XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
Dirección Xeral de Educación, Formación
Profesional e Innovación Educativa

Educación secundaria
para personas adultas

Ámbito científico tecnológico

Educación a distancia semipresencial

Módulo 4

Unidad didáctica 1

Números y álgebra

Índice

1. Introducción

1.1 Descripción

En esta unidad podemos distinguir dos bloques, un primer bloque dedicado a los números y otro al álgebra.

- Puesto que ya conocemos de módulos anteriores los números naturales $\mathbb{N}$, enteros $\mathbb{Z}$ y racionales $\mathbb{Q}$, en esta unidad estudiaremos los números irracionales $\mathbb{I}$, que junto a todos los anteriores conforman el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Además, aquí estudiaremos las potencias de exponente entero, fraccionario y los porcentajes.
- En el segundo bloque estudiaremos conceptos relacionados con el álgebra, los polinomios, la factorización, las ecuaciones de grado superior a dos y los sistemas de ecuaciones.

1.2 Conocimientos previos

Puesto que todas y cada una de las unidades de matemáticas están basadas en conocimientos progresivos sería interesante recordar:

- Cuáles son los números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.
- Los números decimales exactos, periódicos y como se transforman en fracciones.
- Las potencias de estos números con exponente entero y sus operaciones básicas.
- Las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Los sistemas de ecuaciones lineales y los diferentes métodos de resolución.

1.3 Criterios de evaluación

- Utilizar las propiedades de los números racionales, las raíces y otros números radicales para operar con ellos, utilizando la forma de cálculo y la notación adecuada para resolver problemas de la vida cotidiana y presentar los resultados con la precisión requerida.
- Utilizar el lenguaje algébrico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.
- Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algébricas, gráficas o recursos tecnológicos, así como valorar y contrastar los resultados obtenidos.

2. Secuencia de contenidos y actividades

2.1 El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

2.1.1 Números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Los números naturales son $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Los números enteros son $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Como se puede observar, los números enteros son una ampliación de los números naturales. Podemos decir que los números naturales son los enteros positivos. El cero es el único entero que no es ni positivo ni negativo.

Los números racionales son $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a\epsilon\mathbb{Z}, b\epsilon\mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.

Por ejemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{-2}{1} = -2$, $\frac{-7}{5}$, $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{0}{5} = 0$.

Como puede observar, todos los números naturales y enteros son también racionales.

2.1.2 Números racionales y expresiones decimales

- Los números decimales exactos son fracciones.

Actividad resuelta

Exprese 9,23 como fracción.

$$\mathbf{9,23} = \frac{923}{100}$$

- Los números decimales periódicos son fracciones.

Actividades resueltas

Exprese 1,2343434...... y 3,2525....como fracciones.

– $N = 1{,}2343434 \dots.$

$$1000N = 1234{,}3434 \dots$$
$$10N = 12{,}343434 \dots$$
$$Restando\ obtenemos\ 990N = 1222 \qquad N = \frac{1222}{990}$$

– $N = 3{,}252525 \dots.$

$$100N = 325{,}2525 \dots$$
$$N = 3{,}2525 \dots$$
$$Restando\ obtenemos\ 99N = 322 \qquad N = \frac{322}{99}$$

2.1.3 Números irracionales. Expresión decimal de los números irracionales

Existen otros números cuya expresión decimal es infinita y además no es periódica. Estos números son conocidos desde la antigua Grecia como números irracionales $\mathbb{I}$, puesto que para ellos, según su visión matemática de las cosas, eran algo insólito y raro.

Ejemplos:

- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots.$
- $\pi = 3{,}141592$ ... La relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro es uno de los números irracionales más importantes. Se emplea frecuentemente en matemáticas, física, ingeniería etc.
- $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033$ .... Es el llamado número de oro, proporción áurea, divina proporción y otros más nombres a lo largo de la historia. Podemos identificar el número áureo en las artes, en la naturaleza etc.
- $e = 2{,}718281$ .... Es el llamado número de Euler o constante de Napier. Su uso es trascendental en leyes físicas, economía, química etc.

2.1.4 Números reales

El conjunto de los números reales está formado por la unión de los números racionales y los números irracionales. Matemáticamente queda expresado de la siguiente manera $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Actividades propuestas

S1. Encuentre la expresión decimal de las siguientes fracciones:

$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{125}{1000}$	$\frac{4}{11}$
$\frac{6}{5}$	$\frac{525}{10000}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{532}{100}$
$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{4}{6}$

S2. Clasifique estos números en naturales, enteros, racionales o irracionales. Cuando sea posible, expréselos en forma de fracción.

$\frac{8}{4}$	$21,25$	$\frac{5}{10}$	$0,\widehat{26}$	$3,2\widehat{9}$
$3,\widehat{06}$	$2,1121231234\ldots$	$\sqrt{7}$	$\frac{-6}{2}$	$24,\widehat{9}$
$\sqrt{4}$	$\frac{7}{6}$	$2\cdot\pi$	$5,2\widehat{3}$	$\frac{-6}{2}$

2.2 Intervalos y semirrectas. Diferentes formas de expresión

2.2.1 Intervalos

- Llamaremos **intervalo abierto de extremos a y b** al conjunto de números que hay entre a y b sin contar estos extremos. Existen diferentes formas de representar este intervalo:
  - Mediante paréntesis: (a, b)
  - Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: a < x < b\}$
  - Mediante su representación gráfica 

Actividad resuelta

Exprese el intervalo abierto de extremos 3 y 4 de las diferentes formas estudiadas.

Intervalo abierto de extremos 3 y 4. Podemos representarlo de este modo:

- Mediante paréntesis: $(3,4)$
- Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: 3 < x < 4\}$
- Mediante su representación gráfica 

- Llamaremos **intervalo cerrado de extremos a y b** al conjunto de números que hay entre a y b contando estos extremos. Existen diferentes formas de representar este intervalo:
  - Mediante paréntesis: $[a, b]$
  - Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
  - Mediante su representación gráfica 

Actividad resuelta

Exprese el intervalo cerrado de extremos 5 y 10 de las diferentes formas estudiadas.

Intervalo cerrado de extremos 5 y 10. Podemos representarlo de este modo:

- Mediante paréntesis: $[5,10]$
- Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: 5 \leq x \leq 10\}$
- Mediante su representación gráfica 

- **Intervalos semiabiertos o semicerrados**. Estos intervalos son una mezcla de los dos anteriores.

Actividades resueltas

Exprese el intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha de extremos 3 y 4 y el intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha de extremos 5 y 10 de las diferentes formas estudiadas.

Intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha de extremos 3 y 4. Podemos representarlo de este modo:

- Mediante paréntesis: $(3,4]$
- Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: 3 < x \leq 4\}$
- Mediante su representación gráfica 

Intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha de extremos 5 y 10. Podemos representarlo de este modo:

- Mediante paréntesis: $[5, 10)$
- Mediante desigualdades: $\{x\epsilon\mathbb{R}: 5 \leq x < 10\}$
- Mediante su representación gráfica 

2.2.2 Semirrectas

Acontece muchas veces que el conjunto que vamos a estudiar no está acotado por uno de sus extremos. Este es el caso de las que llamamos semirrectas.

Actividad resuelta

Dadas las siguientes semirrectas, intente expresarlas de las otras dos formas conocidas si solo conocemos una de sus expresiones.

$(-\infty, -5)$	$\{x\epsilon\mathbb{R}: x < -5\}$	
$[-5, +\infty)$	$\{x\epsilon\mathbb{R}: x \geq -5\}$	
$(3, +\infty)$	$\{x\epsilon\mathbb{R}: x > 3\}$	
$(-\infty, 0]$	$\{x\epsilon\mathbb{R}: x \leq 0\}$	

Actividades propuestas

S3. Represente gráficamente en la recta real y en modo de desigualdades los siguientes intervalos:

$[-5,6]$	$(-1,5)$	$[-6,1)$
$(0, 6]$	$(-\infty, 2]$	$(0, +\infty)$

S4. Represente gráficamente en la recta real y exprese como intervalo o semirrectas estas desigualdades:

$-1 \leq x \leq 3$	$3 < x$	$x \leq -1$
$2 \leq x < 6$	$-3 < x < 7$	$x \geq 4$

S5. Exprese como intervalo o semirrecta y como desigualdades cada uno de estos conjuntos representados:

2.3 Potencias

2.3.1 Potencias de exponente natural y entero

- Dado un número real *a*, y *n* un número natural, la potencia de base *a* y exponente *n* $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \ldots \cdot a.a,$ *n* veces.
- Dado un número real *a*, y *n* un número natural, $a^{-n} = 1/a^n$

Actividades resueltas

Utilice las definiciones anteriores para desarrollar las potencias 2^4 y $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$.

- $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$

Utilice las definiciones anteriores para desarrollar las potencias 3^{-2} y $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$.

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

- Recordemos en este apartado las propiedades de las potencias.
  - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Ejemplo: $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$
  - $a^m : a^n = a^{m-n}$. Ejemplo: $2^7 : 2^9 = 2^{-2}$
  - $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Ejemplo: $(5^2)^3 = 5^6$
  - $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$. Ejemplo: $(2 \cdot 5)^3 = 2^2 \cdot 5^3$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$. Ejemplo $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$

Actividades propuestas

S6. Exprese como potencia de exponente negativo.

$\frac{1}{3^4}$	$\frac{4}{4^5}$
$-\frac{5}{5^8}$	$\frac{7}{7^6}$
$\frac{2^5}{2^9}$	$\frac{3}{3^6}$

S7. Opere y simplifique.

$(-3)^2 \cdot 3^3 : (-3)^{-2}$	$(-5)^2 \cdot 5^{-1} : 5^2$	$2^5 \cdot 2^{-1} : (-2)^3$
$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$
$\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^3$	$\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3$

S8. Exprese el resultado como una única potencia.

$\left[\frac{2^5}{2^{-2}}\right]^2$	$\left[\frac{3^{-3}}{3^4}\right]^3$	$\left[\frac{2^3}{4}\right]^{-2}$
$[2^{-3}\cdot 8^2]^{-2}$	$[9^{-1}\cdot(-3)^2]^{-1}$	$[(-5)^4\cdot 25^{-2}]^3$
$\frac{9^2\cdot 3^{-2}}{3^3}$	$\frac{8^{-1}\cdot 2^2}{4^{-1}}$	$\frac{9^2\cdot 3^2}{27^{-1}:3^{-2}}$

S9. Simplifique.

$\frac{3^3\cdot 5^2}{25\cdot 9^{-1}}$	$\frac{2^2\cdot 3^2}{8^{-2}\cdot 9^{-2}}$	$\frac{9^2\cdot 25^2}{5^5\cdot 27^2}$
$\frac{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{25^{-1}\cdot 9^{-2}}$	$\frac{2^2\cdot 3^3\cdot 25^2}{5^{-4}\cdot 27\cdot 4^{-1}}$	$\frac{9^3\cdot 6^{-2}}{10^1\cdot 18^2}$
$\frac{2^2\cdot 6^{-2}}{18^{-1}}$	$\frac{10^2\cdot 6^2}{5^{-2}\cdot 9^{-3}}$	$\frac{3^{-2}\cdot 6^2}{12^2}$

2.3.2 Potencias de exponente racional

Definimos potencia de base *a* y exponente fraccionario $\frac{m}{n}$ como: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Las propiedades citadas en el punto anterior son válidas para las potencias de exponentes fraccionarios.

Actividad resuelta

Calcule $4^{1/2}$ utilizando la definición anterior.

$$4^{1/2} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$$

Actividades propuestas

S10. Escriba estos radicales en forma de exponente fraccionario.

$\sqrt[3]{3^2}$	$\sqrt[5]{(-5)^3}$	$\sqrt[4]{5^{12}}$
$\sqrt{(-7)^6}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[6]{(-3)^2}$

S11. Escriba estas potencias de exponente fraccionario como radicales.

$2^{3/4}$	$5^{-3/2}$	$(-2)^{-1/3}$
$(-3)^{4/3}$	$(-1)^{-2/5}$	$3^{-3/2}$

2.3.3 Radicales

Se define la *raíz n-ésima* de un número *a*, como el número *b* que verifica la igualdad $b^n = a$, por lo tanto $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$

Actividades resueltas

- $\sqrt[4]{16} = 2$ porque $2^4 = 16$
- $\sqrt[4]{16^3} = 16^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{12/4} = 2^3 = 8$

- Sacar factores fuera de la raíz:

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2}\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Actividad propuesta

S12. Extraiga factores fuera de las raíces.

$\sqrt{12}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{32}$
$\sqrt{75}$	$\sqrt{54}$	$\sqrt{24}$
$\sqrt{72}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{48}$

2.3.4 Operaciones básicas con radicales

- Suma y resta.

Para poder sumar o restar radicales, los índices de las raíces y los radicandos (interior de la raíz) deben ser iguales.

Actividad resuelta

Realice la siguiente suma de radicales.

$$25\sqrt{3} - \sqrt{108} = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -1\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

- Multiplicación y división.

Para multiplicar o dividir debemos convertirlos primero en radicales de igual índice para poder multiplicar o dividir los radicandos.

Actividades resueltas

Realice los siguientes productos y cocientes de radicales.

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}$
- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{8}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{27}{8}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \dfrac{2^{2/3}}{2^{3/6}} = \dfrac{2^{4/6}}{2^{3/6}} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

Actividades propuestas

S13. Realice las siguientes operaciones.

$3\sqrt{2} - 2\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{50}$	$2\sqrt{20} - \sqrt{45} - 6\sqrt{5}$
$3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{27} - \sqrt{75}$	$3\sqrt{12} - 2\sqrt{32} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{2}$
$3\sqrt{24} - 2\sqrt{54}$	$-3\sqrt{32} + 2\sqrt{18} + \sqrt{2}$
$\sqrt{12} - \sqrt{20} + 2\sqrt{27} - \sqrt{45}$	$-2\sqrt{8} - 3\sqrt{27} + \sqrt{18} - 2\sqrt{12}$

S14. Realice las siguientes operaciones.

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[2]{2}}$
$\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{2}}$	$\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[4]{3}}$
$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[6]{5}$	$\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[10]{3}$

2.4 Porcentajes

Un porcentaje, *a%*, relaciona mediante una proporción, un total y una de sus partes.

Actividad resuelta

El 30% de los 6900 habitantes de una ciudad se dedica a la hostelería o vive indirectamente de ella. ¿Cuántos son?

$$\frac{100}{6900} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{6900 \cdot 30}{100} = 2070\ habitantes$$

2.4.1 Porcentajes y número índice

Todo porcentaje puede expresarse como un número decimal que llamaremos *número índice*.

En el ejercicio anterior, el 30% se puede expresar del siguiente modo:

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}30$$

Para calcular un % de un total basta multiplicar este número por el total. En el problema anterior bastaría hacer $0{,}30 \cdot 6900 = 2070$ habitantes.

- Podríamos tener que resolver el problema a la inversa, conocidas la parte y el tanto por ciento, tener que calcular el total.

Actividades resueltas

Si hemos gastado 2500 € de un presupuesto y eso supone solo un 35% de este, ¿podríamos saber de cuántos € es el presupuesto?

Llamemos *x* a la cantidad en € del presupuesto:

$$0{,}35 \cdot x = 2500 \ \rightarrow x = \frac{2500}{0{,}35} = 7142{,}86\ €$$

- Podríamos tener que calcular el tanto por ciento, conocidos el total y la parte.

Si de los 6900 habitantes de una ciudad, 2070 de ellos se dedican a la hostelería, ¿qué % de la población se dedica a este sector?

Llamemos *x* a número decimal que representa el tanto por ciento:

$$x \cdot 6900 = 2700 \ \rightarrow x = \frac{2070}{6900} = 0{,}30 \rightarrow 0{,}30 \cdot 100 = 30\%\ de\ la\ población$$

Actividades propuestas

S15. De los 2900 aspirantes en una oposición, aprobaron solo el 7%. ¿Cuántas personas aprobaron?

S16. Dos hermanos compran una consola de videojuegos, el mayor paga un 75% del valor. Si la consola costó 250 €. ¿Cuánto paga el hermano más pequeño?

S17. Un trabajador tiene un salario de 1800 €. Si le retienen un 20% de IRPF, ¿cuál es su salario neto?

S18. Si de los 2500 € que hemos ahorrado gastamos 750 € en comprar un televisor, que % de lo ahorrado gastamos?

S19. De los 32 alumnos y alumnas que hay en una clase de bachillerato solo van 21 a una excursión, ¿qué % del total del alumnado de la clase fue a la excursión?

S20. Si compramos un ordenador por 650 € y decidimos aumentarle la memoria RAM y gastamos 125 €, ¿qué porcentaje del gasto efectuado supone esa nueva memoria?

S21. Se celebra un concierto en una sala de fiestas y asisten 4800 personas y eso supone el 80% de la capacidad total de la sala. ¿Cuál es el aforo total de esa sala?

S22. Un pantano que se encuentra al 20% de su capacidad tiene actualmente 800 hm^3 de agua. ¿Cuál es la capacidad máxima de ese pantano?

2.4.2 Aumentos y disminuciones porcentuales

- Aumentar una cantidad un x% equivale a calcular el (100+x) % de dicha cantidad, por lo tanto basta multiplicar la cantidad inicial por $\frac{100+x}{100}$ de dicha cantidad.
- Disminuir una cantidad un x% equivale a calcular el (100-x) % de dicha cantidad, por lo tanto basta multiplicar la cantidad inicial por $\frac{100-x}{100}$ de dicha cantidad.

Actividades resueltas

Por llevar 5 años alquilando el mismo piso, el dueño nos hace un descuento de un 15% de los 500 € que pagábamos anteriormente. ¿Cuánto deberemos pagar a partir de ahora?

Si el alquiler disminuye un 15%, el precio final será de un (100-15)% del precio inicial. Por lo tanto:

$$0{,}85 \cdot 500 = 425\ €$$

El precio del alquiler será de 425 €.

Si el precio de una televisión en diciembre es 1200 €, y justo a principios de año sobe un 12%, ¿cuál es actualmente el precio del televisor?

Si el precio aumenta un 12%, el precio final será de un (100+12)% del precio final. Por lo tanto:

$$1{,}12 \cdot 1200 = 1344\ €$$

Actividades propuestas

S23. Si el nivel de vida subió un 12% y el sueldo medio está alrededor de los1100 €, ¿cuánto debería subir el sueldo este año para que no nos afectara esa suba?

S24. En un negocio de motos compran una marca determinada de motos por un valor de 1200 € y después le suben un 15% a ese valor. ¿Cuál es el precio de venta de cada moto?

S25. A un apicultor le disminuye la producción de miel en un 12,75% debido al tiempo con respecto al año pasado. Si este año recogió 1600 kg de miel, ¿cuántos kg recogió el año pasado?

S26. Por un artículo que estaba rebajado un 12,25% pagamos 30,25€. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

S27. Se estima que con la entrada en vigor de la ley del tabaco, en una determinada empresa bajó el número de fumadores un 80%. Si actualmente solo fuman 120 trabajadores, ¿cuántos trabajadores fumadores conformaban el personal de la empresa?

S28. De los 1155 € que gastamos en un ordenador dedicamos 210,79 € al monitor. ¿Qué porcentaje del gasto dedicamos a la compra del monitor?

S29. Una ciudad tiene 6757 habitantes y hace dos años solo tenía 6502. ¿Qué tanto por ciento aumentó la población en estos dos años?

S30. Una placa base para un ordenador costaba el año pasado 425 €. Nos la vendieron este año por 387,25 €. ¿Qué tanto por ciento bajó?

2.4.3 Porcentajes sucesivos

Basándonos en los dos ejemplos anteriores podemos concluir que para aumentar o disminuir una cantidad un $x_1\%, x_2\%, x_3\%, \dots, x_n\%$, debemos multiplicar la cantidad por $\left(\frac{100\pm x_1}{100} \cdot \frac{100\pm x_2}{100} \cdot \frac{100\pm x_3}{100} \cdot \dots \cdot \frac{100\pm x_n}{100}\right)$

Actividad resuelta

El precio de un viaje sin IVA (21%) es de 550 € y nos hacen un descuento de un 25% por ser clientes habituales. ¿Cuál es el precio final del viaje? ¿Qué porcentaje del precio inicial vamos a pagar?

IVA de un 21% → 100%+21%=121%→Multiplicamos la cantidad por 1,21

Descuento de un 25%→100%-25%=75%→Multiplicamos la cantidad por 0,75

Es decir, el precio del viaje será de $1{,}21 \cdot 0{,}75 \cdot 550 = 499{,}13\ €$

El porcentaje del precio inicial será:

$$1{,}21 \cdot 0{,}75 = 0{,}9075 \rightarrow 0{,}9075 \cdot 100 = 90{,}75\%$$

Por lo tanto solo pagamos un 90,75% del precio del viaje o lo que es lo mismo, nos rebajaron un $100\% - 90{,}75\% = 9{,}25\%$

Actividades propuestas

S31. El precio de unas acciones de una determinada marca comienzan en bolsa con un valor de 55 € por acción pero a lo largo del día sufren una bajada de un 7% para después remontar un 12%. ¿Cuál es el precio de la acción al final del día?

S32. Un artículo que costaba 345 € sufre dos bajadas al final de la temporada, la primera de un 25% y la siguiente de un 20%. ¿Cuánto vale ese artículo al final de temporada? ¿Qué % bajó desde su precio inicial?

S33. ¿Cuál es el precio de un coche cuyo valor en exposición es de 24500 € si sabemos que se le aumentó el valor un 21% de IVA y tiene un margen de beneficio de un 15%?

S34. Si a un determinado producto le aplicamos 3 subidas consecutivas de un 20%, ¿qué % estamos subiendo en realidad?

S35. Una empresa factura en noviembre 250.450 €, en diciembre sube la facturación un 85% y en enero baja un 45%. ¿Cuál será la facturación al final de enero? Con respecto al mes de noviembre, ¿qué % subió la facturación?

S36. Un violín que cuesta 1800 € sube un 50%. Después baja un 50%. Calcula el precio final y el porcentaje que sube o baja.

S37. Un determinado juguete vale 35 €. En las fiestas navideñas sube un 20% y una vez que pasan dichas fiestas baja un 15%. Calcule el precio final y el porcentaje de la subida o bajada.

S38. El precio de un móvil sin IVA es de 370 €. Me rebajan un 21%, si después aplicamos el 21% de IVA, ¿cuál será el precio final del móvil? En porcentajes, ¿qué pasó?

2.4.4 Interés simple e interés compuesto

- El **interés simple**, *I*, es el beneficio que origina una cantidad de dinero, llamado capital, *C*, en un período de tiempo expresado en años, *t*, a un rédito determinado, *r*.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Actividad resuelta

Se depositan 1500 € en un banco durante 3 años a un rédito de un 2,5% anual a interés simple. ¿Cuál es el beneficio que se obtiene al final del período?

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \xrightarrow{C=1500; r=2,5; t=3} I = \frac{1500 \cdot 2,5 \cdot 3}{100} = 112,50\ €$$

Luego al final de los 3 años recibiremos $1500 + 112,5 = 1612,50\ €$

- El **interés compuesto**, *I*, es el beneficio que se obtiene si, al final de cada período de inversión, el beneficio anterior no se retira. Lo que pasa es que se añade al capital inicial y se reinvierte.

  El capital final, C_f, que se obtiene al invertir un capital inicial, C_i, a un rédito, *r*, durante un tiempo expresado en años, *t*, con un interés compuesto es:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

  El interés compuesto o beneficio obtenido es: $I = C_f - C_i$

  NOTA: Habitualmente hablamos de un 3% de interés cuando deberíamos hablar de un rédito de un 3%.

Actividad resuelta

Calcula el capital obtenido al depositar a interés compuesto 5200 € en un banco que nos ofrece un 2,5% anual durante 3 años.

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \xrightarrow{C_i=5200; r=2,5; t=3} C_f = 5200 \cdot \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^3 = 5599,83 \text{ €}$$

Al final de los 3 años podremos retirar 5599,83 €.

- Algunas veces sucede que los intereses se acumulan mensualmente, trimestralmente o semestralmente. Entonces en la fórmula anterior hay que añadir un factor de corrección *k,* que indica el número de veces que pasa eso en el año.

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\right)^{k \cdot t}$$

Actividad resuelta

Con el enunciado anterior, añadimos que los intereses se acumulan trimestralmente.

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\right)^{k \cdot t} \xrightarrow{C=5200; r=2,5; t=3; k=4} C_f = 5200 \cdot \left(1 + \frac{2,5}{4 \cdot 100}\right)^{4 \cdot 3} = 5603,69 \text{ €}$$

Actividades propuestas

S39. Dos personas invierten 12500 € durante 3 años a un rédito de un 2,5%. Si la primera lo hace a interés compuesto y la segunda a interés simple, ¿cuál es el beneficio de cada una?

S40. Calcule el capital inicial que, depositado a un rédito del 3,6% durante 5 años a un interés simple, genera 490 €.

S41. Pedimos un préstamo de 9500 € y pagamos 11250 € en un pago único al cabo de 3 años. Sabiendo que es un interés simple, calcule el rédito del préstamo.

S42. ¿Cuánto tempo hay que mantener 3000 € en un depósito a interés simple con un rédito del 3% para obtener unos intereses de 450 €?

S43. Un inversor coloca 125000 € durante 6 años al 3,8% anual si los períodos de capitalización son cuatrimestrales. ¿En cuánto se transformaría ese capital si el interés fuese compuesto?

S44. ¿Cuál debe ser el capital que tenemos que invertir a un interés compuesto durante 2 años al 3,5 % para que produzca un capital final de 2500 €?

S45. Una cantidad de dinero invertido a un interés compuesto durante 3 años al 5%, produce 250 €. ¿Cuál fue la cantidad invertida?

S46. Calcule el rédito al que se deberá prestar un capital para que después de 50 años los intereses sean iguales al capital prestado a un interés simple.

S47. ¿Cuántos años hay que tener un capital de 8500 € a un rédito del 3,75% para que produzca un interés de 2868,75 € a un interés simple?

S48. ¿Cuál deberá ser la cantidad de dinero que tenemos que invertir a un interés compuesto durante 2 años al 4% para que produzca unos intereses de 100 €?

2.5 Polinomios. Operaciones

2.5.1 Terminología básica

Haremos un pequeño repaso sobre la terminología y las operaciones básicas de los polinomios.

Observe la siguiente expresión $P(x) = 2x^5 - \sqrt{5}x^3 + \frac{2}{3}x - \pi$

- Dicha expresión se llama polinomio y está formado por cuatro monomios $2x^5$, $-\sqrt{5}x^3$, $\frac{2}{3}x$ y $-\pi$.
- La variable es *x*. Pueden existir polinomios con dos variables, pero estos no serán los que estudiemos en este módulo.
- Los números que acompañan las variables se llaman coeficientes. **En este ámbito solo trabajaremos con coeficientes enteros.**
- Cada monomio tiene un grado, que será el grado de la variable. El grado del polinomio será el mayor de todos los grados de todos los monomios que forman el polinomio. En este caso sería 5.
- Llamaremos monomios semejantes a los que tienen igual grado.

2.5.2 Operaciones básicas entre polinomios

- Suma y resta de polinomios.

Para sumar y restar polinomios, se suman o se restan los monomios semejantes y se deja indicada la suma o resta de los monomios que no lo son.

Actividad resuelta

Si son $P(x) = 2x^5 - x^3 + 2x - 1$ e $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3$. Calcule la suma y la resta de estos polinomios.

- $P(x) + Q(x) = 2x^5 + (-1+2)x^3 - \mathrm{x}^2 + (2-2)x + (-1-3) = 2x^5 + x^3 - \mathrm{x}^2 - 4$
- $P(x) - Q(x) = 2x^5 + (-1-2)x^3 - (-\mathrm{x}^2) + (2+2)x + (-1+3) = 2x^5 - 3x^3 + 4\mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + 2$

- Producto de polinomios.

Para multiplicar dos polinomios, se multiplican todos los monomios del primer polinomio por todos los monomios del segundo polinomio y después realizamos las sumas y restas pertinentes con los monomios resultantes.

Actividad resuelta

Si son $P(x) = 2x^2 + 2x - 1$ e $Q(x) = 2x^3 - 3$. Calcule el producto de estos polinomios.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= 2x^2 \cdot 2x^3 + 2x^2 \cdot (-3) + 2\mathrm{x} \cdot 2x^3 + 2\mathrm{x} \cdot (-3) - 1 \cdot 2x^3 - 1 \cdot (-3) \\ &= 4x^5 - 6x^2 + 4x^4 - 6\mathrm{x} - 2x^3 + 3 = 4x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 6\mathrm{x} + 3 \end{aligned}$$

Actividad propuesta

S49. Dados los siguientes polinomios:

$A(x) = 2x^2 - x - 1$	$\mathrm{B}(x) = x^2 - 1$	$C(x) = 2x - 1$

Efectúe las siguientes operaciones:

$A(x) - 2B(x) + C(x)$	$A(x) - 2x \cdot B(x) + x^2 \cdot C(x)$
$2x \cdot A(x) - B(x) \cdot C(x)$	$3x \cdot A(x) - x^3 \cdot C(x)$
$A^2(x) - x^2 B(x)$	$4B^2(x) - x^2 C^2(x)$

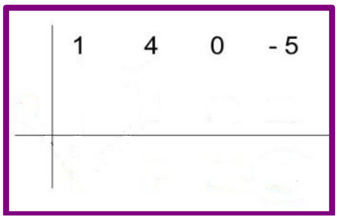
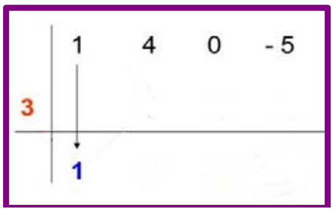
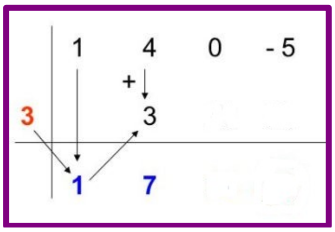
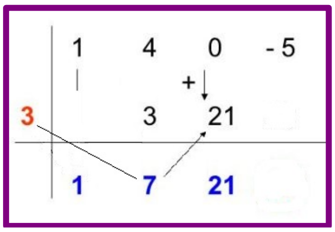
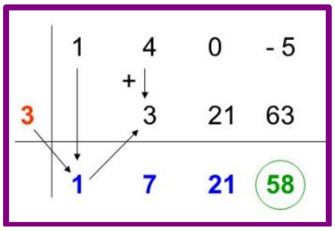
2.5.3 División por un polinomio x-a. Regla de Ruffini

No estudiaremos aquí como se dividen dos polinomios cualesquiera. Nos dedicaremos solo a la división de un polinomio por otro del tipo *x-a.* Este procedimiento de división en particular se llama **Regla de Ruffini**.

Lo veremos mediante un ejemplo:

- Calcule $(x^3 + 4x^2 - 5) : (x - 3)$

Para realizar la siguiente división utilizaremos la Regla de Ruffini:

Escribimos los coeficientes de todos los términos del dividendo, ordenados de mayor grado hasta el término independiente, teniendo en cuenta que si no existe un término tenemos que poner cero.	
A la izquierda, colocamos el término independiente del divisor, lo cambiamos de signo (ya comprenderemos el motivo de esto en el apartado de raíces de un polinomio) y bajamos el primer coeficiente del dividendo.	
Una vez colocados de este modo, multiplicamos el 3 por el 1 y lo colocamos debajo del 4. Sumamos el 4 al resultado de esta multiplicación.	
Ahora repetimos el proceso, multiplicamos el 3 por el 7, lo colocamos debajo del 0 y volvemos a sumar.	
Repetimos el proceso hasta el final.	

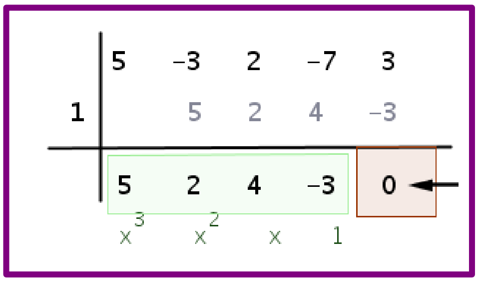
Llegado este momento podemos afirmar que:

$$(x^3 + 4x^2 - 5):(x - 3) = (x^2 + 7x + 21) + 58$$

Actividad resuelta

Calcule $(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7\text{x} + 3):(x - 1)$

Al realizar el proceso anterior, o sea, al aplicar la regla de Ruffini, obtenemos el siguiente:



Por lo que sucede que:

$$(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7\text{x} + 3) : (x - 1) = 5x^3 + 2x^2 + 4\text{x} - 3$$

O lo que es lo mismo:

$$(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7\text{x} + 3) = (x - 1) \cdot (5x^3 + 2x^2 + 4\text{x} - 3)$$

Actividad propuesta

S50. Realice las siguientes divisiones e indique cuáles son el cociente y el resto.

$(5x^4 - x^3 + 2x^2 - 2\text{x} + 1) : (x - 1)$	$(x^4 - 2x^2 - 2\text{x} - 3) : (x + 1)$
$(2x^4 + 2x^2 + 1) : (x + 2)$	$(5x^4 - x^3 + 1) : (x - 2)$

2.5.4 Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como producto de varios polinomios, de manera que, cada uno de ellos, tenga el menor grado posible.

Para factorizar polinomios podemos utilizar diversos métodos:

- Mediante la regla de Ruffini.

Factoricemos el siguiente polinomio $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 9\text{x} + 6$.

Puesto que queremos encontrar un resto 0, los números que vamos a probar tienen que estar siempre entre los divisores del término independiente, en este caso del 6. Por lo tanto los posibles candidatos que hace falta probar serían $\pm 1, \pm 2, \pm 3\ y\ \pm 6$.

	2	0	-3	4	-9	6
1		2	2	-1	3	-6
	2	2	-1	3	-6	0
	2	2	-1	3	-6	
1		2	4	3	6	
	2	4	3	6	0	
	2	4	3	6		
-2		-4	0	-6		
	2	0	3	0		

Con lo cual podemos concluir que:

$$2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 9\text{x} + 6 = (\text{x} - 1) \cdot (\text{x} - 1) \cdot (\text{x} + 2) \cdot (2x^2 + 3)$$

A $x = 1; x = 1\ y\ x = -2$, cumplen que $P(1) = 0$ y $P(-2) = 0$

Estos valores *a* que cumplen $P(a) = 0$ reciben el nombre de **raíces de un polinomio**. Por lo de ahora, mediante el método de Ruffini solo calcularemos las raíces enteras.

- Sacando el factor común.

Cuando en un polinomio hay un factor que se repite en todos sus términos, podemos extraer ese factor común.

Actividad resuelta

Extraiga los factores comunes.

- $-3x^3 + 4x^2 - 9x = x \cdot (-3x^2 + 4x - 9)$
- $2x^5 - 3x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot (2x^3 - 3x + 4)$

- Usando las igualdades notables.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

- Si tuviésemos que factorizar el polinomio $x^2 + 8x + 16$ sabemos que se puede descomponer directamente en $(x+4)\cdot(x+4)$
- Si tenemos que factorizar el polinomio $16x^4 - 25$. Podríamos usar la tercera de las igualdades podríamos expresar ese polinomio en $(4x^2 - 5)\cdot(4x^2 + 5)$

Actividad propuesta

S51. Factorice los siguientes polinomios utilizando, cuando proceda, los métodos explicados anteriormente. Indique las raíces enteras de los polinomios.

$x^3 + 2x^2 - x - 2$	$x^4 + x^3 - x^2 - x$
$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$	$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$
$2x^3 + x^2 - x$	$4x^4 + 4x^3 - x^2 - x$
$4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$	$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$
$4x^4 + 16x^3 + 21x^2 + 9x$	

2.5.5 Fracciones algébricas

Una fracción algébrica, $\frac{P(x)}{Q(x)}$, es una fracción que tiene por denominador un polinomio.

Simplificación de fracciones algébricas

Dos fracciones algébricas, $\frac{A(x)}{B(x)}$ e $\frac{C(x)}{D(x)}$ son equivalentes cuando:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \rightarrow A(x) \cdot D(x) = B(x) \cdot D(x)$$

Para simplificar fracciones algébricas utilizaremos cuando convenga cualquiera de los tres métodos para factorizar los polinomios y poder eliminar factores comunes.

Actividad resuelta

Simplifique la siguiente fracción algébrica $\frac{x^3+3x^2+2\mathrm{x}}{x^3+2x^2+\mathrm{x}}$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2\mathrm{x}}{x^3 + 2x^2 + \mathrm{x}} \xrightarrow{Sacamos\ factor\ común} \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x(x^2 + 2x + 1)}$$

Factorizamos el numerador, con el cual tenemos $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

El denominador es una igualdad notable, por lo tanto $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2\mathrm{x}}{x^3 + 2x^2 + \mathrm{x}} = \frac{x(x + 1)(x + 2)}{x(x + 1)(x + 1)} = \frac{x + 2}{x + 1}$$

Operaciones con fracciones algébricas

Las operaciones entre fracciones algébricas se hacen exactamente igual que haríamos entre fracciones de números, teniendo en cuenta que:

- Antes de comenzar, si podemos, deberíamos simplificar todas y cada una de las fracciones algébricas.
- Calcular un mínimo común múltiplo, para realizar una suma o resta de fracciones algébricas, requiere un proceso previo de factorización de polinomios para escoger los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
- Realizar una multiplicación o división entre fracciones de números es algo simple pero cuando hablamos de fracciones algébricas tenemos que multiplicar polinomios.

Actividad resuelta

Realice la siguiente operación entre fracciones algébricas $\frac{x^2+x}{x^3+2x^2+x} - \frac{x^2+x}{x^3-x}$

Si factorizamos todos los polinomios y eliminamos los factores comunes, la operación que debemos realizar se simplifica mucho:

$$\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x+1)} - \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x-1)} =$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}$$

Actividad propuesta

S52. Efectúe las siguientes operaciones y simplifique el resultado.

$\frac{x}{x+2} - \frac{x^2-1}{x^2+2x}$	$\frac{2x-4}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-2x}$
$\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1}$	$\frac{x}{x+1} - \frac{x^2-9}{x^2+x}$
$\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2+2x+1}$	$\frac{1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$

2.6 Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos y sistemas de ecuaciones

En módulos anteriores vimos cómo se resuelve una ecuación de segundo grado, recordaremos aquí solo la fórmula con la que podemos resolver todas las ecuaciones de este tipo.

Una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve mediante la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Actividad resuelta

Resuelva $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} = \begin{cases} x = 2 \\ x = {}^6/_4 = {}^3/_2 \end{cases}$$

Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos

Si tenemos que resolver ecuaciones de grado mayor o igual que tres, deberíamos utilizar cualquiera de los tres métodos expuestos para factorizar el polinomio y después igualar a cero cada uno de los polinomios resultantes de la factorización.

Actividades resueltas

Resuelva la siguiente ecuación $4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0$

$$Sacando\ factor\ común\ obtenemos\ x(4x^3 - 4x^3 - x + 1) = 0$$

$$Probamos\ con\ 1\ en\ la\ regla\ de\ Ruffini\ y\ obtenemos\ x(x-1)(4x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$Descubrimos\ que\ 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)(2x-1)$$

Por lo tanto, la ecuación inicial queda:

$$x(x-1)(2x-1)(2x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resuelva la siguiente ecuación $6x^4 - 11x^3 + 6x^2 - x = 0$

$$Sacando\ factor\ común\ obtenemos\ x(6x^3 - 11x^3 + 6x - 1) = 0$$

$$Probamos\ con\ 1\ \ en\ la\ regla\ de\ Ruffini\ y\ obtenemos\ x(x-1)(6x^2 - 5x + 1) = 0$$

Por lo tanto, la ecuación inicial queda:

$$x(x-1)(6x^2 - 5x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 6x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Actividad propuesta

S53. Resuelva las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta el trabajo realizado en el ejercicio 51.

$x^3 + 2x^2 - \mathrm{x} - 2 = 0$	$x^4 + x^3 - x^2 - \mathrm{x} = 0$
$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2\mathrm{x} = 0$	$2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + \mathrm{x} = 0$
$2x^3 + x^2 - \mathrm{x} = 0$	$4x^4 + 4x^3 - x^2 - \mathrm{x} = 0$
$4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4\mathrm{x} - 1 = 0$	$4x^3 + 8x^2 + 5\mathrm{x} + 1 = 0$
$4x^4 + 16x^3 + 21x^2 + 9\mathrm{x} = 0$	

Sistemas de ecuaciones lineales y otros sistemas no lineales

Haremos un repaso de los tres métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, mediante un ejemplo de un modo no exhaustivo ya que esto quedó estudiado en el módulo 3.

Actividad resuelta

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{matrix} x+3y=-2 \\ 3x-y=4 \end{matrix}\right\}$

- **Método de sustitución.**

  Despejamos *x* en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda.

$$\left.\begin{matrix} x+3y=-2 \\ 3x-y=4 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x=-2-3y} 3(-2-3y)-y=4 \to -6-9y-y=4$$

$$\to -10y=10 \to y=-1$$

$$x=-2-3y \xrightarrow{y=-1} x=-2-3\cdot(-1)=1$$

  La solución es $x=1$ e $y=-1$

- **Método de igualación.**

  Despejamos *x* en las dos ecuaciones e igualamos.

$$\left.\begin{matrix} x+3y=-2 \\ 3x-y=4 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x=-2-3y \\ x=\dfrac{4+y}{3} \end{matrix}\right\} \to -2-3y=\frac{4+y}{3} \to \frac{-6-9y}{3}=\frac{4+y}{3} \to$$

$$\to -6-9y=4+y \to -10y=10 \to y=-1$$

$$x=-2-3y \xrightarrow{y=-1} x=-2-3\cdot(-1)=1$$

  La solución es $x=1$ e $y=-1$

- **Método de reducción.**

Igualamos coeficientes en alguna de las incógnitas y restamos las ecuaciones.

$$\left.\begin{matrix} x+3y=-2 \\ 3x-y=4 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cdot 3 \text{ la } primera \text{ ecuación}} \left.\begin{matrix} 3x+9y=-6 \\ 3x-y=4 \end{matrix}\right\} \to 10y=-10 \to y=-1$$

$$x=-2-3y \xrightarrow{y=-1} x=-2-3\cdot(-1)=1$$

  La solución es $x=1$ e $y=-1$

- Cuando el sistema no es lineal, utilizaremos el método de sustitución para resolverlo.

Actividad resuelta

Resuelve el siguiente sistema $\left.\begin{aligned} y = 2x \\ x\cdot y = 50 \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} y = 2x \\ x\cdot y = 50 \end{aligned}\right\} \rightarrow x\cdot 2x = 50 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} Para\ x = 5 \ \rightarrow y = 10 \\ Para\ x = -5 \ \rightarrow y = -10 \end{cases}$$

Actividades propuestas

S54. Resuelva estos sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} -x + 3y = -4 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$
$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

S55. Resuelva por el método de reducción.

$\begin{cases} 3x - 5y = -26 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x + y = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x + 3y = -3 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$
$\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x + 2y = 3 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

S56. Resuelva por el método de igualación.

$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$	$\begin{cases} 6x - y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

S57. Resuelva estos sistemas de ecuaciones no lineales.

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x\cdot y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} y^2 - 8x = 0 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$

Resolución de problemas cotidianos usando ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Cualquier problema que nos pueda surgir en nuestra vida cotidiana podría resolverse teniendo en cuenta dos cuestiones:

- Identificar perfectamente quién es la incógnita o incógnitas
- Presentar la ecuación o sistemas de ecuaciones.

Actividad resuelta

El área de un terreno rectangular es $72\ m^2$. Si el terreno mide el doble de largo que de ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

Para resolver este tipo de problemas, como dijimos anteriormente, es importante;

- Identificar las incógnitas.

  Llamamos *x* a la longitud del ancho e *y* a la longitud del largo.
- Presentamos el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x \\ x \cdot y = 72 \end{array}\right\} \to x \cdot 2x = 72 \to 2x^2 = 72 \to x^2 = 36 \to x = \pm 6$$

  La solución es $x = 6\ m$ puesto que una longitud no puede ser negativa. Por lo tanto, el largo mide $y = 12\ m$.

Actividades propuestas

S58. En una tienda hay dos tipos de juguetes. Los del tipo A que utilizan 2 pilas y los del tipo B, que utilizan 5 pilas. Si en total hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

S59. Por la mezcla de 5 kg de pintura verde y 3 kg de pintura blanca pagué 69 €. Calcule el precio de un kg de pintura blanca y de pintura verde si sabemos que si mezclara un kg de cada una el precio de la mezcla sería15 €.

S60. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay?

S61. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

S62. Calcule dos números que se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son los números?

S63. Unos amigos alquilan una furgoneta por 490 € para hacer un viaje. A última hora se apuntan dos más y así le devuelven 28 € a cada uno de los otros. ¿Cuántos fueron a la excursión y cuanto pagó cada uno?

S64. Un comerciante quiere vender por 60000 € una partida de ordenadores que tiene en su almacén. Dos de ellos están deteriorados y decide subir 50 € el precio de los restantes, para obtener los mismos ingresos. ¿Cuántos ordenadores tenía y cuál era el precio de cada uno de ellos?

S65. Un jardín rectangular tiene un área de 900 m^2 y está rodeado por un paseo de 5 m de largo cuya área es de 850 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?

3. Actividades finales

S66. Clasifique estos números en naturales, enteros, racionales o irracionales. Cuando sea posible, expréselos en forma de fracción.

$\frac{12}{4}$	$1,2$	$\frac{2}{6}$	$0,\widehat{6}$	$3,\widehat{9}$
$1,\widehat{23}$	$1,234567\ldots$	$\sqrt{9}$	$\frac{-25}{5}$	$4,\widehat{9}$

S67. Los siguientes intervalos están expresados mediante desigualdades o con paréntesis-corchetes, expréselos de otro modo en cada caso:

$(0,3]$	$0 \leq x \leq 2$	$-1 \leq x < 3$
$[-1,1)$	$(2,5)$	$(-3,0]$
$-1 < x < 4$	$x \geq -2$	$[0,1)$

S68. Exprese el resultado como una única potencia.

$\left[\frac{3^2}{3^{-1}}\right]^3$	$[(-3)^4 \cdot 9^{-2}]^3$	$\left[\frac{3^2}{9}\right]^{-1}$
$[2^{-4} \cdot 4^3]^{-1}$	$\left[\frac{5^{-2}}{5^3}\right]^{-1}$	$\frac{5^2}{25^{-1}:5^2}$

S69. Simplifique:

$\frac{5^3 \cdot 2^2}{8 \cdot 5^{-1}}$	$\frac{3^2 \cdot 2^{-2}}{9^{-2} \cdot 8^{-2}}$	$\frac{3^2 \cdot 5^2}{25^{-2} \cdot 27}$
$\frac{2^3 \cdot 3^{-3} \cdot 5^2}{5^{-1} \cdot 9 \cdot 4^{-2}}$	$\frac{2^2 \cdot 9^{-2} \cdot 25^2}{5^{-1} \cdot 27^{-1}}$	$\frac{8^2 \cdot 9^2 \cdot 5^2}{25^{-1} \cdot 3^{-2}}$

S70. Simplifique:

$2\sqrt{12} - \sqrt{32} - \sqrt{75} - 3\sqrt{2}$	$\sqrt{12} + \sqrt{3} - \sqrt{27} - 4\sqrt{75}$
$-\sqrt{8} - \sqrt{27} + 2\sqrt{18} - \sqrt{12}$	$\sqrt{32} - \sqrt{18} + 3\sqrt{2}$
$4\sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 6\sqrt{5}$	$5\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$

S71. Realice las siguientes operaciones:

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{3}}$	$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{3}}$
$\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[8]{2}}$	$\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{5}}$

S72. El precio de una vivienda era hace dos años de 152000 €. El precio sufrió en estos dos años una bajada de un 5,25% el primer año y una subida de un 3,12% el segundo año. ¿Cuál es el precio actual de la vivienda? ¿Qué % subió o bajó el precio en estos dos años?

S73. Pagué 16,29 € por una camisa que me rebajaron un 12% y un 5% sucesivamente. ¿Cuál era el precio inicial de la camisa?

S74. Un panadero vende la barra de pan actualmente a 1,60 €, se estima que el precio de la harina subirá un 2% durante 3 años consecutivos y eso afectará de igual manera sobre el precio del pan. ¿Cuál será el precio de la barra al final de esos 3 años?

S75. Calcule a cuánto asciende el interés simple de un capital 25000 € invertido durante 4 años a un rédito de un 6%.

S76. Calcule el interés simple de un capital de 30000 € invertido durante 90 días a un rédito de un 4%.

S77. Al cabo de un año, un banco ingresa en una cuenta de ahorro un interés simple de 1800 € a un rédito del 2%. Calcule el capital de la cuenta.

S78. Se deposita un capital de 15000 € a un interés compuesto del 2,50% durante 3 años. Calcule el capital final si el período de capitalización es anual.

S79. Con los datos del ejercicio anterior calcule el capital final si el período de capitalización es mensual.

S80. Resuelva las siguientes ecuaciones realizando en primer lugar una factorización de los polinomios utilizando, cuando proceda, los métodos explicados en esta unidad.

$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = 0$	$2x^4 + 3x^3 - x = 0$
$4x^4 + 4x^3 - x^2 - x = 0$	$2x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x = 0$
$3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x = 0$	$3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

S81. Efectúe las siguientes operaciones y simplifique el resultado.

$\frac{x}{x+1}-\frac{x^2-1}{x^2+x}$	$\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+2x+1}$
$\frac{x}{x+2}-\frac{x^2}{x^2-4}$	$\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x^2-9}{x^2+3x}$

S82. En un examen tipo test, las preguntas correctas suman un punto y las incorrectas restan medio punto. En total hay 100 preguntas y hay que contestarlas todas. Si la calificación de un alumno fue 8,05 sobre 10, calcule el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.

S83. Si aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 3 cm y su área queda multiplicada por 4. ¿Qué lado tenía la baldosa?

S84. Con una cuerda de 34 metros se puede dibujar un rectángulo (no puede sobrar cuerda) cuya diagonal mide 13 metros. Calcule cuánto mide la base y la altura de dicho rectángulo.

S85. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

$\begin{cases} x\cdot y=12 \\ x+y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ x+y=17 \end{cases}$
$\begin{cases} y^2=x \\ x-y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} y^2=x \\ y=6-x \end{cases}$

4. Solucionario

4.1 Soluciones de las actividades propuestas

S1.

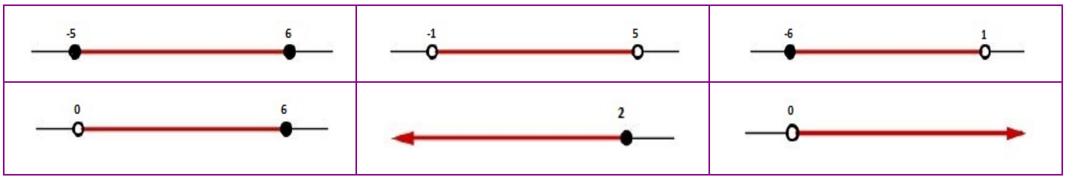
0,5	$1,1\hat{6}$	0,125	$0,\widehat{36}$
1,2	0,0525	$0,\hat{3}$	5,32
2	$1,\hat{6}$	5	$0,\hat{6}$

S2.

$\mathbb{N}$	$\mathbf{\frac{2125}{100}} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbf{\frac{26}{99}} \in \mathbb{Q}$	$\mathbf{\frac{297}{90}} \in \mathbb{Q}$
$\mathbf{\frac{303}{99}} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbf{\frac{225}{9} = 25} \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbf{\frac{471}{90}} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$

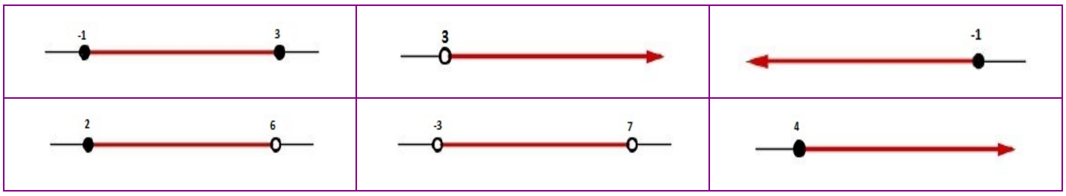
S3.

$-5 \leq x \leq 6$	$-1 < x < 5$	$-6 \leq x < 1$
$0 < x \leq 6$	$x \leq 2$	$0 < x$



S4.

$[-1,3]$	$(3,+\infty)$	$(-\infty,-1]$
$[2,6)$	$(-3,7)$	$[4,+\infty)$



S5.

$[1,6)$	$[-5,+\infty)$
$(-\infty,-9)$	$(-8,-4)$

$1 \leq x < 6$	$-5 \leq x$
$x < -9$	$-8 < x < -4$

S6.

3^{-4}	4^{-4}
-5^{-7}	7^{-5}
2^{-4}	3^{-5}

S7.

3^7	5^{-1}	2^1
$\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$
$\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{0} = 1$

S8.

2^{14}	3^{-21}	2^{-2}
2^{-6}	$3^0 = 1$	$5^0 = 1$
3^{-1}	2^1	3^7

S9.

3^5	$2^8 \cdot 3^6$	$3^{-2} \cdot 5^{-1}$
$2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4$	$2^4 \cdot 5^8$	$2^{-5} \cdot 5^{-1}$
2	$2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^4$	$3^{-2} \cdot 2^{-2}$

S10.

$3^{2/3}$	$(-5)^{3/5}$	5^3
$(-7)^{6/2} = (-5)^3$	$2^{3/4}$	$(-3)^{1/3}$

S11.

$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^3}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{(-2)}}$
$\sqrt[3]{(-3)^4}$	$\sqrt[5]{(-1)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{3^3}}$

S12.

$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$
$5\sqrt{3}$	$3\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$
$6\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$

S13.

$8\sqrt{2}$	$-5\sqrt{5}$
$-3\sqrt{3}$	$-3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$
$12\sqrt{6}$	$7\sqrt{2}$
$8\sqrt{3}-5\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}-13\sqrt{3}$

S14.

$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[6]{\frac{25}{8}}$
$\sqrt[6]{\frac{5}{2}}$	$\sqrt[20]{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[3]{5}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$

S15. *203 aspirantes.*

S16. *62,5 €.*

S17. *1440 €.*

S18. *30%.*

S19. *65,63 %.*

S20. *16,13 %.*

S21. *6000 personas.*

S22. *4000* hm^3*.*

S23. *1232 €.*

S24. *1380 kg.*

S25. *1833,81 kg.*

S26. *34,47 €.*

S27. *600 fumadores.*

S28. *18,25%.*

S29. *Aumentó un 3,92%.*

S30. *Bajó un 8,88 %.*

S31. *57,29 €.*

S32. *207 €. Baja un 40%.*

S33. *17606,90 €.*

S34. *Sube un 72,80%.*

S35. *254832,88 €. Sube un 1,75%.*

S36. *1350 €. Baja un 25%.*

S37. *35,70 €. Sube un 2%.*

S38. *Vale 353,68 €. El precio baja un 4,41%.*

S39. *A un interés simple 937,5 € y a un interés compuesto 961,13 €.*

S40. *Un capital de 2500 €.*

S41. *Un 6,14%.*

S42. *Durante 5 años.*

S43. *156786 €.*

S44. *Un capital inicial de 2333,78 €.*

S45. *1586,04 €.*

S46. $C = \frac{C \cdot r \cdot 50}{100} \xrightarrow{eliminamos\ C} r = \frac{100}{50} = 2\%$.

S47. *9 años.*

S48. $C_i + 100 = C_i \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 \rightarrow 100 = 0{,}0816 \cdot C_i \rightarrow C_i = 1225{,}49$ €.

S49.

x	$x^2 + \mathrm{x} - 1$
$2x^3 - x^2 - 1$	$-2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3\mathrm{x}$
$3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2\mathrm{x} + 1$	$4x^3 - 9x^2 + 4$

S50.

$C(x) = 5x^3 + 4x^2 + 6x + 4 \text{ e } R = 5$	$C(x) = x^3 - x^2 - x - 1 \text{ e } R = -2$
$C(x) = 2x^3 - 4x^2 + 10x - 20 \text{ e } R = 41$	$C(x) = 5x^3 + 9x^2 + 18x + 36 \text{ e } R = 73$

S51.

$(x+1)(x+1)(x+2)$	$x(x+1)(x+1)(x-1)$
$x(x-1)(x+1)(x+2)$	$x(x+1)(x+1)(2x+1)$
$x(x+1)(2x-1)$	$x(x+1)(2x+1)(2x-1)$
$(x-1)(x+1)(2x+1)(2x+1)$	$(x-1)(2x+1)(2x+1)$
$x(x+1)(2x+3)(2x+3)$	

S52.

$\frac{1}{x^2+2x}$	$\frac{2x-2}{x}$
$\frac{-x}{x^2-1}$	$\frac{9}{x^2+x}$
$\frac{x}{x^2+2x+1}$	$\frac{x^2+2x}{x^2-1}$

S53.

$x = -1; x = -1 \; e \; x = -2$	$x = 0; x = -1; x = -1 \; e \; x = 1$
$x = 0; x = 1; x = -1 \; e \; x = -2$	$x = 0; x = -1; x = -1 \; e \; x = \frac{-1}{2}$
$x = 0; x = -1 \; e \; x = \frac{1}{2}$	$x = 0; x = -1; x = \frac{-1}{2} \; e \; x = \frac{1}{2}$
$x = 1; x = -1; x = \frac{-1}{2} \; e \; x = \frac{-1}{2}$	$x = 1; x = \frac{-1}{2} \; e \; x = \frac{-1}{2}$
$x = 0; x = -1; x = \frac{-3}{2} \; e \; x = \frac{-3}{2}$	

S54.

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 9/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$
$\begin{cases} x = 4/9 \\ y = 1/9 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

S55.

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$
$\begin{cases} x = 1/19 \\ y = 8/19 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -3/17 \\ y = 21/17 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 7/19 \\ y = 1/19 \end{cases}$

S56.

$\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3/2 \\ y = -1/2 \end{cases}$

S57.

$\begin{cases} x = 2, y = 1 \\ x = -2, y = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = -1, y = -1 \end{cases}$	$x = 1, y = 1$
$\begin{cases} x = 3, \quad y = 4 \\ x = 4, \quad y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 8, \quad y = 8 \\ x = 2, \quad y = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5, \quad y = 3 \\ x = -5, \quad y = -3 \end{cases}$

S58. *Si llamamos a* $\begin{cases} x = número\ de\ juguetes\ del\ tipo\ A \\ y = número\ de\ juguetes\ del\ tipo\ B \end{cases}$*, la solución es 10 juguetes del tipo A y 20 del tipo B.*

S59. *Si llamamos a* $\begin{cases} x = precio\ del\ kg\ de\ pintura\ verde \\ y = precio\ del\ kg\ de\ pintura\ blanca \end{cases}$*, la solución es 12 € el kg de pintura verde y 3 € el kg de la blanca.*

S60. *Si llamamos a* $\begin{cases} x = número\ de\ coches \\ y = número\ de\ motos \end{cases}$*, la solución es 20 coches y 10 motos.*

S61. *Si llamamos a* $\begin{cases} x = longitud\ del\ largo \\ y = longitud\ del\ ancho \end{cases}$*, la solución es 54 m de largo por 32 m de ancho.*

S62. *Si llamamos a* $\begin{cases} x = número\ mayor \\ y = número\ menor \end{cases}$*, la solución es 16 para el primer número y 14 para el segundo.*

S63. *Si llamamos a* $\begin{cases} x = número\ de\ amigos\ que\ fueron\ a\ la\ excursión \\ y = €\ que\ pagó\ cada\ amigo \end{cases}$*, la solución es 7 amigos y cada uno de ellos pagó 70 €.*

S64. *Si llamamos a* $\begin{cases} x = núm\ de\ ordenadores \\ y = precio\ inicial\ de\ cada\ ordenador \end{cases}$*, la solución es 50 ordenadores y cada uno de ellos pagó 1200 €.*

S65. *Si llamamos x e y a las dimensiones del jardín, la solución es un rectángulo de dimensiones 60 m e 15 m.*

4.2 Soluciones de las actividades finales

S66.

$\mathbf{3} \in \mathbb{N}$	$\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{10}} \in \mathbb{Q}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \in \mathbb{Q}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \in \mathbb{Q}$	$\mathbf{4} \in \mathbb{N}$
$\frac{\mathbf{122}}{\mathbf{99}} \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbf{3} \in \mathbb{N}$	$\mathbf{-5} \in \mathbb{Z}$	$\mathbf{5} \in \mathbb{N}$

S67.

$0 < x \leq 3$	$[0,2]$	$[-1,3)$
$-1 \leq x < 1$	$2 < x < 5$	$-3 < x \leq 0$
$(-1,4)$	$[-2,+\infty)$	$0 \leq x < 1$

S68.

3^9	$3^0 = 1$	$3^0 = 1$
2^{-2}	5^5	5^6

S69.

$5^4 \cdot 2^{-1}$	$3^6 \cdot 2^4$	$3^{-1} \cdot 5^6$
$2^7 \cdot 3^{-5} \cdot 5^3$	$2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5^5$	$2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^4$

S70.

$-7\sqrt{2} - \sqrt{3}$	$-20\sqrt{3}$
$4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$

S71.

$\sqrt[10]{3^3}$	$\sqrt[6]{\frac{25}{3}}$
$\sqrt[8]{50}$	$\sqrt[15]{\frac{1}{25}}$

S72. *El precio es de 148513,42 €. Bajó un 2,29%.*

S73. *Costaba 17,63 €.*

S74. *1,70 €.*

S75. *6000 €.*

S76. *295,89 €.*

S77. *90000 €.*

S78. *16557,19 €.*

S79. *16575,84 €.*

S80.

$x=-1; x=-1; x=0\ e\ x=1$	$x=-1; x=-1; x=0\ e\ x=\frac{1}{2}$
$x=-1; x=\frac{-1}{2}; x=0\ e\ x=\frac{1}{2}$	$x=-1; x=-1; x=0\ e\ x=\frac{3}{2}$
$x=-1; x=0; x=1\ e\ x=\frac{2}{3}$	$x=-1; x=0; x=\frac{2}{3}\ e\ x=2$

S81.

$\frac{1}{x^2+\mathrm{x}}$	$\frac{2}{(\mathrm{x}+1)^2}$
$\frac{-2x}{x^2-4}$	$\frac{\mathrm{x}-3}{\mathrm{x}+1}$

S82. *Llamamos a* $\begin{cases} x = número\ de\ respuestas\ correctas \\ y = número\ de\ respuestas\ incorrectas \end{cases}$, *la solución es 87 correctas y 13 incorrectas.*

S83. *Llamamos a* $\begin{cases} x = \text{longitud del lado del cuadrado pequeño} \\ y = \text{longitud del lado del cuadrado grande} \end{cases}$, *la solución es* $x = 3\ cm$.

S84. *Llamamos a* $\begin{cases} x = \text{longitud de la base del rectángulo} \\ y = \text{longitud de la altura del rectángulo} \end{cases}$, *la solución es* $\begin{cases} x = 12\ m,\ \ y = 5\ m \\ x = 5\ m,\ \ y = 12\ m \end{cases}$

S85.

$\begin{cases} x=4, y=3 \\ x=3, y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=5, y=12 \\ x=12, y=5 \end{cases}$
$\begin{cases} x=1, y=-1 \\ x=4, y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=4, y=2 \\ x=9, y=-3 \end{cases}$

5. Glosario

F	▪ Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de polinomios del menor grado posible.
	▪ Fracción algébrica	A toda expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$,si son *P(x)* y *Q(x)* polinomios.
I	▪ Interés compuesto	Beneficio que se obtiene si, al final de cada período de inversión, el beneficio anterior no se retira.
	▪ Interés simple	Beneficio que origina una cantidad de dinero, en un tiempo determinado, a un rédito determinado.
	▪ Intervalo	Intervalo de extremos *a* y *b* al conjunto de los números comprendidos entre *a* y *b*.
	▪ Irracionales	Todos aquellos números que no pueden expresarse como $\frac{a}{b}$, si son a y b enteros.
M	▪ Monomio	Expresión algébrica en la que las únicas operaciones entre las variables (x, y….) que aparecen son la multiplicación y el exponente natural.
P	▪ Polinomio	Expresión algébrica formada por la suma o la resta de varios monomios.
R	▪ Racionales	Todos aquellos números que pueden expresarse como $\frac{a}{b}$, si son *a* y *b* enteros.
	▪ Raíz de un polinomio	Son los únicos valores *a* que cumplen que *P(a)=0*
	▪ Raíz n-ésima	Se llama raíz n-ésima de un número *a* otro número *b* que cumple que $b^n = a$
	▪ Reales	Conjunto de los números racionales e irracionales.
	▪ Rédito	Rendimiento generado por un capital expresado en %.
S	▪ Sistema de ecuaciones lineales	Son todos aquellos que, después de simplificar, pueden expresarse como $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, si son *a, b, c, a´, b´* y *c´* números reales.

6. Bibliografía y recursos

Bibliografía

- Matemáticas Enseñanzas aplicadas. Serie Soluciona. 4º ESO. Editorial Santillana.
- Matemáticas Enseñanzas académicas. Serie Resuelve. 4º ESO. Editorial Santillana.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4ª ESO. Editorial Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4ª ESO. Editorial Anaya.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4º de la ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.
- Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º de la ESO. LOMCE. Textos Marea Verde.

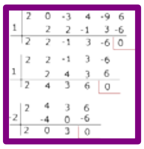
Enlaces de Internet

En estos enlaces puede encontrar trucos e información que puede consultar para mejorar su práctica.

- http://www.ematematicas.net/
- http://www.apuntesmareaverde.org.es/
- http://profesor10demates.blogspot.com.es/
- http://historiaybiografias.com/archivos_varios2/ruffini.swf
- http://es.numberempire.com/factoringcalculator.php
- http://www.minimath.net/index_es.htm
- http://lasmatematicas.eu/
- http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus/
- http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/quadratic/
- http://educalab.es/recursos

7. Anexo. Licencia de recursos

Licencias de recursos utilizados en esta unidad didáctica

RECURSO	DATOS DEL RECURSO
 RECURSO 1	▪ Procedencia: http://www.ematematicas.net/