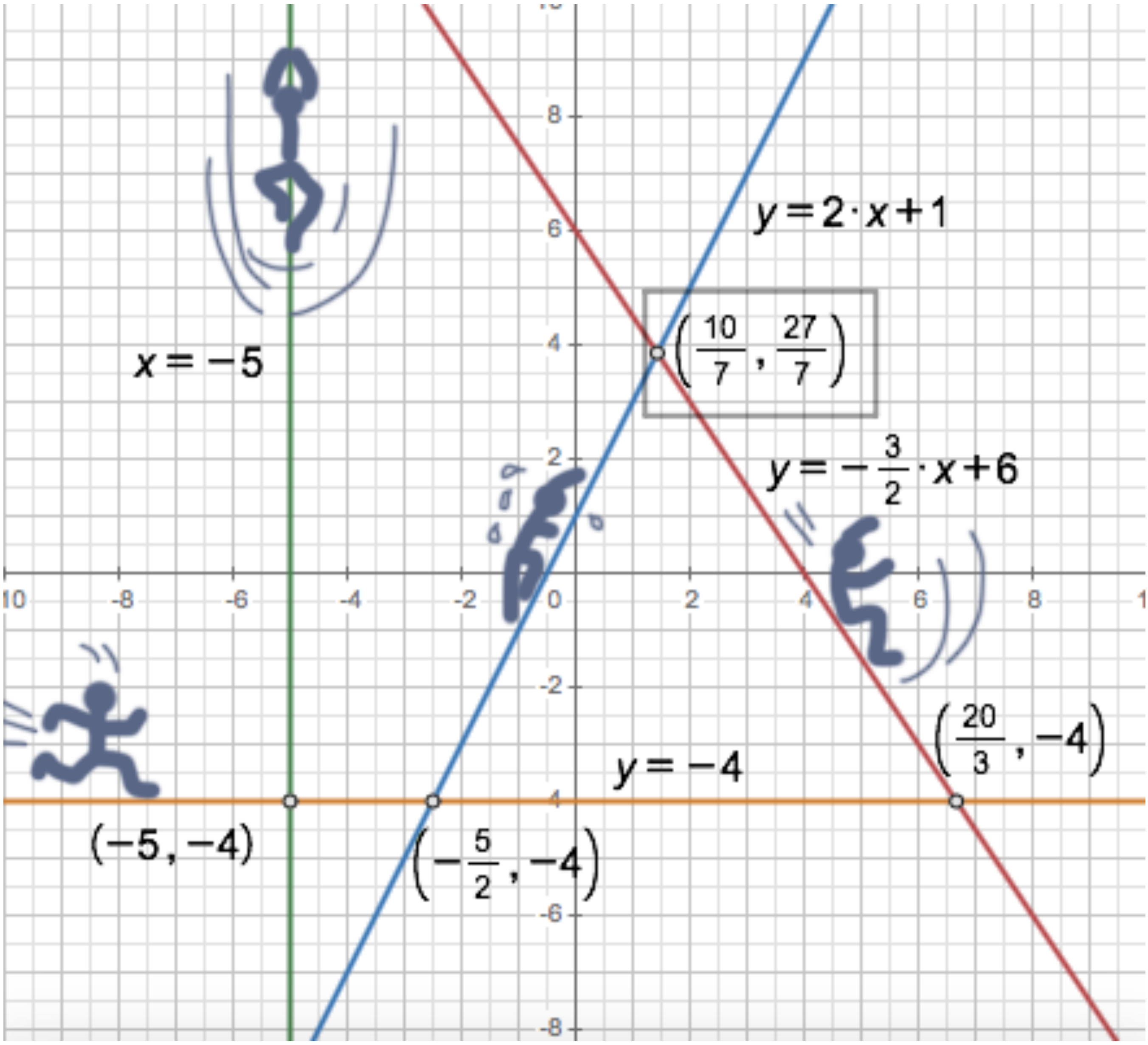
SISTEMAS DE ECUACIONES



MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 3ºESO

Ramiro Armesto Fernández

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a centrarnos fundamentalmente en los **S**istemas de **E**cuaciones **L**ineales (**S.E.L.**) con dos incógnitas aunque debemos ser conscientes de que hay sistemas formados por ecuaciones de todo tipo, no solo lineales y también con más de dos incógnitas. Al final del tema veremos algunos casos sencillos de estos otros sistemas para ampliar un poco el tema y ver las diferencias más importantes.

NOTA IMPORTANTE:

En este documento hay enlaces a 3 videos de UNICOOS para lo que es indispensable conexión a internet. Es probable además que para visualizar los 3 videos se os solicite que os registréis. Yo os recomiendo que lo hagáis ya que además de ser una página segura, una vez registrados podréis hacer consultas y acceder a una gran cantidad de material educativo de gran calidad.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES (S.E.L.) LINEALES CON 2 INCÓNITAS

Antes de empezar a trabajar con sistemas de ecuaciones lineales tenemos que tener claro qué es una ecuación lineal. En nuestro caso con 2 incógnitas.

DEF: Se llama ecuación lineal con dos incógnitas a toda ecuación de la forma:

$a \cdot x + b \cdot y = c$, donde a, b y c son números reales y las incógnitas son x e y

Ejem. $2x + 3y = 7$, $-5x + 10y = -2$, $0{,}5x + \pi y = \frac{1}{2}$ … Como veis **a** y **b** pueden ser números reales de cualquier tipo pero en este curso trabajaremos casi siempre con enteros o racionales.

Cuando empezamos el tema de ecuaciones decíamos que eran igualdades entre expresiones algebraicas que solo eran ciertas para determinados valores de sus incógnitas. Esos valores eran sus soluciones. Y ahora que tenemos dos incógnitas ¿qué ocurre?

DEF: Se llama **solución particular** de una ecuación lineal con dos incógnitas a **cada uno de los pares ordenados de valores (x_0,y_0) que hacen cierta la ecuación**. Par ordenado se refiere a que el primer valor siempre se sustituye en la x y el segundo en la y, en ese orden !

Ejem. Dada la ecuación lineal **$2x + y = 10$** , los siguientes pares ordenados serán solución:

(-2 , 14) ya que $2\cdot(-2) + 14 = 10$

(1 , 8) ya que $2\cdot1 + 8 = 10$

(0 , 10) ya que $2\cdot0 + 10 = 10$ …

¿ Cuántas soluciones particulares crees que podríamos encontrar?

¿Infinitos? Efectivamente! Para cada valor que des a la x obtendrás un valor de la y. Hay ∞ **!!**

Ejercicio1: Completa los siguientes pares para que sean soluciones de la ec. lineal $2x - 3y = 10$

(-2, -14/3) (0 , -10/3) (8 , 2) (5 , 0) (-1 , -4) (1/2 , -3) (7 , 4/3)

Espacio para las operaciones:

DEF: Se llama **solución** de una ec. lineal al conjunto formado por las ∞ soluciones particulares

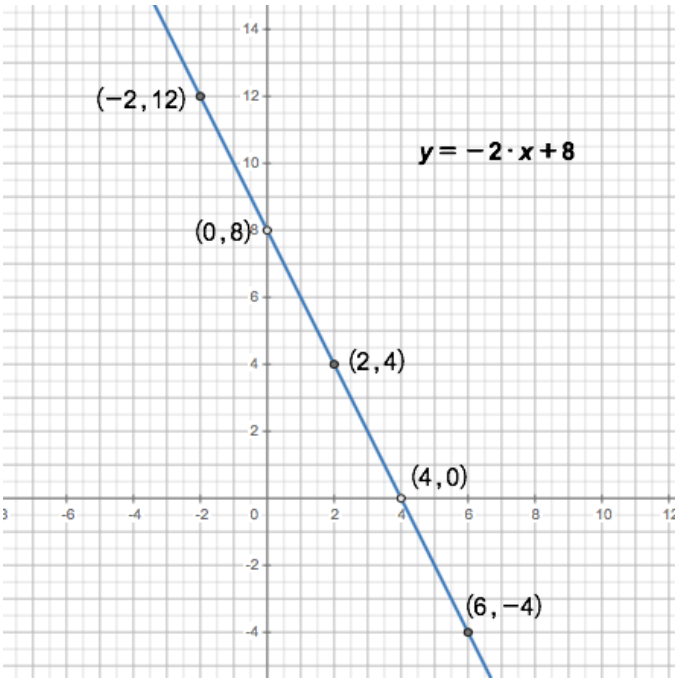
2a. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON 2 INCÓGNITAS

La representación gráfica de toda ecuación lineal con 2 incógnitas es una **recta**

Cada solución particular **(x_0,y_0)** de una ec. lineal tiene dos componentes, y por tanto se pueden representar como puntos sobre el plano cartesiano. Tomaremos x_0 sobre el **eje X o eje de abscisas** y el valor y_0 sobre el **eje Y o eje de ordenadas.**

Ejemplo:

Si hacemos una tabla de valores para representarla, suele ser muy común despejar la **y** para dar valores a la **x**. Siempre hemos de tomar un mínimo de 3 valores por si nos equivocásemos en alguna cuenta (*en ese caso los puntos no saldrían alineados y nos daríamos cuenta del error !)*



Siempre se recomienda tomar:

* *alguna x negativa*

* *x=0*

**alguna x positiva*

y = -2·x + 8	
-2	12
0	8
2	4
4	0
6	-4

Al representar unas cuantas soluciones particulares de una ecuación lineal observaremos que siempre están alineadas por lo que se deduce que para representar todas las soluciones particulares, es decir, la solución de la ecuación lineal, bastará con marcar algunas soluciones particulares y trazar la recta que pasa por ellos.

Esta recta está formada por infinitos puntos. Cada uno de ellos corresponde a una sol. particular.

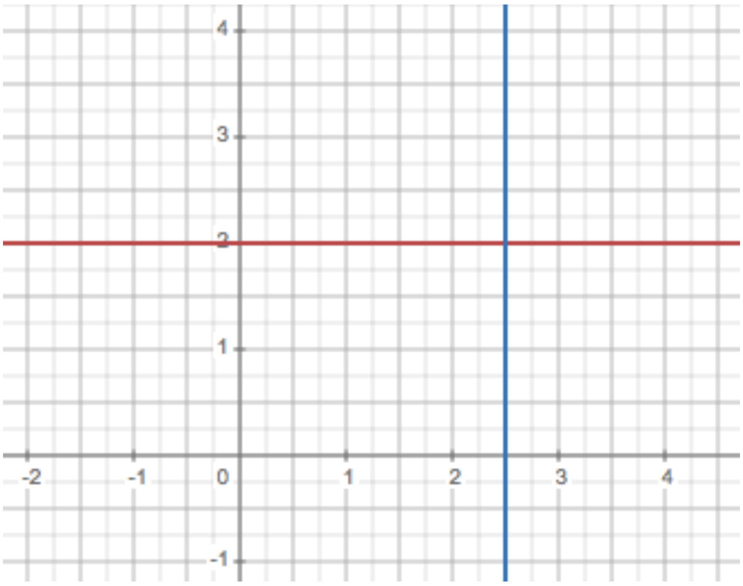
Y … ¿Qué ocurre si a = 0 o b = 0?

En estos casos las rectas que obtenemos son muy especiales, van a ser rectas “horizontales” si a = 0 o rectas “verticales” en el caso de que b = 0

Veámoslos con un par de ejemplos.

Ejem1: 0x + 3y = 6 ➡ 3y = 6 ➡ y = 2 (*todos los puntos de la recta tienen la y = 2)*

Ejem2: 2x + 0y = 5 ➡ 2x = 5 ➡ x = 5/2 (*todos los puntos de la recta tienen la x = 5/2)*



Ejercicio2: Representa las siguientes ecuaciones lineales:

a) -2x + y = 1

X	Y
-2	-3
0	1
2	5

b) -6x –2 y = 4

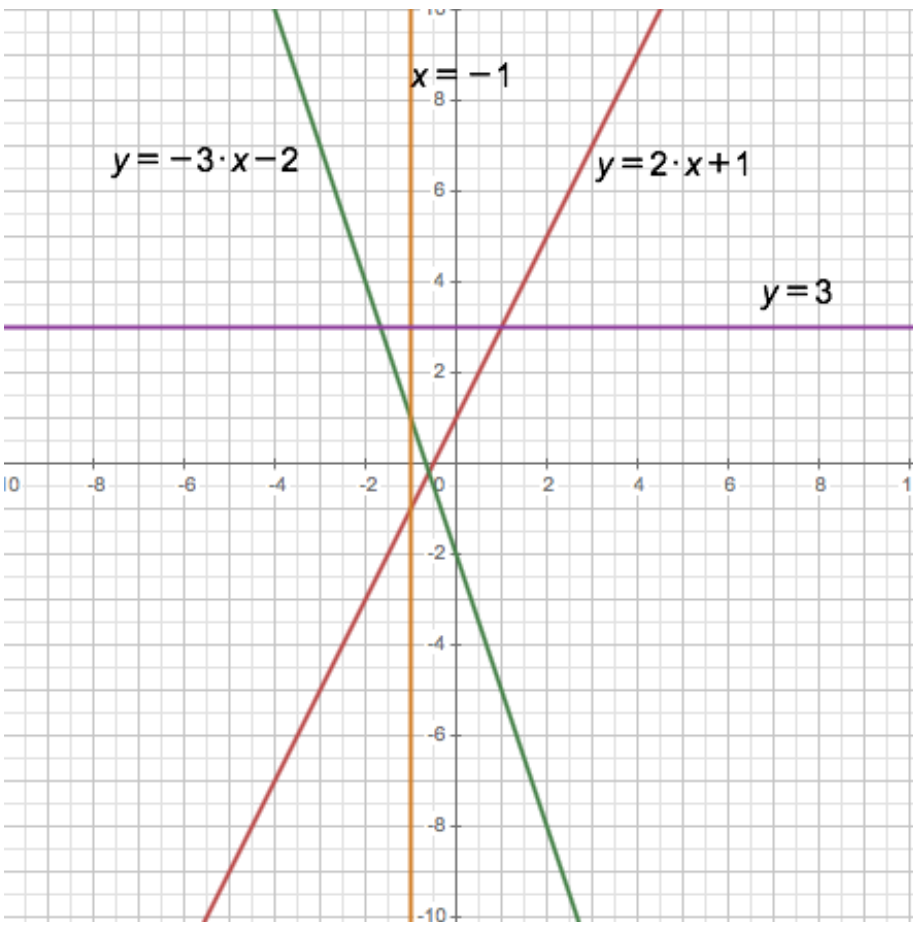
X	Y
-2	4
0	-2
1	-5

d) 2x = -2

X	Y
-1	-3
-1	0
-1	2

e) 5y = 15

X	Y
-2	3
0	3
3	3



REPRESENTACIÓN GRÁFICA (2ª PARTE) PENDIENTE Y LA ORDENADA EN EL ORIGEN

Una forma muy fácil y rápida para representar una recta es mediante la **pendiente** y la **ordenada en el origen.** Veamos en que consiste.

En todas las rectas excepto en las verticales, la ecuación contiene la variable y. Si dejamos esta variable aislada en un miembro de la ecuación obtendremos una ecuación tipo:

y = m·x + n donde ***m = pendiente*** y ***n = ordenada en el origen***

n = ordenada en el origen: Es el valor que toma la y cuando x = 0. La recta pasa por (0,n)

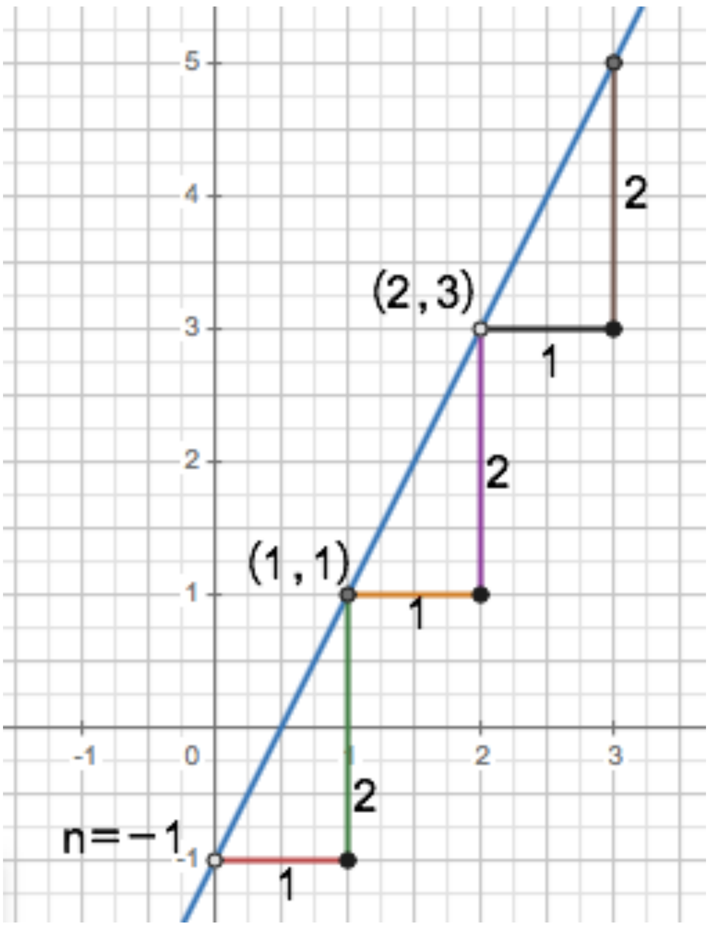
m = pendiente: Es la inclinación de la recta respecto al eje X
Es lo que la recta sube o baja a cada paso

Ejemplo:

Dada la ecuación 2x – y = 1 despejando la y obtenemos y = 2x – 1 de donde deducimos que la recta tiene pendiente m = 2 y ordenada en el origen n = -1

1º Situamos sobre el eje Y el valor n = -1 con lo que ya tenemos unl punto P(0,-1) de la recta.
2º Desde ese punto P avanzamos hacia la derecha una unidad y subimos m=2 unidades. En este caso llegamos al punto (1,1), si volvemos a avanzar un paso y subir m=2 llegamos a (2,3)

La gráfica se puede dibujar fácilmente ya:



ESTOS VIDEOS TE PUEDEN AYUDAR

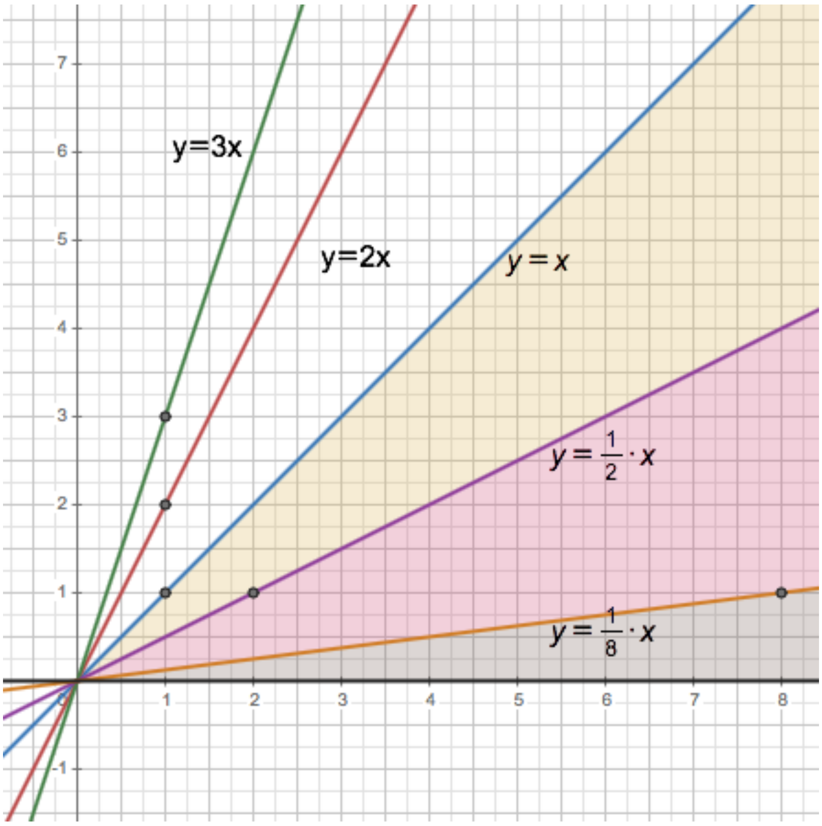
Video 1: https://youtu.be/Pw6_8GUKHfc

Video 2: https://youtu.be/MEfzEuSSoe8

NOTA: En el caso de las rectas “horizontales” tienen pendiente m = 0 y por tanto la expresión y = mx + n queda de la forma y = 0·x + n => y = n

En el caso de las rectas “verticales” no tiene sentido hablar de pendiente. No tienen.

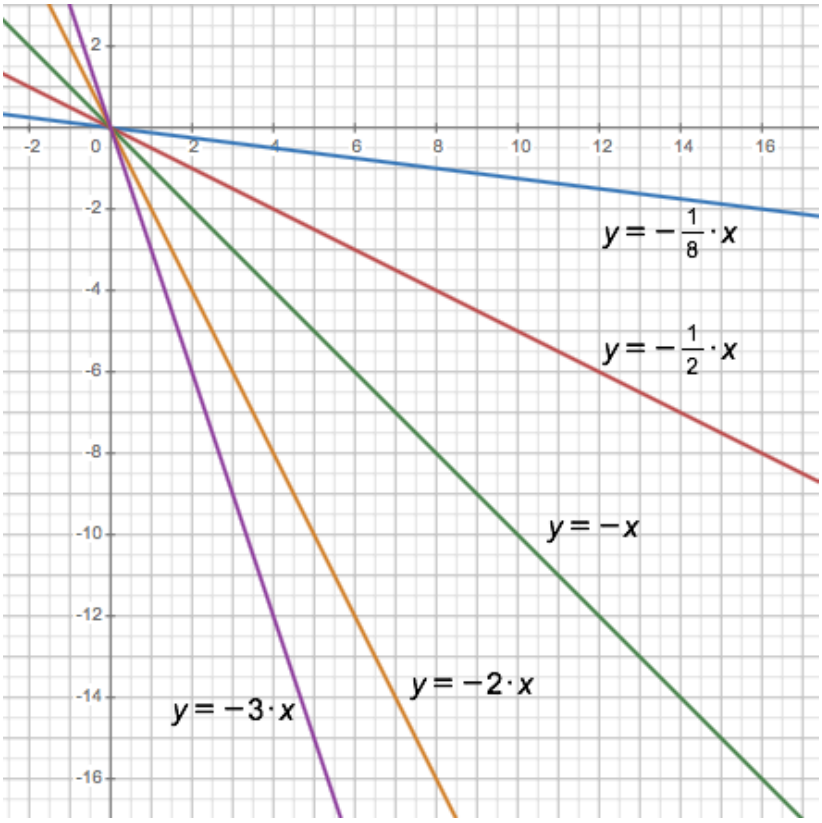
Veamos ahora un gráfico que muestra las pendientes POSITIVAS de algunas rectas:



Es curioso ver que todas las rectas con pendiente positiva que pasan por el (0,0) y están en la zona coloreada tienen pendiente comprendida entre 0 y 1.

La recta y = x tiene pendiente m=1

Las rectas que están en la zona sin colorear tienen por tanto pendientes que van desde 1 al ∞



Ejercicio3: Dibuja un gráfico análogo a este para las rectas que pasan por (0,0) con pendiente m negativa.

Ejercicio4: Representa las siguientes rectas utilizando la pendiente y la ordenada en el origen.

a) $-3x + y = -5$

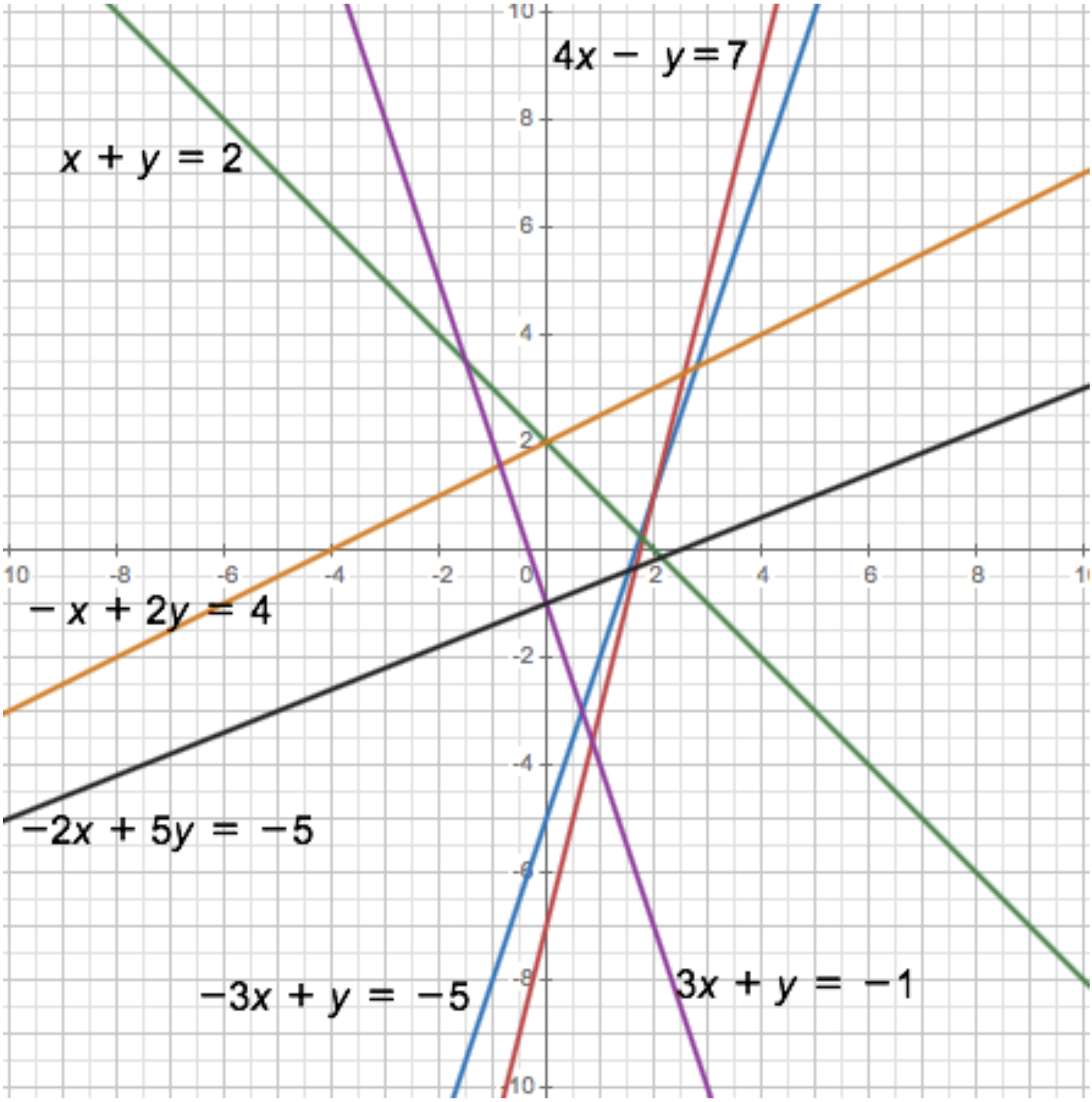
b) $4x - y = 7$

c) $x + y = 2$

d) $-x + 2y = 4$

e) $3x + y = -1$

f) $-2x + 5y = -5$



*Nota: En casos en los que la pendiente sale fraccionaria conviene avanzar mas de una unidad desde el eje Y para buscar el siguiente punto. Por ejemplo, si la pendiente es **2/5**, al avanzar una unidad subo 2/5 pero si avanzo **5** unidades (denominador) subo **2** unidades (numerador). Es un simple ejercicio de tales.*

2b. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones lineales está compuesto por dos o más ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

Resolver un sistema consiste en encontrar las soluciones que tienen en común todas sus ecuaciones

En este caso … si buscamos entre sus soluciones para encontrar las comunes:

X	Y
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

$\longleftrightarrow$

X	Y
-1	2
0	7/3
1	8/3
2	3

- Pero obviamente ir probando soluciones hasta encontrar una común no parece un método muy aconsejable, por lo que vamos a ver a continuación los métodos más comunes para resolver sistemas.

- Método gráfico
- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método de reducción

MÉTODO GRÁFICO

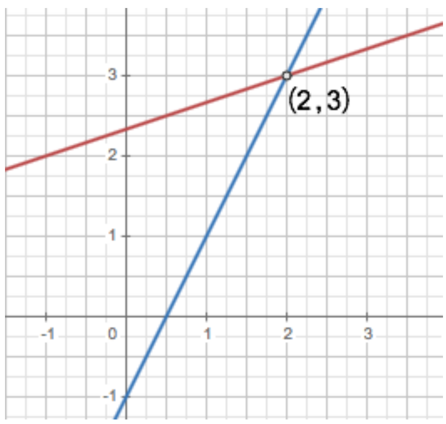
Este método nos servirá para entender conceptos y apartados posteriores de la teoría pero no resulta muy eficiente ya que si las soluciones no son enteras es difícil saber con exactitud la solución que resulta.

Este método consiste en representar las rectas del sistema y buscar los puntos en los que las rectas coinciden. Esos puntos corresponderán a soluciones comunes y serán por tanto la solución del sistema.

Ejem. Resuelve por el método gráfico el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

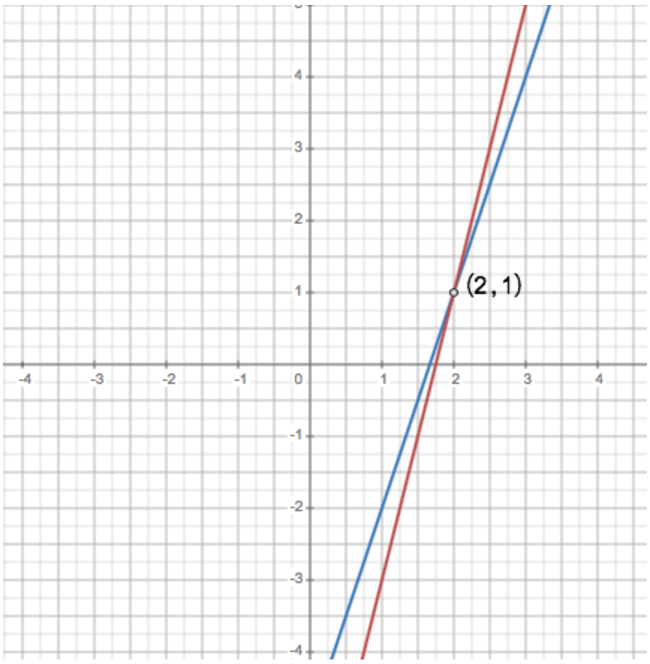
Aprovechando que ya hemos hecho las tablas de valores en el ejemplo anterior, podemos dibujar ambas rectas y ver que efectivamente el punto en que coinciden es el punto (2,3)



Ejercicio5: Resuelve mediante el método gráfico los siguientes sistemas:

$\begin{cases} -3x + y = -5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ (A)	$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$ (B)	$\begin{cases} -2x + 5y = -5 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$ (C)
$\begin{cases} y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ (D)	$\begin{cases} x + y = 8 \\ 4x = 12 \end{cases}$ (E)	$\begin{cases} x - y = 0 \\ 7x + y = 7 \end{cases}$ (F)

(A)



(B)

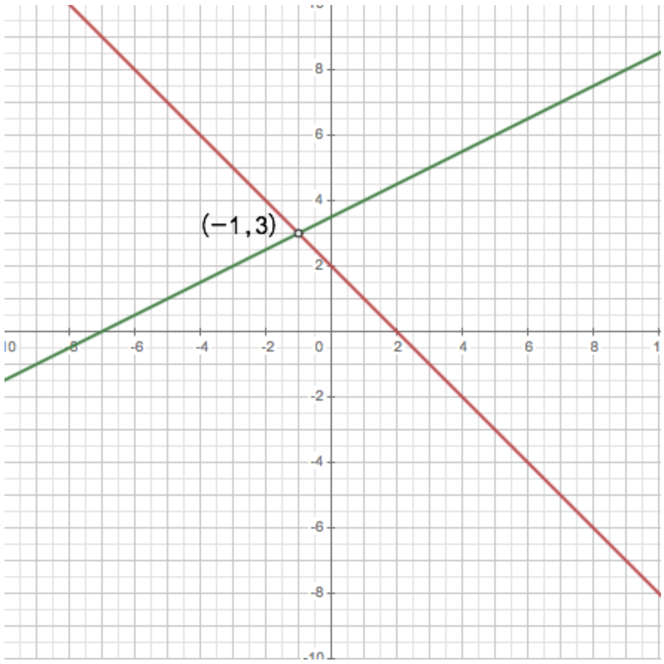


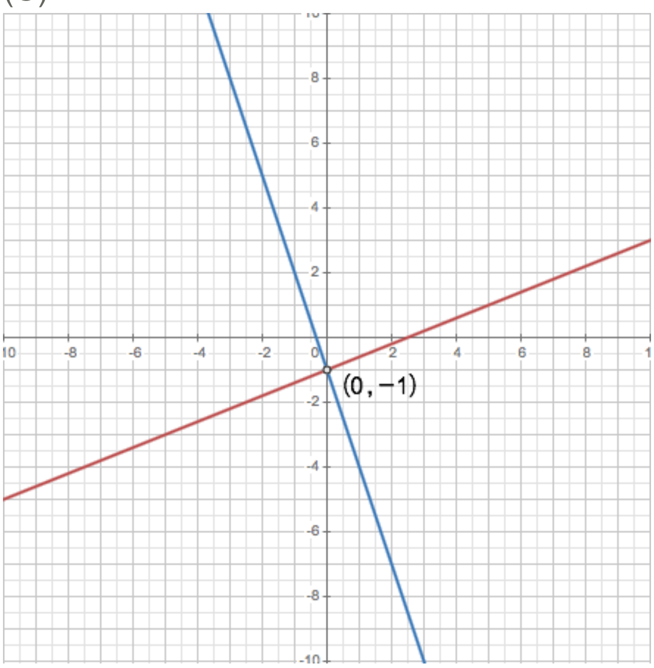
Tabla de valores(A)

x	*y*	*x*	*y*
-1	*-8*	*-1*	*-11*
0	*-5*	*0*	*-7*
2	*1*	*2*	*1*

Tabla de valores(B)

x	*y*	*x*	*y*
-1	*3*	*-1*	*3*
0	*2*	*0*	*7/2*
2	*0*	*1*	*4*

(C)



(D)

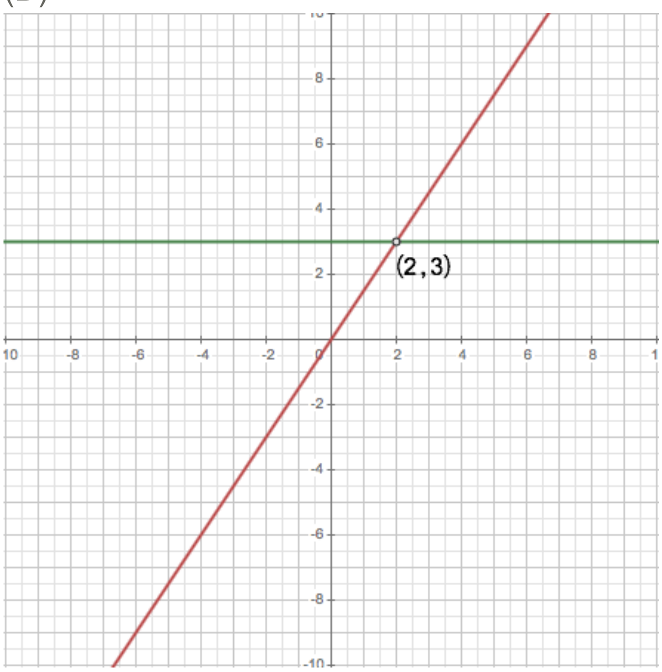


Tabla de valores(C)

x	y	x	y
-1	3	-1	-7/5
0	2	0	-1
2	0	2	-1/5

Tabla de valores(E)

x	y	x	y
-1	9	-1	3
0	8	0	3
2	6	2	3

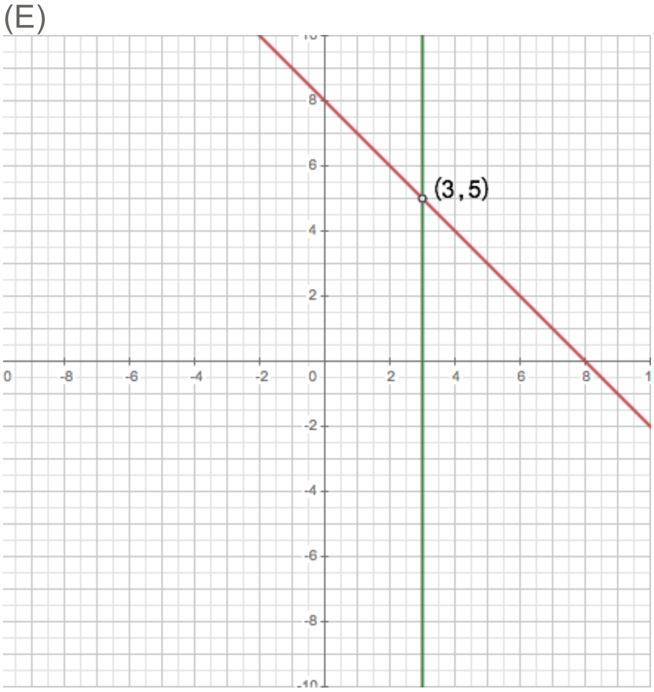
Tabla de valores(D)

x	y	x	y
-1	3	-2	-1
0	3	0	0
2	3	2	1

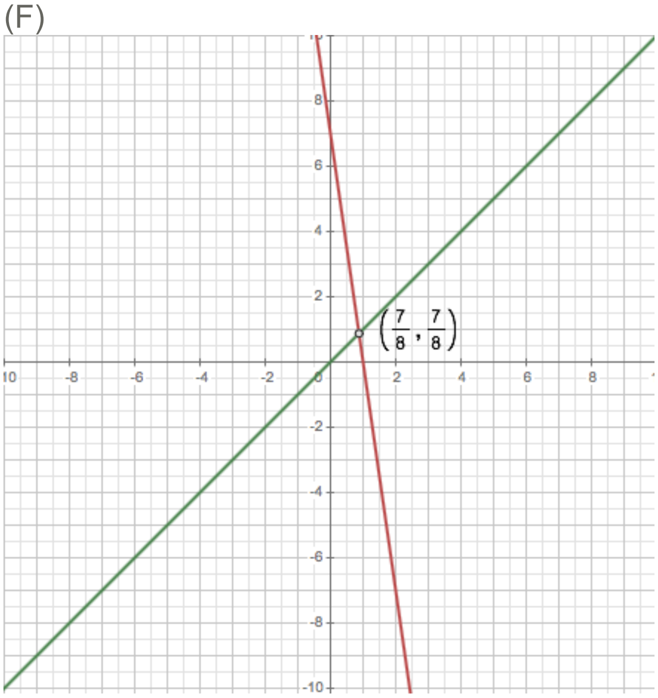
Tabla de valores(F)

x	y	x	y
-1	-1	0	7
0	0	1	0
2	2	2	-7

(E)



(F)



SISTEMAS DE ECUACIONES EQUIVALENTES

Antes de continuar con el resto de métodos de resolución de sistemas tenemos que definir lo que son **sistemas de ecuaciones equivalentes,** ya que en este curso será habitual resolver sistemas con coeficientes decimales o fraccionarios que dificultarían los cálculos.

DEF: **Sistemas de ecuaciones equivalentes** son aquellos que tienen exactamente las mismas soluciones.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x - 3y = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3y - 7 \end{cases}$$

Son sistemas equivalentes ya que tienen la misma solución (2,3).

Ejercicio6: Comprueba que efectivamente son equivalentes.

El segundo sistema se obtiene del primero mediante transformaciones de equivalencia. En la primera ecuación dividiendo ambos miembros entre 2 y en la segunda sumando a ambos miembros 3y.
Más adelante veremos fácilmente que ambos sistemas tiene a (2,3) como única solución por lo que sí son equivalentes.

PROPOSICIÓN: Si a alguna de las ecuaciones de un sistema se le aplica una transformación de equivalencia, el nuevo sistema es equivalente al anterior.

Por este motivo cuando nos encontremos con números que dificulten los cálculos (decimales, fracciones, …) podremos utilizar estas transformaciones ya conocidas y simplificarlo.

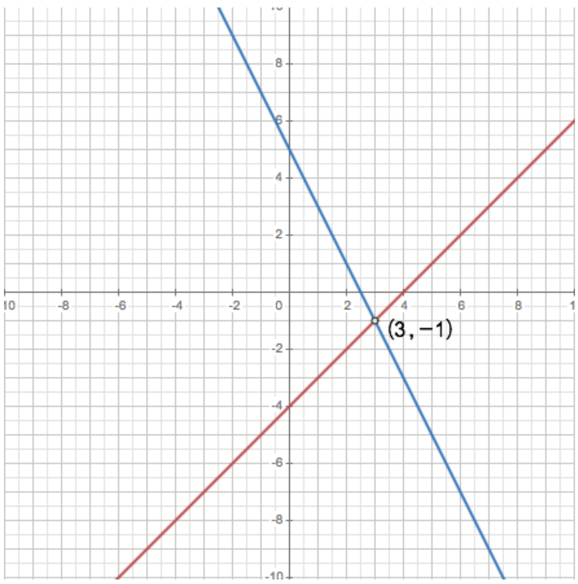
Ejercicio7: Transforma el siguiente SEL hasta obtener uno con coeficientes enteros. Resuélvelo por el método gráfico y comprueba que la solución obtenida es efectivamente solución del SEL de partida.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x = 2 + y/2 & (\cdot 2) \\ 0{'}8x = 2 - 0{'}4y & (\cdot 10) \end{cases}$$

es equivalente a:

$$\begin{cases} x = 4 + y \\ 8x = 20 - 4y \end{cases}$$

(3,-1) Si es solución del primer sistema



MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

En el siguiente enlace podréis encontrar un vídeo con una explicación sobre este método. Después de verlo completa las siguientes cuestiones y resuelve el ejercicio.

Este método consiste en *despejar una de las variables en una de las ecuaciones del sistema y sustituir su valor en la otra ecuación.*

Es el método más indicado cuando *tenemos una variable ya despejada o es fácilmente despejable.*

Ejercicio8: Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución

$\begin{cases} x + 5y = 34 \\ 2x - y = -9 \end{cases}$	$\begin{cases} -3x + y = 16 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$	$\begin{cases} 9x + 2y = 2 \\ x = y + 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ y = 2x \end{cases}$
$\begin{cases} x = 34 - 5y \\ 2x - y = -9 \end{cases}$ Sustituya el valor x dentro de la ecuación mas simple $2(34 - 5y) - y = -9$ Resolver la ecuación $y = 7$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $x = 34 - 5 \times 7$ Resolver la ecuación $x = -1$ Una posible solución es $(x, y) = (-1, 7)$ Compruebe la solución	$\begin{cases} y = 16 + 3x \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $2x + 2(16 + 3x) = 16$ Resolver la ecuación $x = -2$ Sustituya el valor x dentro de la ecuación mas simple $y = 16 + 3 \times (-2)$ Resolver la ecuación $y = 10$ Una posible solución es $(x, y) = (-2, 10)$ Compruebe la solución	Sustituya el valor x dentro de la ecuación mas simple $9(y + 1) + 2y = 2$ Resolver la ecuación $y = -\frac{7}{11}$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $x = -\frac{7}{11} + 1$ Resolver la ecuación $x = \frac{4}{11}$ Una posible solución es $(x, y) = \left(\frac{4}{11}, -\frac{7}{11}\right)$	Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $3x - 6 \times 2x = -3$ Resolver la ecuación $x = \frac{1}{3}$ Sustituya el valor x dentro de la ecuación mas simple $2 \times \frac{1}{3} = y$ Resolver la ecuación $y = \frac{2}{3}$ Una posible solución es $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

En el siguiente enlace podréis encontrar un vídeo con una explicación sobre este método. Después de verlo completa las siguientes cuestiones y resuelve el ejercicio.

Este método consiste en *despejar una de las variables en ambas ecuaciones del sistema igualar sus valores.*

Es el método más indicado cuando *ambas ecuaciones tienen despejada o fácilmente despejable la misma variable.*

Ejercicio9: Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación

$\begin{cases} x = -2 + 2y \\ x = -2y \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 5x + 7 \\ 2x + 10y = 70 \end{cases}$	$\begin{cases} 0´2x + y = 3´6 \\ 4x - y/3 = 11 \end{cases}$
$-2+2y=-2y$ Resolver la ecuación $y=\frac{1}{2}$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $x=-2\times\frac{1}{2}$ Resolver la ecuación $x=-1$ Una posible solución es $(x,y)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	$\begin{cases} x=-5-3y \\ x=10+2y \end{cases}$ Resuelva usando el Método de Igualación $-5-3y=10+2y$ Resolver la ecuación $y=-3$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $x=10+2\times(-3)$ Resolver la ecuación $x=4$ Una posible solución es $(x,y)=(4,-3)$ Compruebe la solución	$\begin{cases} y=5x+7 \\ y=\frac{35-x}{5} \end{cases}$ Resuelva usando el Método de Igualación $5x+7=\frac{35-x}{5}$ Resolver la ecuación $x=0$ Sustituya el valor x dentro de la ecuación mas simple $y=\frac{35-0}{5}$ Resolver la ecuación $y=7$ Una posible solución es $(x,y)=(0,7)$	$\begin{cases} x=18-5y \\ x=\frac{33+y}{12} \end{cases}$ Resuelva usando el Método de Igualación $18-5y=\frac{33+y}{12}$ Resolver la ecuación $y=3$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $x=\frac{33+3}{12}$ Resolver la ecuación $x=3$ Una posible solución es $(x,y)=(3,3)$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

En el siguiente enlace podréis encontrar un vídeo con una explicación sobre este método. Después de verlo completa las siguientes cuestiones y resuelve el ejercicio.

Este método consiste en *conseguir que ambas ecuaciones tengan en una de sus incógnitas coeficientes opuestos (mismo número con ≠ signo) para que al sumar sus miembros dicha incógnita desaparezca. Para ello se multiplicará una o las dos ecuaciones por los números adecuados si fuese necesario.*

Es el método más indicado cuando *no hay ninguna variable fácilmente despejable o cuando conseguir estos coeficientes opuestos es sencillo.*

Ejercicio10: Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción

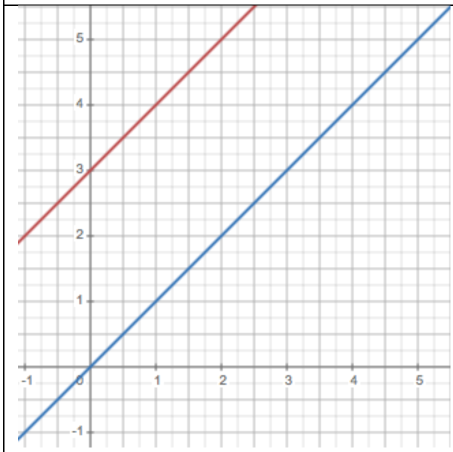
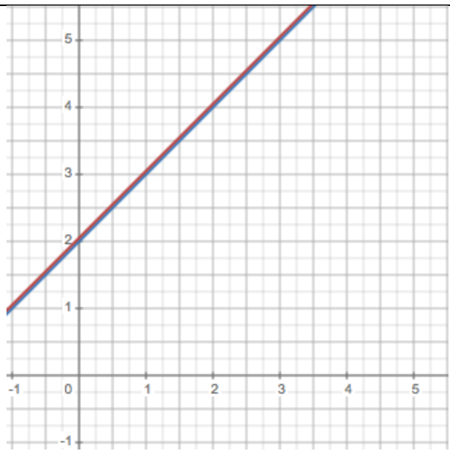
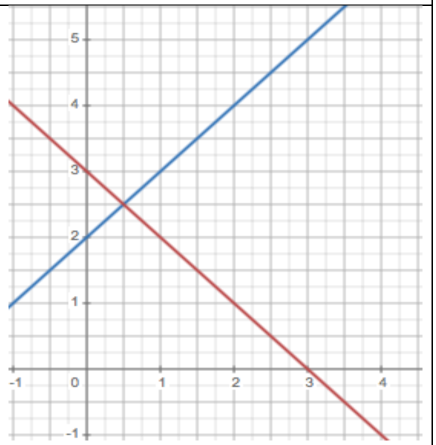
$\begin{cases} -2x + y = 7 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 3x + 5y = -10 \end{cases}$	$\begin{cases} 0'1x + 0'5y = -1 \\ 10x + y = 96 \end{cases}$
$\begin{cases} -2x + y = 7 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ Elimine una variable por la adición de ecuaciones $2y = 18$ Divida ambos lados entre 2 $y = 9$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $-2x + 9 = 7$ Resolver la ecuación $x = 1$ Una posible solución es $(x, y) = (1, 9)$ Compruebe la solución	Multiplique ambos lados por -1 $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ -x - 3y = -2 \end{cases}$ Elimine una variable por la adición de ecuaciones $-3x = 3$ Divida ambos lados entre -3 $x = -1$ Sustituya el valor x dentro de la ecuación mas simple $-1 + 3y = 2$ Resolver la ecuación $y = 1$ Una posible solución es $(x, y) = (-1, 1)$	Multiplique $\begin{cases} 6x + 9y = -18 \\ -6x - 10y = 20 \end{cases}$ Elimine una variable por la adición de ecuaciones $-y = 2$ Cambie los signos $y = -2$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $2x + 3 \times (-2) = -6$ Resolver la ecuación $x = 0$ Una posible solución es $(x, y) = (0, -2)$	Multiplique ambos lados por -100 $\begin{cases} -10x - 50y = 100 \\ 10x + y = 96 \end{cases}$ Elimine una variable por la adición de ecuaciones $-49y = 196$ Divida ambos lados entre -49 $y = -4$ Sustituya el valor y dentro de la ecuación mas simple $x + 5 \times (-4) = -10$ Resolver la ecuación $x = 10$ Una posible solución es $(x, y) = (10, -4)$

2c. Nº DE SOLUCIONES DE UN S.E.L. Y POSICIÓN RELATIVA DE SUS RECTAS

Cuando me piden que estudie el número de soluciones de un S.E.L. con dos incógnitas o me piden que estudie la posición relativa de sus rectas, me están pidiendo lo mismo.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a´x + b´y = c´ \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = mx + n \\ y = m´x + n´ \end{cases}$$

Podemos estudiarlo de ambas formas

Al dibujar 2 rectas sobre un plano solo hay tres posibilidades		
		
INCOMPATIBLE **0 SOLUCIONES** RECTAS PARALELAS m = m´ y n ≠ n´ $\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} \neq \frac{c}{c´}$	**COMPATIBLE INDETERMINADO** **∞ SOLUCIONES** RECTAS COINCIDENTES m = m´ y n = n´ $\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} = \frac{c}{c´}$	**COMPATIBLE DETERMINADO** **1 ÚNICA SOLUCIÓN** RECTAS SECANTES m ≠ m´ $\frac{a}{a´} \neq \frac{b}{b´}$

Antes de resolver un sistema, estudiar el número de soluciones que tiene nos puede ahorrar muchas cuentas, ya que si no tiene solución, nada hay que resolver y si son coincidentes cualquier punto de ambas rectas me sirve como solución. Sólo tendrá interés por tanto resolver los SISTEMAS COMPATIBLES DETERMINADOS (1 única solución).

Si al resolver un sistema llego a algo imposible tipo 5 = 0, el sistema es INCOMPATIBLE

Si al resolver un sistema llego a una identidad tipo 0 = 0, el sistema es COMP. INDETERMINADO

Ejercicio11: Estudia el número de soluciones de los siguientes sistemas y determina la posición relativa de sus rectas.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 7 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1} \neq \frac{7}{11} \rightarrow \begin{cases} \textit{Rectas Paralelas} \\ \textit{Sistema incompatible} \\ \textit{0 soluciones} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{3}{3} \rightarrow \begin{cases} \textit{Rectas Secantes} \\ \textit{Sistema compatible determinado} \\ \textit{1 solución} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = -6 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{-6}{-9} \rightarrow \begin{cases} \textit{Rectas Coincidentes} \\ \textit{Sistema compatible indeterminado} \\ \textit{infinitas soluciones} \end{cases}$$

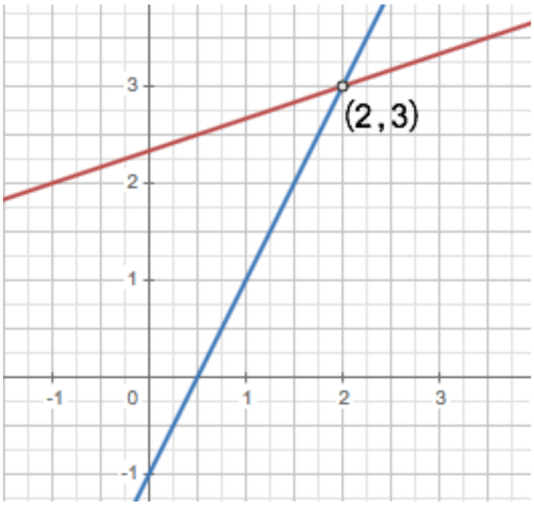
$$\begin{cases} x - 0'1y = -1 \\ 10x - y = 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{-0'1}{-1} \neq \frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} \textit{Rectas Paralelas} \\ \textit{Sistema incompatible} \\ \textit{0 soluciones} \end{cases}$$

Gracias a la pendiente y la ordenada en el origen dibujamos la grafica de una recta con mucha facilidad, pero si entendemos bien este concepto también podremos utilizar la pendiente y la ordenada en el origen para averiguar la ecuación de una recta a partir de su gráfica.

Ejem. Nos encontramos con estas dos rectas. ¿Cómo podríamos averiguar sus ecuaciones?

Utilizaremos m y n. La ecuación explícita de la recta es de la forma **y = mx + n** y por tanto :



Recta azul. Pasa por (0 , **-1**) luego **n = -1** y su pendiente es **m = 2** por lo que su ecuación será **y = 2x -1**

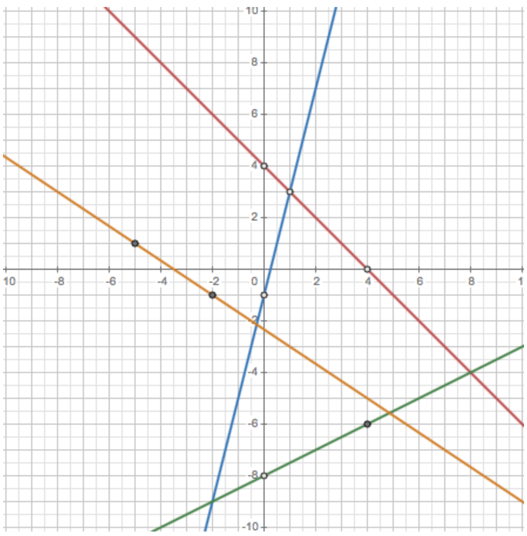
Recta roja. Pasa por (2 , 3) y en este caso la n no se puede saber fácilmente pero la pendiente si, ya que pasa por (-1 , 2) y por (2 , 3) “avanza 3 unidades y sube 1 unidad” m = 1/3

Si sustituimos estos datos en la ecuación y=m**x** + n obtenemos 3=(1/3)·**2** + n . Despejando la n obtendremos n = 7/3 por lo que la ecuación resulta y=(1/3)x+7/3 que será equivalente a la ecuación 3y= x + 7 o -x +3y = 7

Antes de enfrentarte al siguiente ejercicio te recomendamos ver el siguiente vídeo:

https://youtu.be/msCUlE_WE7E

Ejercicio12: Resuelve como en el ejemplo y averigua las ecuaciones e las siguiente rectas:



Recta azul*. Pasa por (0 ,* ***-1*** *) luego* ***n = -1***
y su pendiente es ***m = 4*** *por lo que su ecuación será*
y = 4x -1 *o* ***4x – y = 1***

Recta roja. *Pasa por (0 ,* ***4*** *) luego* ***n = 4***
y su pendiente es ***m = -1*** *por lo que su ecuación será*
y = -1·x +4 *o lo que es lo mismo* ***y = -x +4*** *o* ***x + y = 4***

Recta verde. *Pasa por (0 ,* ***-8*** *) luego* ***n = -8***
y su pendiente es ***m = ½*** *(“avanza 2 unidades y sube 1 unidad”)*
por lo que su ecuación será ***y = ½·x – 8*** *o* ***x – 2y = 16***

Recta naranja: *En este caso la n no se puede saber fácilmente pero la pendiente si, ya que pasa por (-5 , 1) y por (-2 , -1) “avanza 3 unidades y baja 2 unidades” m = -2/3*

*Si sustituimos un punto y la pendiente en la ecuación y=m**x** + n obtenemos 1=(-2/3)·**(-5)** + n . Despejando la n obtendremos n = -7/3 por lo que la ecuación resulta **y=(-2/3)x-7/3** que será equivalente a la ecuación **3y= -2x - 7** o **2x +3y = -7***

Ejercicio13: Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más conveniente. Al final del ejercicio tendrás que haber utilizado sustitución, igualación y reducción.

SUSTITUCIÓN

$$\left\{\begin{array}{l} (1/2)x + y = 4 \rightarrow x + 2y = 8 \rightarrow x = 8 - 2y \\ 3x + 4y = 6 \rightarrow 3\cdot(8 - 2y) + 4y = 6 \rightarrow 24 - 6y + 4y = 6 \rightarrow y = 9 \;,\; x = -10 \end{array}\right.$$

IGUALACIÓN

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + y = 33 \rightarrow 5x + y = 33 \rightarrow y = 33 - 5x \\ x + 0'5y = 4'5 \rightarrow 2x + y = 9 \rightarrow y = 9 - 2x \quad 33 - 5x = 9 - 2x \rightarrow x = 8 \;,\; y = -7 \end{array}\right.$$

REDUCCIÓN

$$\left\{\begin{array}{l} (2/3)x + y = 9 \rightarrow 2x + 3y = 27 \rightarrow \cancel{-4x} - 6y = -54 \\ x - 1'25y = -0'25 \rightarrow 4x - 5y = -1 \rightarrow \cancel{4x} - 5y = -1 \end{array}\right.$$

$$-11y = -55 \rightarrow y = 5 \;,\; x = 6$$

REDUCCIÓN

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 7y = 13 \rightarrow \cancel{10x} - 35y = 65 \\ -5x + 2y = 14 \rightarrow \cancel{-10x} + 4y = 28 \end{array}\right.$$

$$-31y = 93 \rightarrow y = -3 \;,\; x = -4$$

3. OTROS SISTEMAS DE ECUACIONES

No todos los sistemas de ecuaciones son lineales de dos ecuaciones y con dos incógnitas. Los hay que contienen ecuaciones no lineales (cuadrática, con x en el denominador, con producto de incógnitas …), los hay con tantas incógnitas y/o ecuaciones como quieras.

a. S.E.L. CON MÁS DE DOS ECUACIONES / INCÓGNITAS

En este curso vamos a ve simplemente con un par de ejemplos algún sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y un método sencillo para resolverlos. Se trata de hacer reducción en dos etapas.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{array}\right.$$

sumo 1ª y 2ª → $3x + 4z = 15$

sumo 2·2ª + 3ª → $7x + 2z = 13$

Este nuevo sistema ya es resoluble por los métodos conocidos y resulta que

x = 1 y z = 3. Si sustituimos estos valores en el primer sistema llegaremos a

que y = 2. **Solución x = 1, y = 2 , z = 3** (puedes comprobarlo)

Ejercicio14: Resuelve el sistema.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 4y + 3z = 10 \\ 3x + 2y - 4z = -6 \end{array}\right.$$

sumo 1ª y (-2)·2ª → $-5y - 7z = -19$ → $\cancel{10y} + 14z = 38$

sumo 3ª y (-3)·2ª → $-10y - 13z = -36$ → $\cancel{-10y} - 13z = -36$

$z = 2$

sustituímos z=2 → $y = 1$

sustituímos z=2, y=1 → $x = 0$

b. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES (SENL)

Decimos que un sistema de ecuaciones es NO lineal si al menos una de las ecuaciones del sistema no se puede escribir como ecuación lineal, es decir de la forma ax + by = c. La principal diferencia es que al no tratarse de ecuaciones cuyas gráficas sean rectas el número de soluciones puede ser distinto de 0, 1 o ∞.

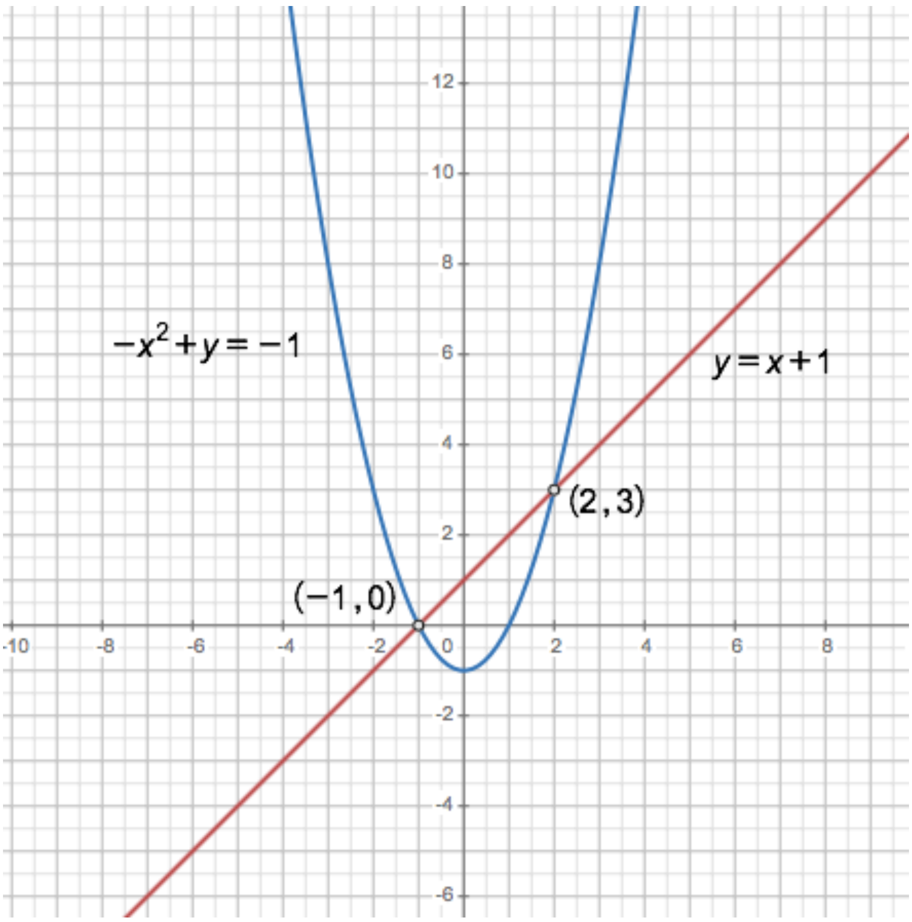
Los métodos que vamos a utilizar son los ya explicados y en cada caso habrá que decidir cual es el mejor. <u>Si una de las ecuaciones es lineal es común despejar una incógnita en ella y hacer sustitución.</u>

Ejem

$$\begin{cases} -x^2 + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Tanto si lo resolvemos por igualación como si lo hacemos por sustitución o reducción llegaremos igualmente a que $x^2 - 1 = x + 1$ y al resolver la ecuación de 2º grado llegamos a que x = o ⇒ y = -1 ó x = 2 ⇒ y = 3

¿ y cómo puede ser que tenga dos soluciones? Veamos sus gráficas para entenderlo !



Ejercicio15: Resuelve el sistema:

SUSTITUCIÓN

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$3x - 4y = 0 \longrightarrow x = (4y/3)$

$(4y/3)^2 + y^2 = 100 \longrightarrow \frac{16y^2}{9} + y^2 = 100 \longrightarrow 16y^2 + 9y^2 = 900$

$25y^2 = 900$

$y^2 = 36$

$y = \pm 6$

Si y=6 , x = 8 (8,6) y si y = -6 , x = -8 (-6,-8)

Para finalizar este tema retomaremos los apuntes de "mareaverde" y haremos los siguientes ejercicios:

Pág 147

19. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (-6)x + 3y = (-9) \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x + y = 2 \\ (-5)x + y = 6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x - y = (5) \\ (3)x + y = 7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x + (-10)y = (0) \end{cases}$

distinto de -2

Su solución sea x = −1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x + (2)y = -1 \\ (-2)x + 3y = 5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (4)x + 6y = (-4) \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$

Pág 148 $\Rightarrow$ 20, 21,22 y 23

20. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.

$\begin{cases} -4x + y = -5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

21. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.

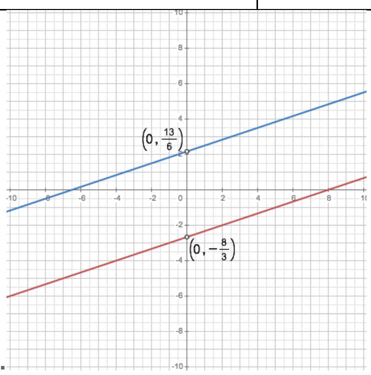
$\begin{cases} -4x + y = -7 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

22. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.

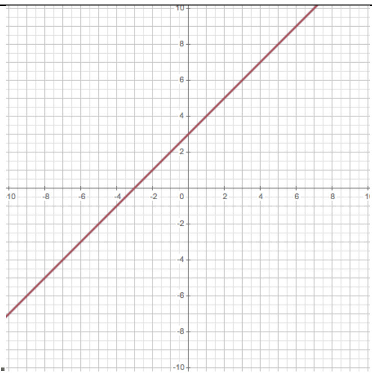
$\begin{cases} -4x + 3y = -5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + y = 0 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} y = -3x - 5 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

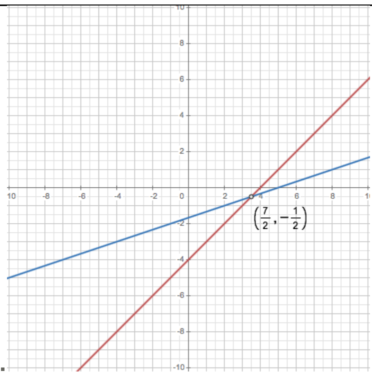
23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

$\begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$	$\frac{6y-13}{2} = 3y + 8 \rightarrow 6y-13=6y+16 \rightarrow 0y = 29$ Sistema incompatible 0 sol. (paralelas)
$\begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases}$	$y - 3 = \frac{4y-12}{4} \rightarrow 4y - 12 = 4y - 12 \rightarrow 0 = 0$ S.C.I. Sistema compatible ind. ∞ sol. (coincidentes)
$\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$	$y + 4 = 3y + 5 \rightarrow -2y = 1 \rightarrow y = \frac{-1}{2} \rightarrow x = \frac{7}{2}$ Sistema compatible det. 1 sol. (secantes)



a.


b.



c.

24. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

x = nº de bicicletas *y = nº de triciclos*

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ 2x + 3y = 133 \end{cases}$$

$x + y = 51 \rightarrow x = 51 - y$

$2x + 3y = 133 \rightarrow 2\cdot(51-y) + 3y = 133 \rightarrow 102 - 2y + 3y = 133 \rightarrow y = 31$ *triciclos*

$x = 20$ *bicicletas*

25. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

x = edad de la persona $15x = x^2 - 100 \rightarrow x^2 - 15x - 100 = 0$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4\cdot 1\cdot(-100)}}{2\cdot 1} = \frac{15 \pm 25}{2} = \begin{cases} x_1 = 20 \text{ años} \\ x_2 = -5 \text{ años (imposible)} \end{cases}$$

29. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

x sacos lleva asno *y sacos lleva mulo*

$$\begin{cases} y + 1 = 2\cdot(x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{cases}$$

$y + 1 = 2\cdot(x - 1) \rightarrow y = 2x - 3$

$y - 1 = x + 1 \rightarrow y = x + 2$ $\quad 2x - 3 = x + 2 \rightarrow x = 5$ *sacos lleva asno*

$y = 7$ *sacos lleva mulo*

33. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

x primer número *y segundo número*

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ x^2 + y^2 = 580 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 580 \rightarrow (y + 2)^2 + y^2 = 580 \rightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 = 580$

$$2y^2 + 4y - 576 = 0 \rightarrow y^2 + 2y - 288 = 0 \rightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-288)}}{2\cdot 1} = \begin{cases} y = 16,\ x = 18 \\ y = -18 \text{ (no natural)} \end{cases}$$

Los número que buscamos son 16 y 18

34. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?

x primer número *y segundo número*

$$\begin{cases} x + y = 5 \longrightarrow y = 5 - x \\ x \cdot y = -84 \longrightarrow x\cdot(5 - x) = -84 \longrightarrow x^2 - 5x - 84 = 0 \longrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot(-84)}}{2\cdot 1} = \end{cases}$$

x= -7, y=12

x = 12, y=-7

Los números son -7 y 12

(Este ejercicio se podría haber resuelto utilizando la fórmula $x^2 - Sx + P = 0$)

35. María quiere formar bandejas de un kilo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

x = peso de mazapán por bandeja, *y = peso de polvorón por bandeja*

$$\begin{cases} x + y = 1 \longrightarrow -5x - \cancel{5y} = -5 \\ 7x + 5y = 6 \longrightarrow 7x + \cancel{5y} = 6 \end{cases}$$

$$2x \quad = 1 \longrightarrow x = ½ \text{ kg de mazapán por bandeja}$$

y = ½ kg de polvorón por bandeja

Para formar 25 bandejas necesitará 12´5 kg de mazapanes y 12´5 kg de polvorones