la función en dicho punto es mayor que cualquiera de los valores que están a su alrededor más próximo.
	▪ Mínimo absoluto	Una función presenta un mínimo absoluto cando el valor de la función es menor que todos los valores en todo o su dominio.
	▪ Mínimo relativo	Una función decimos que presenta un mínimo relativo o mínimo local en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es menor que cualquiera de los valores que están a su alrededor más próximo.
P	▪ Parábola	Gráfica de la función cuadrática.
	▪ Periodicidad	Una función es periódica cuando su gráfica se repite cada cierto intervalo.

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- Matemáticas Enseñanzas aplicadas. Serie Soluciona. 4º ESO. Ed. Santillana.
- Matemáticas Enseñanzas académicas. Serie Resuelve. 4º ESO. Ed. Santillana.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4ª ESO. Ed. Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4ª ESO. Ed. Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4º ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.

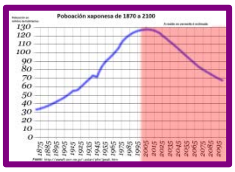
Otros recursos

En estos enlaces puede encontrar trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- http://www.vitutor.com/
- http://www.apuntesmareaverde.org.es/
- https://esorecursosdematematicas.blogspot.com.es/
- http://educalab.es/recursos

7. Anexo. Licencia de recursos

Licencias de recursos utilizados en esta unidad didáctica

RECURSO (1)	DATOS DEL RECURSO (1)
 RECURSO 1	▪ **Licencia**: Uso non comercial ▪ **Procedencia**: https://pt.wikipedia.org/wiki/Demografia_do_Jap%C3%A3o