XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para personas adultas

Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 4

Unidad didáctica 2

Geometría

Índice

1. **Introducción** 3
1.1 Descripción 3
1.2 Conocimientos previos 3
1.3 Criterios de evaluación 3
2. **Secuencia de contenidos y actividades** 4
2.1 Áreas y volúmenes 4
2.1.1 Perímetro de figuras planas 4
2.1.2 Área de cuerpos geométricos 7
2.1.3 Volumen de cuerpos geométricos 11
2.1.4 Semejanza 14
2.2 Ángulos, razones trigonométricas y aplicaciones 16
2.2.1 Medidas de un ángulo 16
2.2.2 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo 17
2.2.3 Resolución de triángulos rectángulos 20
3. **Actividades finales** 24
4. **Solucionario** 28
4.1 Soluciones de las actividades propuestas 28
4.2 Soluciones de las actividades finales 31
5. **Glosario** 32
6. **Bibliografía y recursos** 33
7. **Anexo. Licencia de recursos** 34

1. Introducción

1.1 Descripción

En esta unidad, dedicada a la geometría, podemos distinguir dos bloques bien diferenciados.

- En un primer bloque repasaremos conceptos ya estudiados en bloques anteriores: áreas, volúmenes y figuras semejantes.
- En el segundo bloque estudiaremos conceptos nuevos, relacionados con la medición de ángulos en los triángulos, que nos permitirán introducir las razones trigonométricas, imprescindibles para la resolución de problemas geométricos sencillos que surgen en nuestra vida diaria.

1.2 Conocimientos previos

Es necesario tener muy claros ciertos conceptos básicos antes de comenzar esta unidad. Estos conceptos son los de longitud, área, volumen y sus respectivas unidades de medición. Teniendo claro esto, deberíamos repasar algunas fórmulas y ejercicios básicos trabajados en módulos anteriores sobre:

- El teorema de Pitágoras.
- Los perímetros y las áreas de figuras planas básicas.
- Las áreas de cuerpos geométricos básicos.
- El volumen de cuerpos geométricos básicos.
- El concepto de figuras semejantes.

1.3 Criterios de evaluación

- Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, las técnicas o las fórmulas más adecuadas y aplicando la unidad de medida más acorde con la situación descrita.
- Utilizar aplicaciones informáticas de geometría dinámica, representando cuerpos geométricos y comprobando, mediante interacción con ella, propiedades geométricas.
- Utilizar las unidades angulares de los sistemas métrico sexagesimal e internacional, así como las relaciones y las razones de la trigonometría elemental, para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.

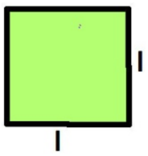
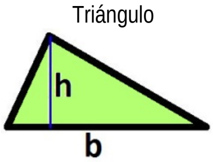
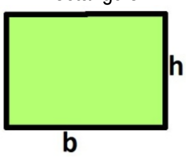
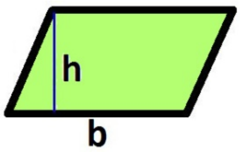
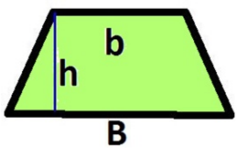
2. Secuencia de contenidos y actividades

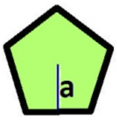
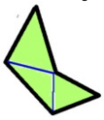
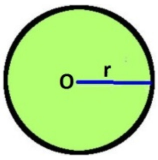
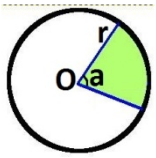
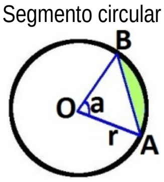
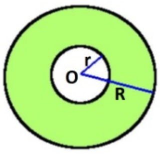
2.1 Áreas y volúmenes

En este bloque repasaremos los conceptos de área y volumen, contenidos ya tratados progresivamente en unidades de módulos anteriores y que trataremos de afianzar en este último módulo.

2.1.1 Perímetro de figuras planas

Expondremos las fórmulas fundamentales sobre perímetros y áreas estudiadas en módulos anteriores.

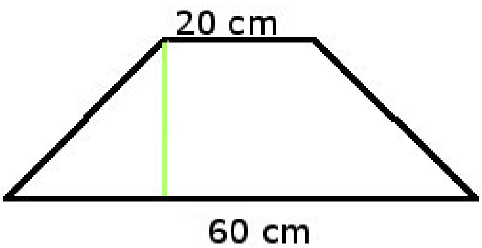
Figura geométrica	Fórmulas
Cuadrado 	$A = l \cdot l$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Triángulo 	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Rectángulo 	$A = b \cdot h$ $P = suma\ das\ longitudes\ de\ los\ lados$
Romboide 	$A = b \cdot h$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Rombo 	$A = \frac{D \cdot d}{2}$ $P = suma\ das\ longitudes\ dos\ lados$
Trapecio 	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ $P = suma\ das\ longitudes\ dos\ lados$

Polígono regular 	$A = \frac{P \cdot a}{2}$ $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Polígonos irregulares 	Para el cálculo de el área debemos descomponerlos en cualquiera de las figuras anteriores, generalmente triángulos $P = suma\ de\ las\ longitudes\ de\ los\ lados$
Círculo 	$A = \pi \cdot r^2$ $P = 2\pi r$
Sector circular 	$A = \pi r^2 \cdot \frac{a}{360}$ $P = 2r + 2\pi r \cdot \frac{a}{360}$
Segmento circular 	$A = A_{sector\ cirular} - A_{triángulo\ OAB}$ $P = \overline{AB} + 2\pi r \cdot \frac{a}{360}$
Corona circular 	$A = \pi(R^2 - r^2)$ $P = 2\pi(R + r)$

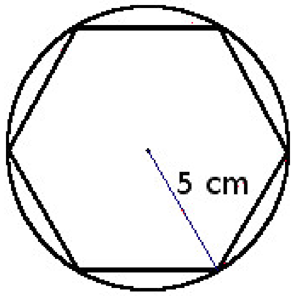
Actividades propuestas

S1. ¿Cuánto costará un espejo rectangular de 1,3 m de altura y 0,9 m de anchura si el decímetro cuadrado cuesta 2 euros?

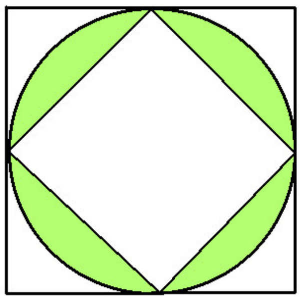
S2. Sabiendo que el perímetro de este trapecio isósceles (tiene dos lados iguales) es de 140 cm, calcule el área.



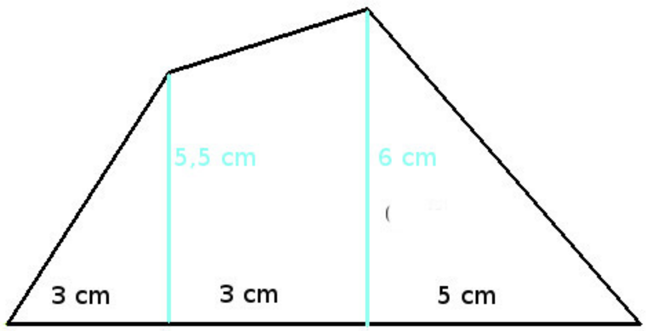
S3. Calcule el área de un hexágono regular sabiendo que está inscrito en una circunferencia de radio 5 cm. (En un hexágono inscrito en una circunferencia, los 6 triángulos son equiláteros).



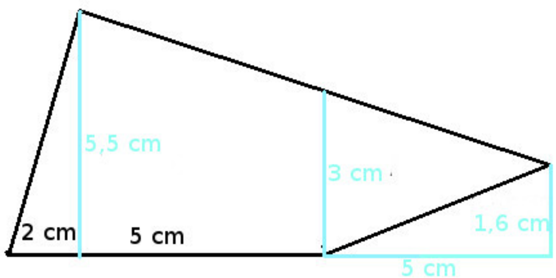
S4. Calcule el área con color de la siguiente figura sabiendo que el cuadrado inscrito en la circunferencia tiene por lado 2 cm.



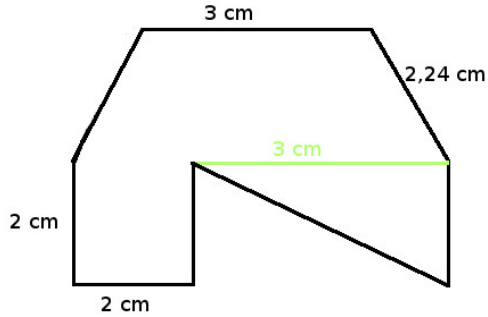
S5. Calcule el área y el perímetro de la siguiente figura.



S6. Calcule el área y el perímetro de la siguiente figura.



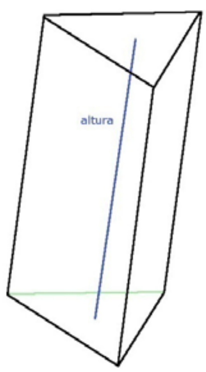
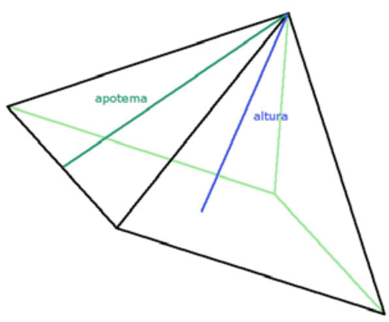
S7. Determine el perímetro y el área de la siguiente figura.



2.1.2 Área de cuerpos geométricos

Antes de plantear cómo calcular el área lateral de los diferentes cuerpos geométricos, expondremos algunos conceptos básicos ya explicados en módulos anteriores, pero que conviene repasar.

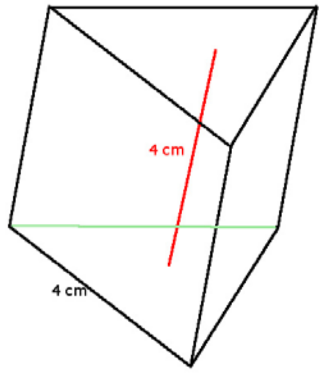
- Prisma: cuerpo geométrico que tiene dos caras que son polígonos iguales y paralelos entre sí (bases) y el resto de las caras (caras laterales) son paralelogramos. La altura del prisma es la distancia entre las bases.
- Pirámide: cuerpo geométrico que tiene por base un polígono y sus caras laterales son triángulos con un vértice en común (**vértice**). La altura de la pirámide es la distancia de la base a dicho vértice. Se llama **apotema** la altura de cualquiera de sus caras laterales.

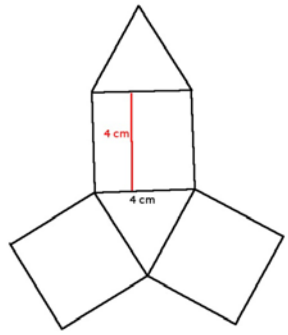
Prisma triangular	Pirámide cuadrangular
	

Para calcular el área de un prisma o de una pirámide es suficiente con saber hacer su desarrollo plano, allí podremos calcular las áreas de las diferentes figuras geométricas planas con las fórmulas que ya conocemos del apartado anterior.

Actividades resueltas

Calcule las áreas de estos cuerpos geométricos:



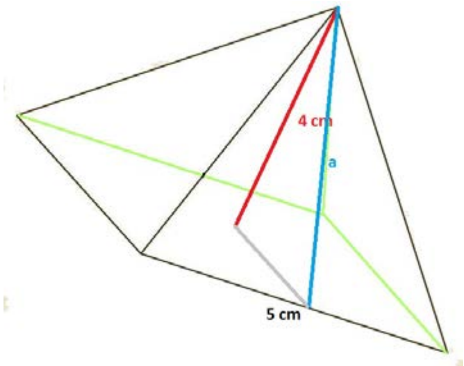


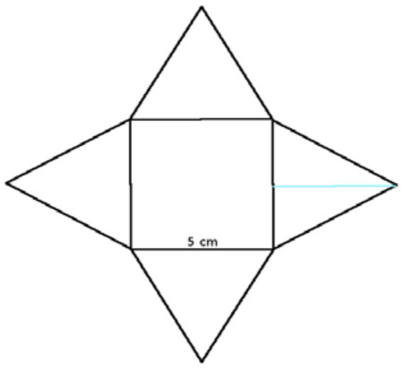
En este caso $A_{prisma\ triangular} = 3 \cdot A_{cuadrado} + 2 \cdot A_{triángulo\ equilátero}$.

Calculemos, utilizando el teorema de Pitágoras, la altura del triángulo equilátero.

$4^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = \sqrt{16 - 4} = 3{,}46\ cm$

Por lo tanto, $A_{prisma\ triangular} = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 61{,}84\ cm^2$





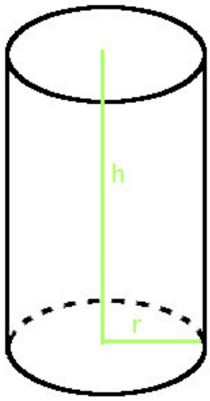
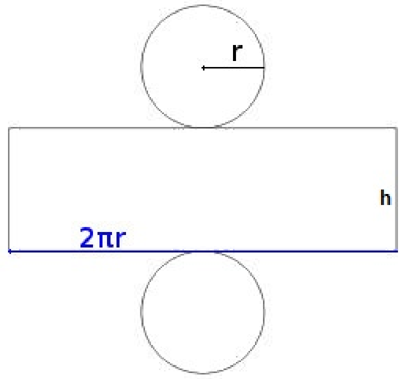
En este caso $A_{pirámide\ cuadrangular} = A_{cuadrado} + 4 \cdot A_{triángulo}$.

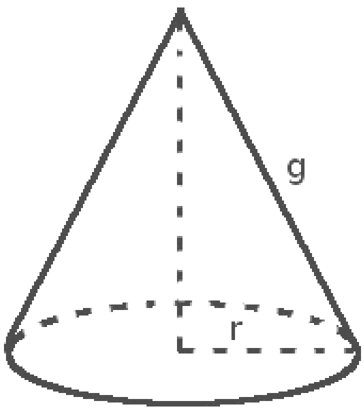
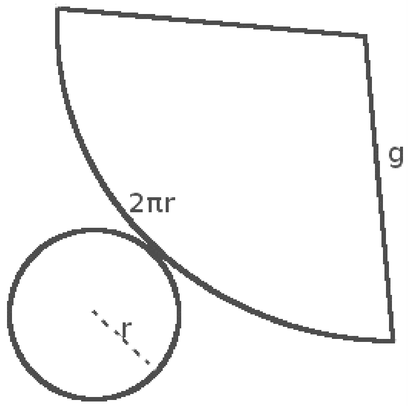
Calculemos el apotema, *a*, utilizando el triángulo rectángulo que se ve en la primera figura.

$$a^2 = 4^2 + 2{,}5^2 \rightarrow a = \sqrt{16 + 6{,}25} = 4{,}72\ cm$$

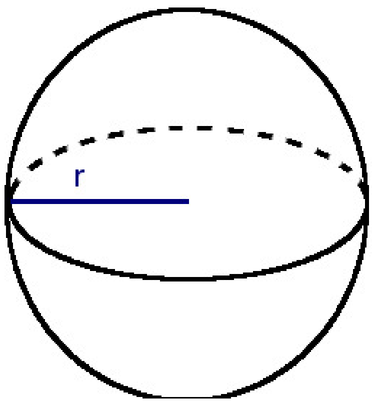
Por lo tanto, $A_{pirámide\ cuadrangular} = 5^2 + 4 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}72}{2} = 72{,}2\ cm^2$

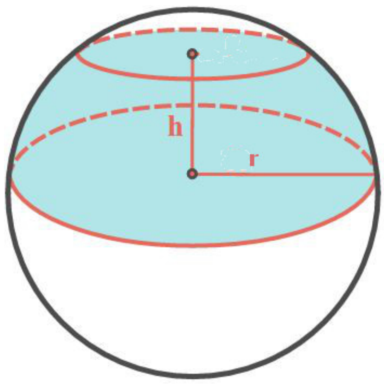
- Los cuerpos de revolución son los cuerpos geométricos que se obtienen al girar una figura plana alrededor de una recta (eje del giro). Solo estudiaremos aquí el cilindro, el cono y la esfera.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

$$A_{cilindro} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} =$$
$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

$$A_{cono} = A_{lateral} + A_{base} =$$
$$= \pi rg + \pi r^2$$</td>
</tr>
</table>

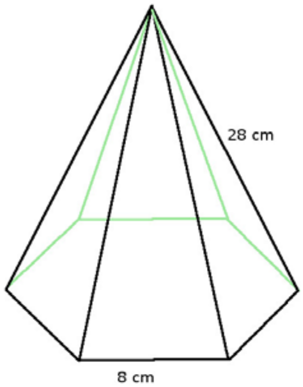
<table>
<tr>
<td>

$$A_{esfera} = 4\pi r^2$$</td>
<td>

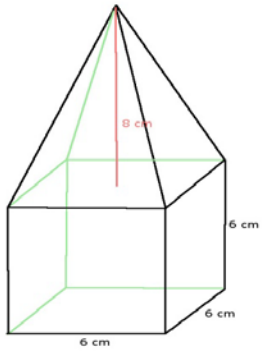
$$A_{zona\ esférica} = 2\pi rh$$</td>
</tr>
</table>

Actividades propuestas

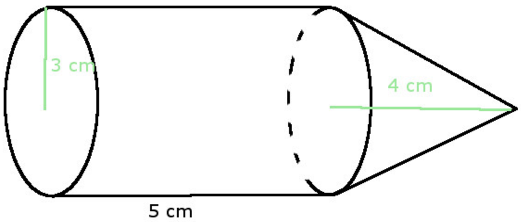
S8. Calcule el área de esta pirámide hexagonal.



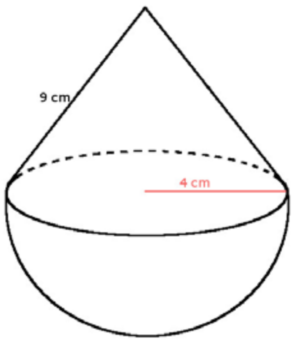
S9. Calcule el área de esta figura.



S10. Calcule el área de esta figura.

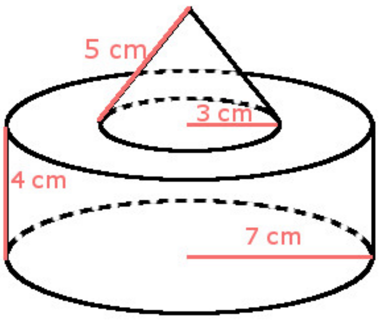


S11. Calcule el área de esta figura.



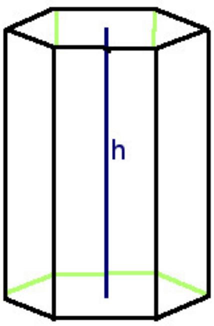
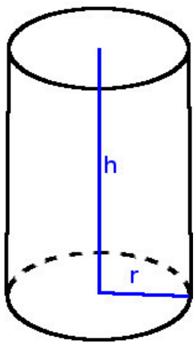
S12. Calcule el área de esta figura.

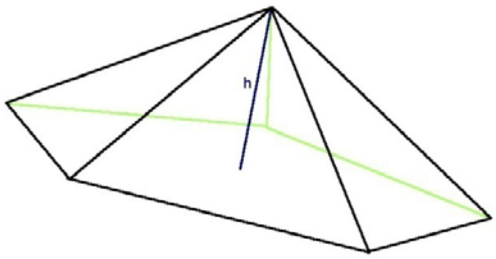
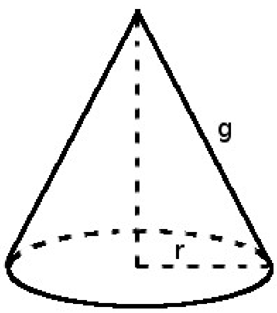
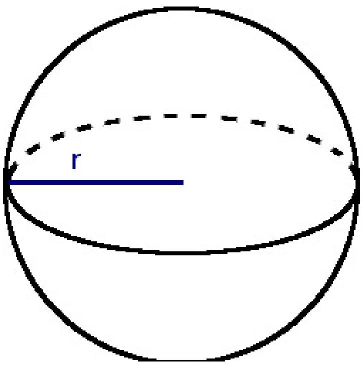
S13. Calcule el área de esta figura.



2.1.3 Volumen de cuerpos geométricos

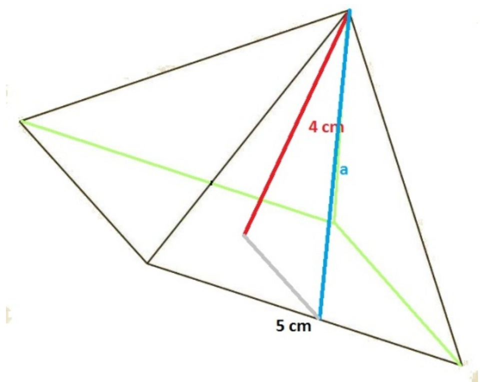
El volumen del cuerpo es la cantidad de espacio que queda cerrado en su interior.

	$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$
	$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h$

	$V_{pirámide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$
	$V_{cono} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$
	$V_{cono} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Actividad resuelta

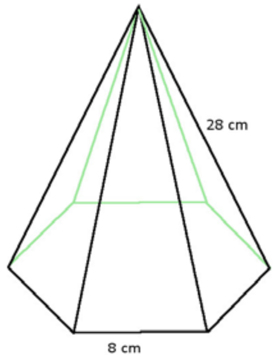
Calcule el volumen de esta figura:



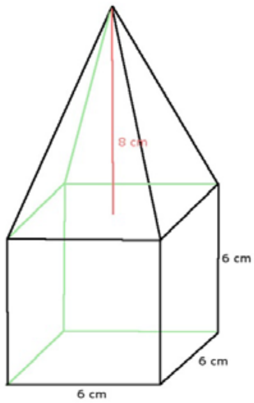
$$V_{pirámide\ cuadrangular} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{5^2 \cdot 4}{3} = 33{,}33\ cm^3$$

Actividades propuestas

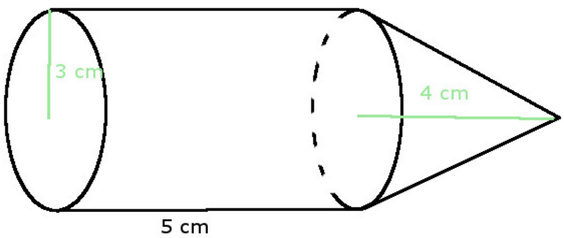
S14. Calcule el volumen de esta pirámide hexagonal.



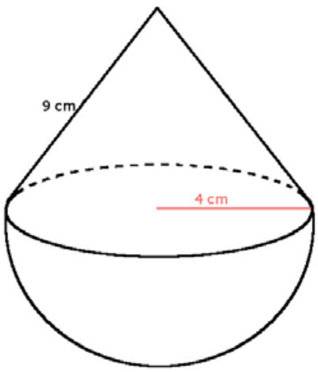
S15. Calcule el volumen de esta figura.



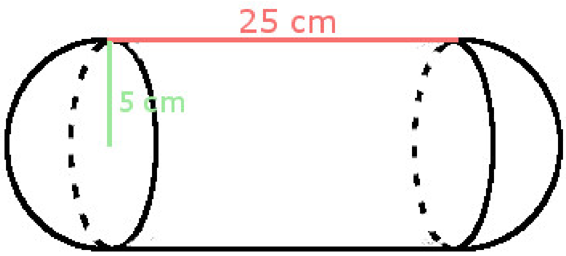
S16. Calcule el volumen de esta figura.



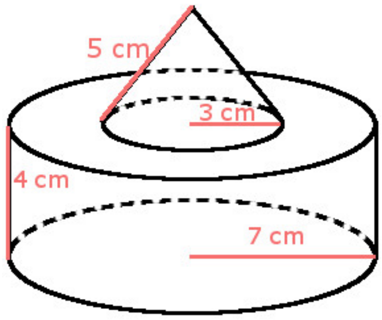
S17. Calcule el volumen de esta figura.



S18. Calcule el volumen de esta figura.



S19. Calcule el volumen de esta figura.



2.1.4 Semejanza

Podemos decir que dos figuras son semejantes si conservan la misma forma. Es muy útil saber si dos figuras son semejantes para poder estudiar ciertas características en alguna de ellas sabiéndolas en la otra. Esto puede suceder en nuestra vida cuando una de las figuras es inaccesible, porque es demasiado grande o pequeña, pero sabemos ciertas características de una accesible semejante.

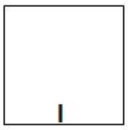
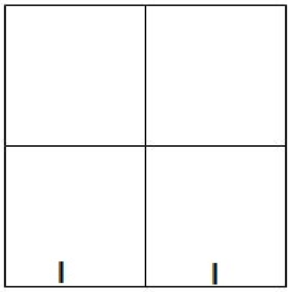
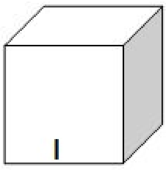
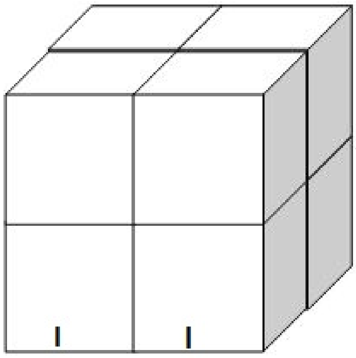
Dos polígonos son semejantes cuando sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales. La razón entre sus lados se llama razón de semejanza.

Un ejemplo muy común de razón de semejanza en nuestra vida diaria es la llamada escala. Podemos encontrar diversas formas de representar un modelo a escala:

- Cuando decimos que tenemos una representación de un insecto a una escala de 5X, estamos diciendo que nuestro modelo es 5 veces más grande que el insecto en la realidad.
- Cuando observamos un mapa de una planta de un edificio a una escala 1:100, queremos decir que cualquier línea dibujada en el plano es 100 veces más pequeña de lo que es en la realidad.

Semejanzas en áreas y volúmenes

Observemos las siguientes figuras y como se ve afectada la razón de semejanza del área y del volumen:

 $A_1 = l \cdot l = l^2$	 $A = 2l \cdot 2l = 4l^2 = 2^2 \cdot A_1$
 $V_1 = l \cdot l \cdot l = l^3$	 $V = 2l \cdot 2l \cdot 2l = 48 = 2^3 \cdot V_1$

De esto podemos concluir que, si la razón de semejanza fuese *r*, las áreas serían proporcionales con razón r^2 y los volúmenes con razón r^3.

Actividad resuelta

Consideremos dos prismas triangulares con razón de semejanza entre ellos de razón 4. Si el primero, y más pequeño, tuviese un área lateral de $56\, m^2$ y volumen $650\, m^3$, ¿cuál sería el área lateral y el volumen del mayor?

Si llamamosA_M, A_m, V_M y V_m , área lateral del mayor, área lateral del menor, volumen del mayor y volumen del menor respectivamente, tenemos que:

- $A_M = 4^2 \cdot A_m = 16 \cdot 56 = 896\, m^2$
- $V_M = 4^3 \cdot V_m = 64 \cdot 650 = 2600\, m^3$

Actividades propuestas

S20. Calcule la razón de semejanza que existe entre dos triángulos de bases 5 *cm* y 9 *cm*.

S21. Calcule el radio de una esfera cuya área lateral es 78,54 cm^2. ¿Qué volumen tendrá una esfera semejante con razón de semejanza de 1,25?

S22. En una tartera de radio 22 cm echamos agua hasta una altura de 5 cm. Cuando echamos las lentejas para cocinarlas, la altura sube hasta 8 cm. ¿Qué volumen de lentejas vamos a cocinar?

S23. Calcule el área lateral y el volumen de una pirámide cuadrangular con $3\,m$ de lado de la base y $6\,m$ de altura. Si construimos una pirámide semejante con razón 0,75, ¿cuál sería el área y el volumen de esta nueva pirámide?

S24. Si tenemos dos cubos semejantes con áreas laterales de $25\,cm^2$ y $306{,}25\,cm^2$, ¿cuál es la razón de semejanza?

S25. En una determinada marca de pizzas tienen varios precios: 13 €, 16 € y 21 €. Los diámetros de las pizzas son: 15 cm, 20 cm y 30 cm. ¿Cuál resulta más económica? Tenga en cuenta la razón de semejanza entre los diámetros y las áreas al comparar los precios.

2.2 Ángulos, razones trigonométricas y aplicaciones

2.2.1 Medidas de un ángulo

En los módulos anteriores siempre utilizamos como medida de amplitud de un ángulo el sistema sexagesimal, donde la unidad de medida era el grado, que se expresaba por el símbolo º, y sus divisores eran el minuto, que se expresaba por ´, y el segundo, que se expresaba por ´´. En ese sistema, un ángulo de amplitud de una circunferencia completa tiene una medida de 360º.

En el sistema internacional, la unidad de medida de ángulos es el radián. Un radián, que se expresa por *rad,* es la amplitud de un ángulo, con vértice en el centro de una circunferencia, que abarca un arco cuya longitud es exactamente igual al radio de la circunferencia.

Como sabemos que la longitud de una circunferencia es de $2\pi r$, entonces en la circunferencia podemos encontrar 2π arcos de longitud un radio, por lo tanto, un ángulo que abarque la circunferencia completa tendrá una medida de $2\pi\ rad$.

Equivalencia entre grados sexagesimales y radianes

$$360^{\circ} \leftrightarrow 2\pi rad$$

Actividades resueltas

Exprese en radianes 30º

Mediante una regla de tres podemos establecer que $x = \frac{30 \cdot 2\pi\, rad}{360} = \frac{\pi}{6} rad$

Exprese en grados $\frac{\pi}{3}\, rad$

Utilizando la equivalencia anterior obtenemos que $x = \frac{360 \cdot \pi}{3 \cdot 2\pi} = 60^{o}$

Actividades propuestas

S26. Exprese en radianes estos ángulos expresados en grados:

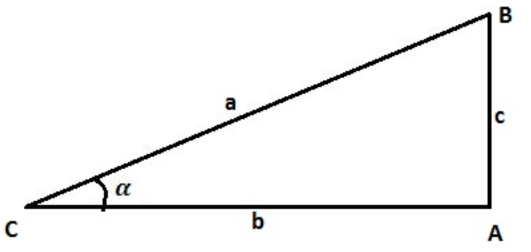
270^{o}	720^{o}	180^{o}	330^{o}

S27. Exprese en grados estos ángulos expresados en radianes:

$3\pi\, rad$	$\frac{\pi}{2}\, rad$	$\frac{3\pi}{4}\, rad$	$\frac{7\pi}{2}\, rad$

2.2.2 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Dado un triángulo rectángulo, como el que se muestra en la figura, las razones trigonométricas de un ángulo agudo, α, son las siguientes:

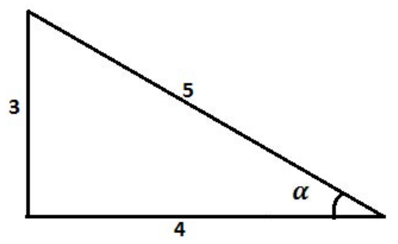
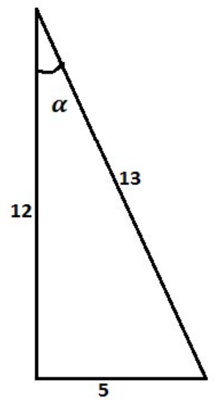
Seno de α, $sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$	
Coseno de α, $cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$	
Tangente de α, $tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{c}{b}$	

Las razones trigonométricas cumplen ciertas propiedades que conviene conocer:

- $0 \leq sen\alpha \leq 1$ y $0 \leq cos\alpha \leq 1$, puesto que dividimos longitudes de segmentos y la hipotenusa es siempre de mayor longitud que la de los catetos.
- $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$
- $(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$. Esta propiedad es fácil de comprobar si tenemos en cuenta el teorema de Pitágoras.

Actividades propuestas

S28. Calcule las razones trigonométricas del ángulo α en los siguientes triángulos:

S29. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $\sqrt{18}\ cm$ y la tangente de uno de sus ángulos es 1. Calcule cuánto miden los catetos.

S30. Desde un acantilado de 40 metros de altura vemos, bajo un ángulo de 30^{o}, un barco que está pescando. ¿A qué distancia de la costa se encuentra la embarcación?

S31. Si nos separamos en línea recta 30 m de la base de una antena, solo hay que levantar la vista 30^{o} para ver la parte más alta. ¿Cuál es la altura de la antena?

S32. El viento tensa una cuerda de 10 m de una veleta, el ángulo de elevación es de 60^{o}, ¿a qué altura se encuentra la veleta?

S33. Una escalera de dos brazos abierta mide de alto 1,50 m, si el ángulo entre los dos brazos es de 60^{o}, calcule cuánto mide cada brazo.

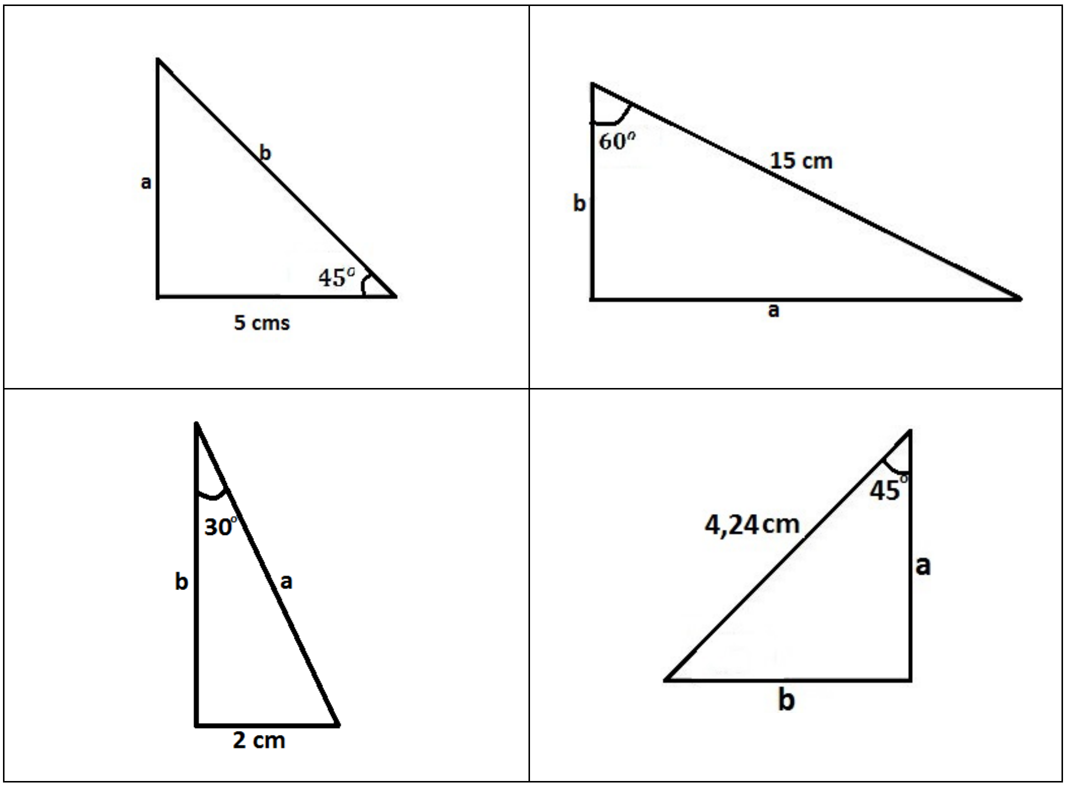
S34. Calcule la altura de una torre que proyecta una sombra de 25 m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 45^{o} con el suelo.

S35. Los brazos de un compás miden 10 cm y forman un ángulo de 60^o. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

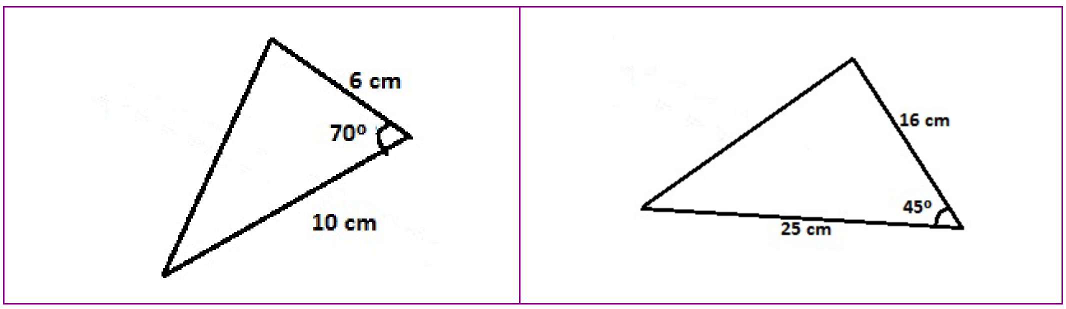
S36. Una persona que mide 1,81 m proyecta una sombra de 2,25 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol (rayos del Sol con el suelo)?

S37. ¿Cuál es el ángulo que forman los rayos del Sol con el suelo si la sombra de un edificio es justo la mitad de su altura?

S38. Calcule los valores de *a* y *b* en estos triángulos rectángulos:



S39. Calcule el área de estos triángulos:



2.2.3 Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es calcular todas las medidas de sus lados y de sus ángulos a partir de otros elementos conocidos. Tenemos que recordar que de un triángulo rectángulo conocemos:

a) Un ángulo, que mide 90º.

b) La suma de los otros dos ángulos tiene que ser 180º.

c) Sus lados cumplen el teorema de Pitágoras.

De los apartados a) y b) concluimos que, si conocemos un ángulo agudo, los conocemos todos.

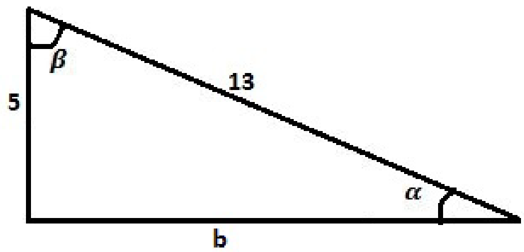
Del apartado c) obtenemos que, si conocemos dos lados, los conocemos todos.

Considerando estas dos conclusiones, junto con las razones trigonométricas que relacionan lados y ángulos, podemos encontrarnos con estos dos tipos de problemas a la hora de resolver triángulos rectángulos:

– Resolver un triángulo rectángulo conocidos dos de sus lados.
– Resolver un triángulo rectángulo conocidos un lado y un ángulo.

Actividades resueltas

Resuelva el siguiente triángulo



Calculemos b por el teorema de Pitágoras

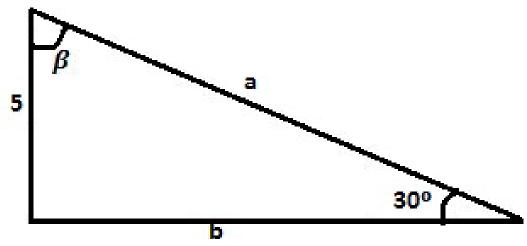
$$13^2 = 5^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Calculemos α y β.

$$sen\alpha = \frac{5}{13} \rightarrow \alpha = (sen)^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = 22{,}62^o$$

$$Puesto\ que\ 22{,}62 + \beta = 90 \rightarrow \beta = 67{,}38^o$$

Resuelva el siguiente triángulo



Calculemos β

$Puesto\ que\ \beta + 30 = 90 \rightarrow \beta = 60^o$

Calculemos *a* y *b.*

$sen30 = \frac{5}{a} \rightarrow a = \frac{5}{sen30} = 10$

Por el teorema de Pitágoras sabemos que

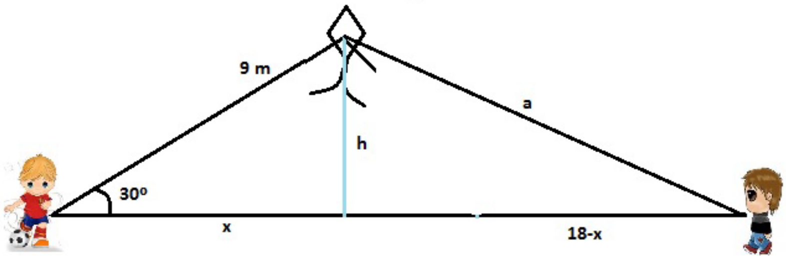
$10^2 = 5^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66$

Técnica de la doble observación

Se utiliza esta técnica para resolver ciertos problemas geométricos donde nos es imposible la medición de una longitud. Para eso, lo que intentamos es encontrar dos triángulos rectángulos que compartan un lado y, con la ayuda de aparatos que miden ángulos, acabar resolviendo el problema.

Actividad resuelta

Un niño juega con una veleta, suelta los 9 m de cuerda con una inclinación de 30º debido al viento, como muestra la figura. ¿A que distancia está la veleta de un segundo niño que se encuentra a una distancia del primero de 18 m? ¿A que altura del suelo está la veleta?



Calculemos *h*.

$sen30 = \frac{h}{9} \rightarrow h = 9 \cdot sen30 = 4{,}5\ m$

Calculemos la distancia de la veleta al segundo niño, a. Para eso calculemos primero x.

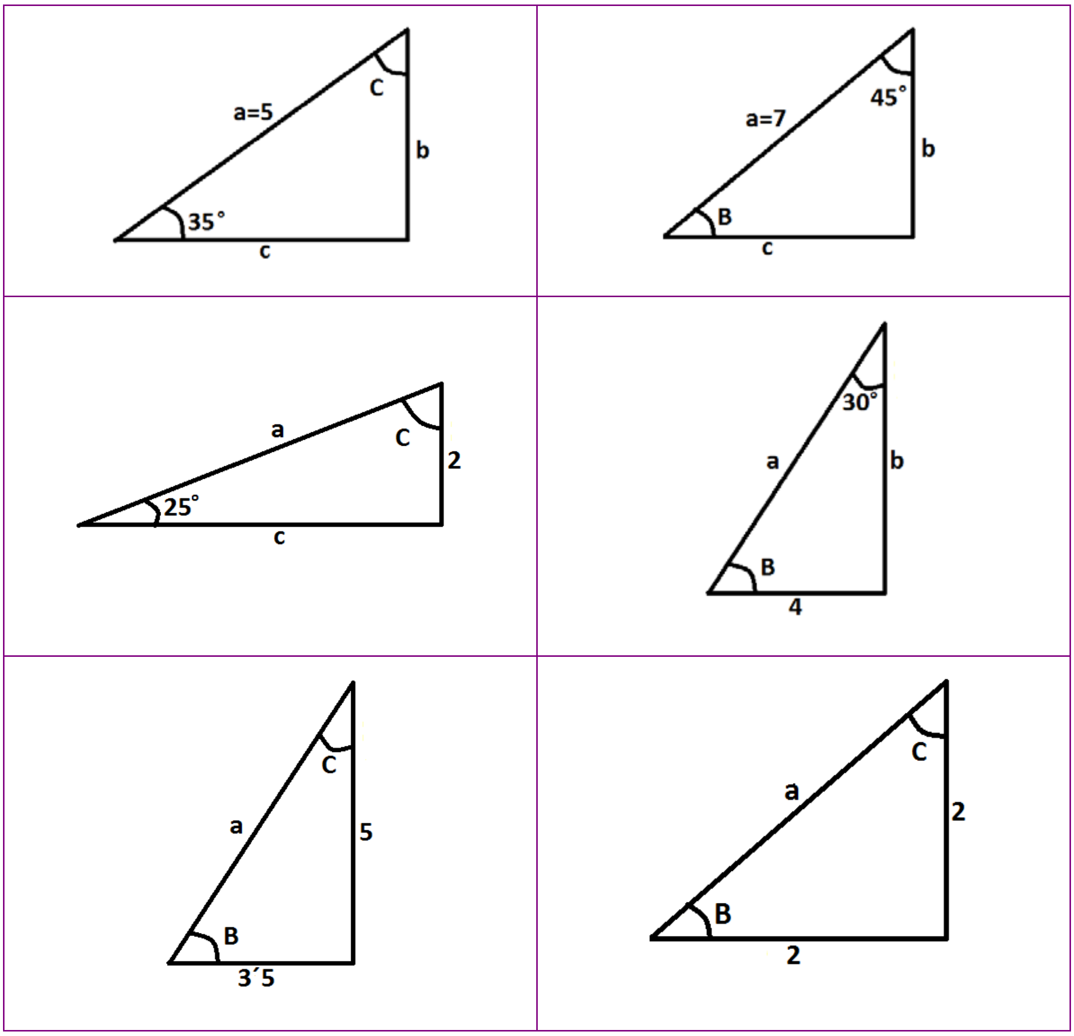
$$9^2 = 4{,}5^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{81 - 20{,}25} = 7{,}79\ m$$

La distancia del segundo niño a la base en el suelo de la cometa es de $18 - x = 18 - 7{,}79 = 10{,}21\ m$, por lo tanto:

$$a^2 = 4{,}5^2 + 10{,}21^2 \rightarrow a = \sqrt{20{,}25 + 104{,}24} = 11{,}16\ m$$

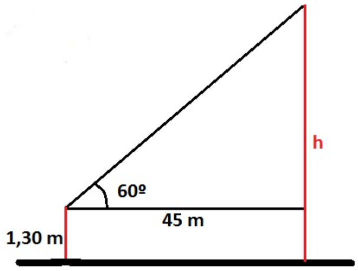
Actividades propuestas

S40. Resuelva los siguientes triángulos rectángulos:

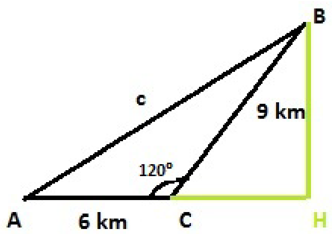


S41. En un río hay dos embarcaderos, uno en frente del otro, queremos cruzar en línea recta nadando. Debido a la fuerza del río, acabamos recorriendo 25 m, con 45º de desviación. Calcule la anchura del río y cuanta distancia tenemos que cruzar nadando hasta llegar al embarcadero.

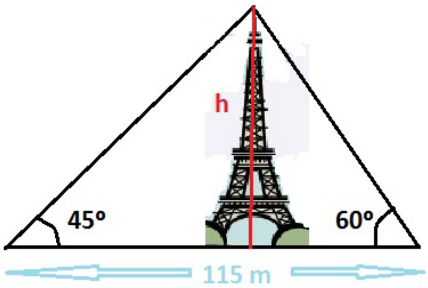
S42. El ángulo de elevación de una torre es de 60º a una distancia de 45 m de la torre. Si el observador se encuentra a 1,30 m sobre el suelo (altura de los ojos), calcule la altura de la torre.



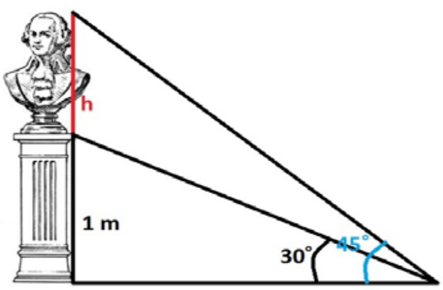
S43. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras. La distancia de A a C es de 6 km y la de B a C de 9 km. El ángulo que forman las carreteras es de 120º. Calcule la distancia de A a B. Observe la siguiente figura.



S44. Dos personas ven desde las puertas de sus casas una réplica de la torre de Eiffel bajo ángulos de 45º y 60º. La distancia entre sus casas es de 115 m y la torre está situada entre sus casas. Calcule la altura de la torre. Observe el dibujo. (Presente dos ecuaciones utilizando las tangentes de los ángulos).

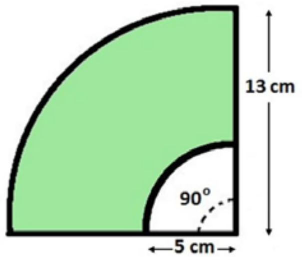


S45. Una escultura está colocada sobre un pedestal de 1 m de altura. Desde una determinada distancia se ve la escultura bajo un ángulo de 45° y el pedestal bajo un ángulo de 30°. ¿Cuál es la altura de la escultura? Observe el siguiente dibujo.

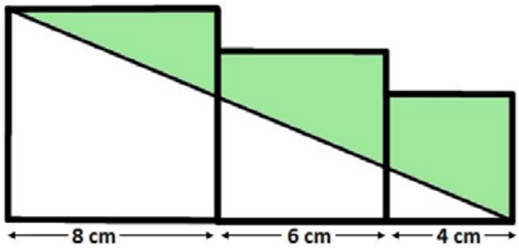


3. Actividades finales

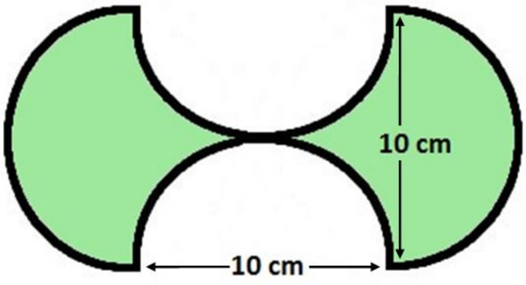
S46. Calcule el área de la parte sombreada.



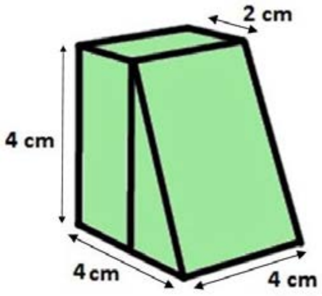
S47. Calcule el área de la parte sombreada.



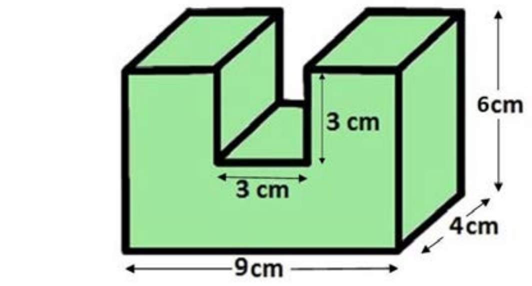
S48. Calcule el área de la parte sombreada.



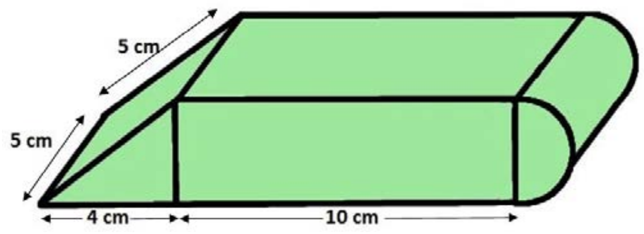
S49. Calcule el área y el volumen de este cuerpo geométrico.



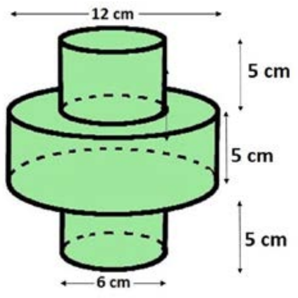
S50. Calcule el área y el volumen de este cuerpo geométrico.



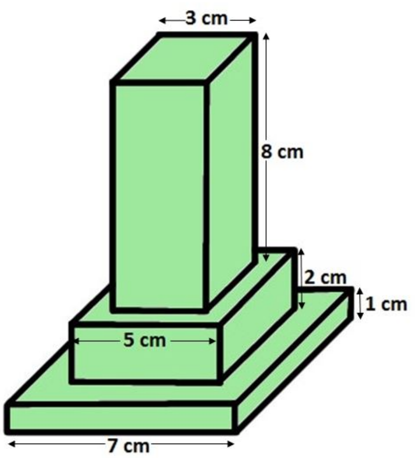
S51. Calcule el área y el volumen de este cuerpo geométrico.



S52. Calcule el área y el volumen de este cuerpo geométrico.



S53. Calcule el área y el volumen de este cuerpo geométrico teniendo en cuenta que las bases de los prismas son cuadradas.



S54. Si triplicamos los lados de un trapecio, ¿en cuánto aumentará su área?

S55. ¿En cuánto tenemos que dividir el radio de una esfera para que su volumen sea 125 veces menor?

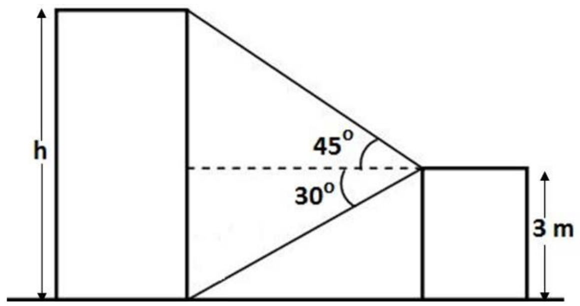
S56. Exprese los radianes de estos ángulos expresados en grados y viceversa:

72^o	$\frac{3\pi}{2}\ rad$	20^o	$\frac{3\pi}{4}\ rad$
$\frac{\pi}{5}\ rad$	108^o	$\frac{\pi}{10}\ rad$	18^o
120^o	$\frac{\pi}{9}\ rad$	36^o	$\frac{5\pi}{6}\ rad$
$\frac{5\pi}{2}\ rad$	540^o	$5\pi\ rad$	40^o

S57. Un árbol de 25 m de alto proyecta una sombra de 30 m en el suelo. Si nos situamos en el suelo justo donde termina la sombra, ¿cuál sería el ángulo con el que vemos el punto más alto del árbol?

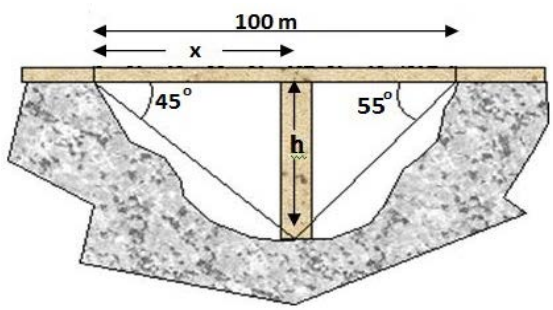
S58. Desde un globo que está a 120 m de altura vemos un pueblo con un ángulo de 20^o, calcule la distancia que hay en línea recta desde el globo hasta el pueblo.

S59. Calcule *h*.

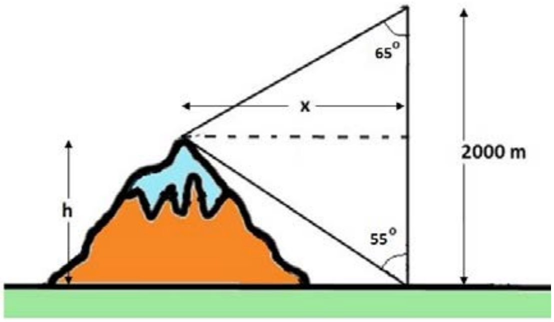


S60. Calcule la altura de un árbol sabiendo que desde el punto donde está situado un observador ve el punto más alto con un ángulo de 30^o y, si se aproxima al árbol 15m, bajo un ángulo de 55^o.

S61. Observe el siguiente dibujo y calcule la altura (h) del puente.



S62. Observe el siguiente dibujo y calcule la altura de la montaña.



4. Solucionario

4.1 Soluciones de las actividades propuestas

Estamos utilizando para la resolución de los problemas un redondeo a dos cifras decimales y $\pi = 3{,}14$.

S1. 234 €.

S2. $A = 894{,}4\ cm^2$.

S3. $A = 64{,}95\ cm^2$.

S4. $A_{sombreada} = 1{,}14\ cm^2$.

S5. $P = 28{,}11\ cm$ y $A = 40{,}5\ cm^2$.

S6. $P = 28{,}87\ cm$ y $A = 34{,}25\ cm^2$.

S7. $P = 19{,}09\ cm$ y $A = 15\ cm^2$.

S8. $A = 692{,}76\ cm^2$.

S9. $A = 282{,}48\ cm^2$.

S10. $A = 169{,}56\ cm^2$.

S11. $A = 213{,}52\ cm^2$.

S12. $A = 1099\ cm^2$.

S13. $A = 502{,}4\ cm^2$.

S14. $V = 1487{,}46\ cm^3$.

S15. $V = 312\ cm^3$.

S16. $V = 178{,}98\ cm^3$.

S17. $V = 268{,}95\ cm^3$.

S18. $V = 2485{,}83\ cm^3$.

S19. $V = 653{,}12\ cm^3$.

S20. $r = 1{,}8$.

S21. $V = 128{,}38\ cm^3$.

S22. $V = 4559{,}28\ cm^3$.

S23. $V = 25{,}92\ cm^2$ y $V = 7{,}59\ cm^3$.

S24. $r = 3{,}55$.

S25. La de 30 cm.

S26.

$\frac{3\pi}{2}\ rad$	$4\pi\ rad$	$\pi\ rad$	$\frac{11\pi}{6}\ rad$

S27.

540^o	90^o	135^o	630^o

S28.

$sen\alpha = \frac{3}{5}, cos\alpha = \frac{4}{5}\ e\ tg\alpha = \frac{3}{4}$	$sen\alpha = \frac{5}{13}, cos\alpha = \frac{12}{13}\ e\ tg\alpha = \frac{5}{12}$

S29. *Ambos miden 3 cm.*

S30. *A 23,09 m.*

S31. *La altura es de 35,75 m.*

S32. *La veleta se encuentra a 8,66 m.*

S33. *El brazo mide 1,72 m.*

S34. *La altura de la torre es de 25 m.*

S35. *El radio de la circunferencia es de 10 cm.*

S36. *El ángulo es de 38,81^o.*

S37. *Un ángulo de 63,43^o.*

S38.

$a = 5\ cm\ y\ b = \sqrt{50}\ cm$	$a = 13{,}05\ cm\ y\ b = 7{,}5\ cm$
$a = 4\ cm\ y\ b = \sqrt{12}\ cm$	$a = 3\ cm\ y\ b = 3\ cm$

S39.

$A = 28{,}2\ cm^2$	$A = 142\ cm^2$

S40. *Los lados están calculados utilizando las funciones trigonométricas y redondeando a la segunda cifra decimal, es por eso que no se cumple exactamente el teorema de Pitágoras.*

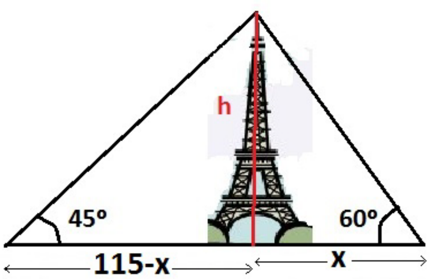
$a = 5, b = 2{,}85\ e\ c = 4{,}1$ $A = 90°, B = 35°\ e\ C = 55°$	$a = 7, b = 4{,}97\ e\ c = 4{,}97$ $A = 90°, B = 45°\ e\ C = 45°$
$a = 4{,}76, b = 2\ e\ c = 4{,}26$ $A = 90°, B = 25°\ e\ C = 65°$	$a = 8, b = 6{,}9\ e\ c = 4$ $A = 90°, B = 60°\ e\ C = 30°$
$a = 6{,}1\ , b = 5\ e\ c = 3{,}5$ $A = 90°, B = 55{,}03°\ e\ C = 34{,}97°$	$a = 2{,}83\ , b = 2\ e\ c = 2$ $A = 90°, B = 45°\ e\ C = 45°$

S41. *El río tiene una anchura de 17,75 m y tenemos que andar otros 17,75 m hasta el embarcadero.*

S42. *La torre tiene una altura de 79,15 m*.

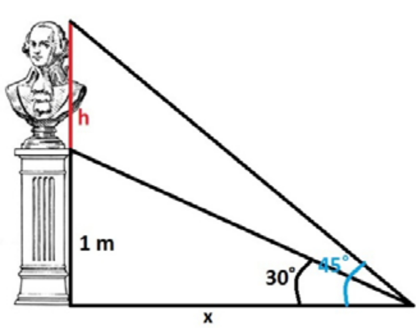
S43. *La distancia es de 13,10 km*.

S44. *Observe la siguiente figura*.



Utilizando las definiciones de tangente en los dos ángulos y resolviendo el sistema obtenemos que la altura de la torre es de 72,88 m.

S45. Observe la siguiente figura



Llamando x a la distancia desde el observador al pie del pedestal, y utilizando las definición de tangente de 30°, la altura de la escultura es de 0,72 m.

4.2 Soluciones de las actividades finales

Estamos utilizando para la resolución de los problemas un redondeo a dos cifras decimales y $\pi = 3{,}14$.

S46. $A = 113{,}04\ cm^2$.

S47. $A = 44\ cm^2$.

S48. $A = 100\ cm^2$.

S49. $A = 81{,}88\ cm^2$ y $V = 48\ cm^3$.

S50. $A = 234\ cm^2$ y $V = 180\ cm^3$.

S51. $A = 247{,}62\ cm^2$ y $V = 197{,}66\ cm^3$.

S52. $A = 602{,}88\ cm^2$ y $V = 847{,}8\ cm^3$.

S53. $A = 262\ cm^2$ y $V = 171\ cm^3$.

S54. Su área aumentará 9 veces.

S55. El radio tiene que ser 5 veces menor.

S56.

$\frac{2\pi}{5}\ rad$	270^o	$\frac{\pi}{9}\ rad$	135^o
36^o	$\frac{3\pi}{5}\ rad$	18^o	$\frac{\pi}{10}\ rad$
$\frac{2\pi}{3}\ rad$	20^o	$\frac{\pi}{5}\ rad$	150^o
450^o	$3\pi\ rad$	900^o	$\frac{2\pi}{9}\ rad$

S57. *Desde un ángulo de* $39{,}81^o$.

S58. *La distancia es de 127,7 m.*

S59. $h = 8{,}20\ m$.

S60. *Utilizamos el método de la doble tangente y redondeamos a la segunda cifra decimal los cálculos de las tangentes, obtenemos entonces una altura de 14,64 m.*

S61. *Tiene una altura de 58,85 m.*

S62. *Utilizamos el método de la doble tangente y redondeamos a la segunda cifra decimal los cálculos de las tangentes, obtenemos entonces una altura de 1198,88 m.*

5. Glosario

A	▪ Apotema	Perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados. Altura de las caras triangulares de una pirámide regular.
	▪ Área	Concepto métrico que permite asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada en unidades de medida denominadas unidades de superficie.
P	▪ Pirámide	Cuerpo geométrico que tiene por base un polígono y sus caras laterales son triángulos con un vértice en común (vértice).
	▪ Prisma	Cuerpo geométrico que tiene dos caras que son polígonos iguales y paralelos entre sí (bases) y el resto de las caras (caras laterales) son paralelogramos.
R	▪ Radián	Amplitud de un ángulo, con vértice en el centro de una circunferencia, de exactamente un arco igual al radio de la circunferencia.
	▪ Razón trigonométrica	Razón entre los lados de un triángulo rectángulo.
S	▪ Semejanza	Entre dos polígonos, cuando los lados son proporcionales y los ángulos iguales. Entre dos figuras cualesquiera, si tienen la misma forma.
V	▪ Volumen	Cantidad de espacio que queda cerrado en el interior de un cuerpo.

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- Matemáticas Enseñanzas aplicadas. Serie Soluciona. 4.º ESO. Editorial Santillana.
- Matemáticas Enseñanzas académicas. Serie Resuelve. 4.º ESO. Editorial Santillana.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4.º Eso. Editorial Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4.º Eso. Editorial Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4º de la ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4.º de la ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.

Enlaces de Internet

En estos enlaces puede encontrar trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://www.ematematicas.net/
- https://matematicasiesoja.wordpress.com/
- http://www.apuntesmareaverde.org.es/
- http://www.vitutor.com/
- http://www.profesorenlinea.cl/geometria/
- http://educalab.es/recursos

7. Anexo. Licencia de recursos

Licencias de recursos utilizados en esta unidad didáctica

RECURSO (1)	DATOS DEL RECURSO (1)	RECURSO (2)	DATOS DEL RECURSO (2)
 RECURSO 1	▪ Licencia: Xunta de Galicia ▪ Procedencia: Imágenes predefinidas Office	 RECURSO 2	▪ Licencia: Xunta de Galicia ▪ Procedencia: : Imágenes predefinidas Office
 RECURSO 3	▪ Licencia: Xunta de Galicia ▪ Procedencia: Imágenes predefinidas Office	 RECURSO 4	▪ Licencia: Xunta de Galicia ▪ Procedencia: Imágenes predefinidas Office