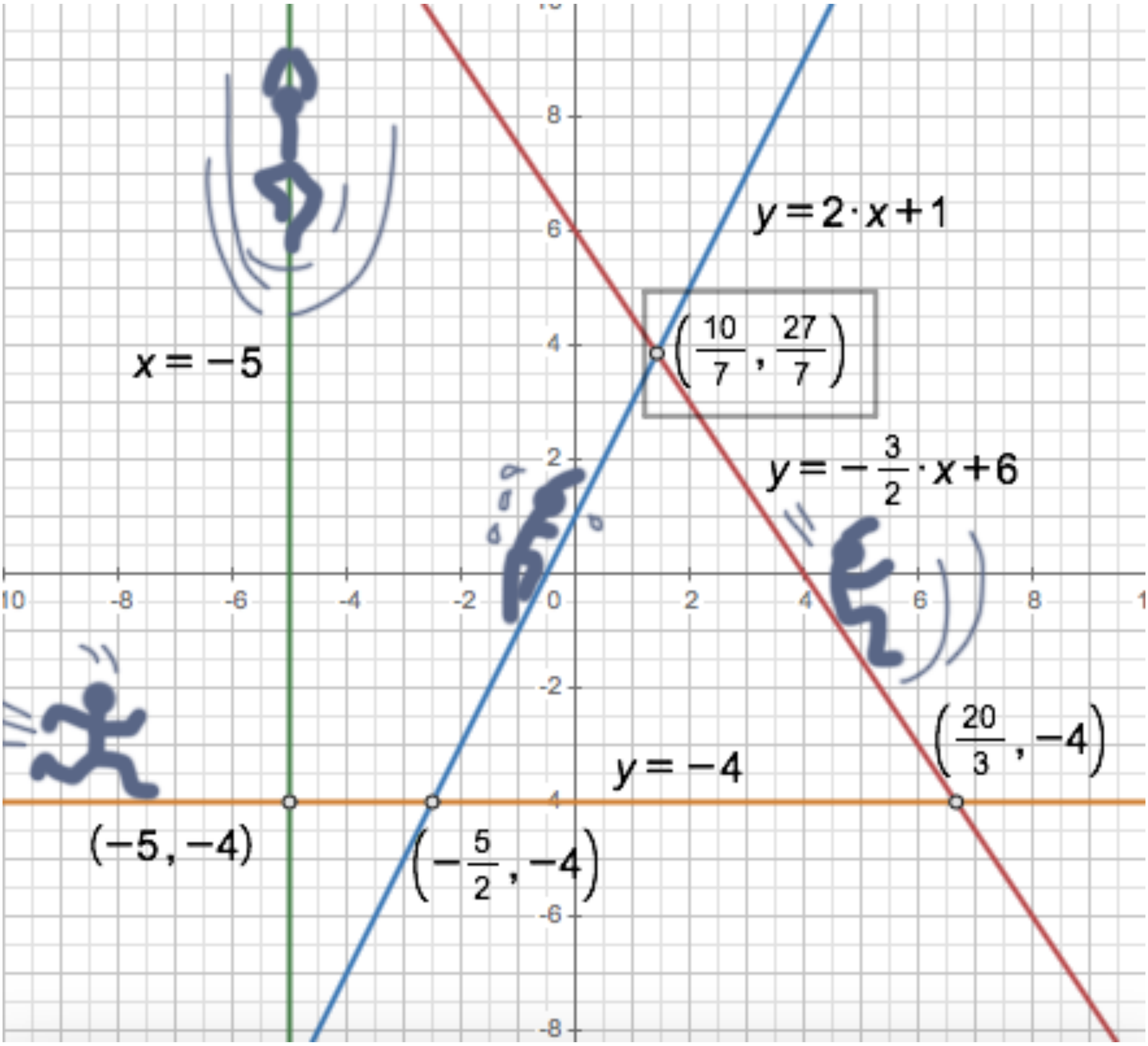
SISTEMAS DE ECUACIONES



MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 3ºESO

Ramiro Armesto Fernández

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a centrarnos fundamentalmente en los **S**istemas de **E**cuaciones **L**ineales (**S.E.L.**) con dos incógnitas aunque debemos ser conscientes de que hay sistemas formados por ecuaciones de todo tipo, no solo lineales y también con más de dos incógnitas. Al final del tema veremos algunos casos sencillos de estos otros sistemas para ampliar un poco el tema y ver las diferencias más importantes.

NOTA IMPORTANTE:

En este documento hay enlaces a 3 videos de UNICOOS para lo que es indispensable conexión a internet. Es probable además que para visualizar los 3 videos se os solicite que os registréis. Yo os recomiendo que lo hagáis ya que además de ser una página segura, una vez registrados podréis hacer consultas y acceder a una gran cantidad de material educativo de gran calidad.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES (S.E.L.) LINEALES CON 2 INCÓNITAS

Antes de empezar a trabajar con sistemas de ecuaciones lineales tenemos que tener claro qué es una ecuación lineal. En nuestro caso con 2 incógnitas.

DEF: Se llama ecuación lineal con dos incógnitas a toda ecuación de la forma:

$a \cdot x + b \cdot y = c$, donde a, b y c son números reales y las incógnitas son x e y

Ejem. $2x + 3y = 7$, $-5x + 10y = -2$, $0{,}5x + \pi y = \frac{1}{2}$ … Como veis **a** y **b** pueden ser números reales de cualquier tipo pero en este curso trabajaremos casi siempre con enteros o racionales.

Cuando empezamos el tema de ecuaciones decíamos que eran igualdades entre expresiones algebraicas que solo eran ciertas para determinados valores de sus incógnitas. Esos valores eran sus soluciones. Y ahora que tenemos dos incógnitas ¿qué ocurre?

DEF: Se llama **solución particular** de una ecuación lineal con dos incógnitas a **cada uno de los pares ordenados de valores (x_0,y_0) que hacen cierta la ecuación**. Par ordenado se refiere a que el primer valor siempre se sustituye en la x y el segundo en la y, en ese orden !

Ejem. Dada la ecuación lineal **$2x + y = 10$** , los siguientes pares ordenados serán solución:

(-2 , 14) ya que $2\cdot(-2) + 14 = 10$

(1 , 8) ya que $2\cdot 1 + 8 = 10$

(0 , 10) ya que $2\cdot 0 + 10 = 10$ …

¿ Cuántas soluciones particulares crees que podríamos encontrar?

¿Infinitos? Efectivamente! Para cada valor que des a la x obtendrás un valor de la y. Hay ∞ **!!**

Ejercicio1: Completa los siguientes pares para que sean soluciones de la ec. lineal $2x - 3y = 10$

(-2, __)   (0 , __)   (__ , 2)   (5 , __)   (__ , -4)   (1/2 , __)   (__ , 4/3)

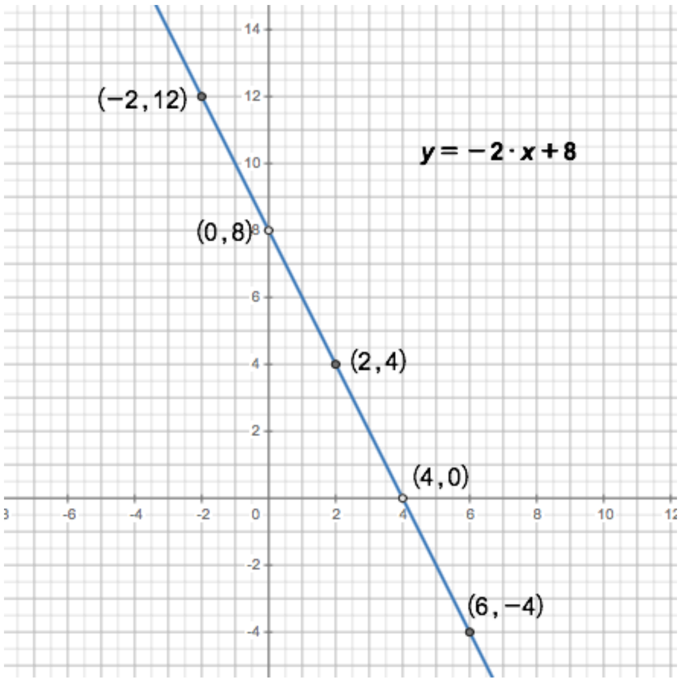
Espacio para las operaciones:

DEF: Se llama **solución** de una ec. lineal al conjunto formado por las ∞ soluciones particulares

2a. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN LINEAL CON 2 INCÓGNITAS

> La representación gráfica de toda ecuación lineal con 2 incógnitas es una **recta**

Cada solución particular **(x_0,y_0)** de una ec. lineal tiene dos componentes, y por tanto se pueden representar como puntos sobre el plano cartesiano. Tomaremos x_0 sobre el **eje X o eje de abscisas** y el valor y_0 sobre el **eje Y o eje de ordenadas.**



Ejemplo:

Si hacemos una tabla de valores para representarla, suele ser muy común despejar la **y** para dar valores a la **x**. Siempre hemos de tomar un mínimo de 3 valores por si nos equivocásemos en alguna cuenta (*en ese caso los puntos no saldrían alineados y nos daríamos cuenta del error !)*

Siempre se recomienda tomar:

* *alguna x negativa*

* *x=0*

**alguna x positiva*

y = -2·x + 8	
-2	12
0	8
2	4
4	0
6	-4

Al representar unas cuantas soluciones particulares de una ecuación lineal observaremos que siempre están alineadas por lo que se deduce que para representar todas las soluciones particulares, es decir, la solución de la ecuación lineal, bastará con marcar algunas soluciones particulares y trazar la recta que pasa por ellos.

Esta recta está formada por infinitos puntos. Cada uno de ellos corresponde a una sol. particular.

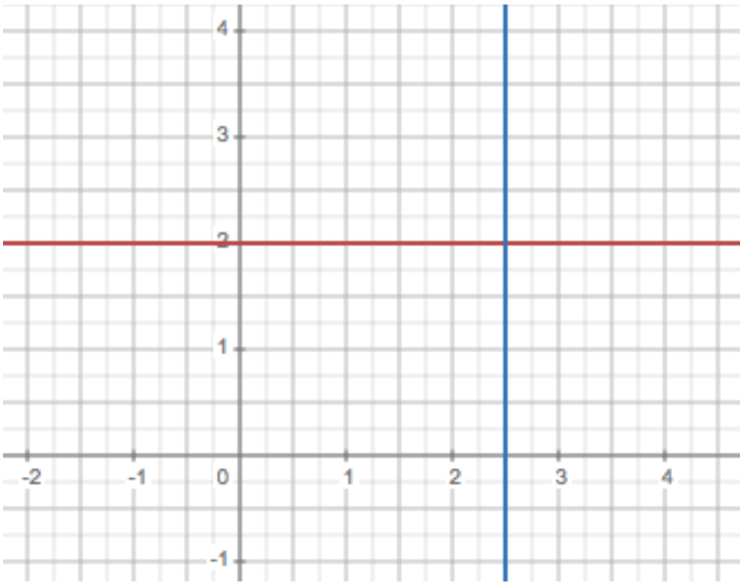
Y … ¿Qué ocurre si a = 0 o b = 0?

En estos casos las rectas que obtenemos son muy especiales, van a ser rectas "horizontales" si a = 0 o rectas "verticales" en el caso de que b = 0

Veámoslos con un par de ejemplos.

Ejem1: $0x + 3y = 6 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$ (*todos los puntos de la recta tienen la y = 2)*

Ejem2: $2x + 0y = 5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 5/2$ (*todos los puntos de la recta tienen la x = 5/2)*

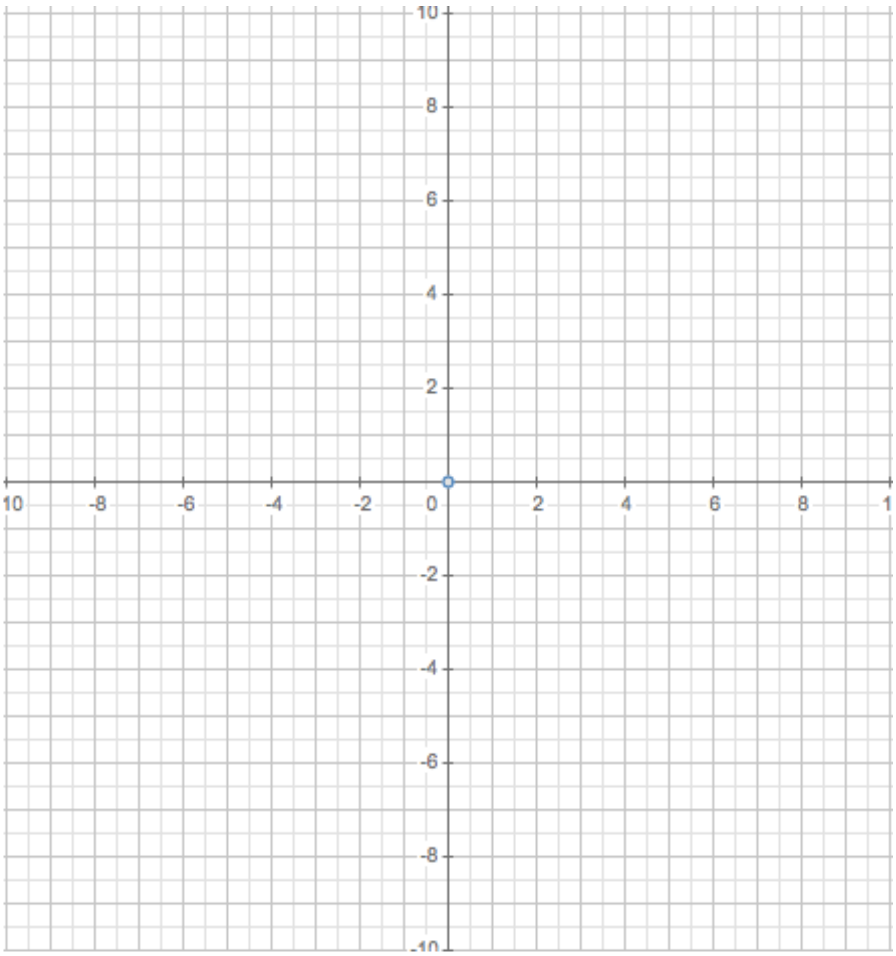


Ejercicio2: Representa las siguientes ecuaciones lineales:

a) $-2x + y = 1$ b) $-6x - 2y = 4$

X	Y

X	Y



d) $2x = -2$ e) $5y = 15$

X	Y

X	Y

REPRESENTACIÓN GRÁFICA (2ª PARTE) PENDIENTE Y LA ORDENADA EN EL ORIGEN

Una forma muy fácil y rápida para representar una recta es mediante la **pendiente** y la **ordenada en el origen.** Veamos en que consiste.

En todas las rectas excepto en las verticales, la ecuación contiene la variable y. Si dejamos esta variable aislada en un miembro de la ecuación obtendremos una ecuación tipo:

y = m·x + n donde ***m = pendiente*** y ***n = ordenada en el origen***

n = ordenada en el origen: Es el valor que toma la y cuando x = 0. La recta pasa por (0,n)

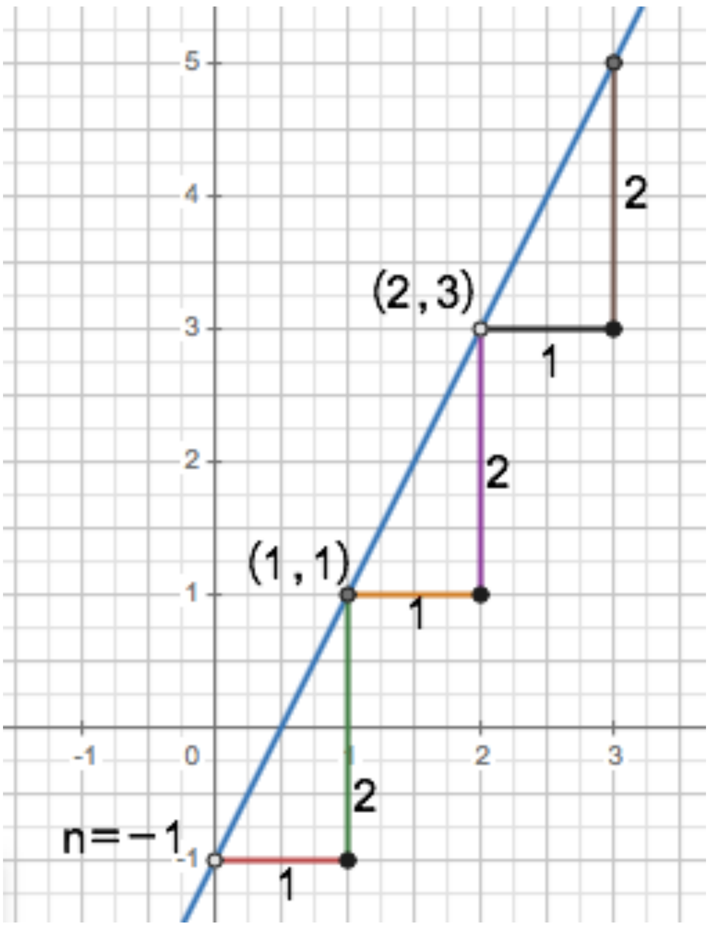
m = pendiente: Es la inclinación de la recta respecto al eje X
Es lo que la recta sube o baja a cada paso

Ejemplo:

Dada la ecuación 2x – y = 1 despejando la y obtenemos y = 2x – 1 de donde deducimos que la recta tiene pendiente m = 2 y ordenada en el origen n = -1

1º Situamos sobre el eje Y el valor n = -1 con lo que ya tenemos unl punto P(0,-1) de la recta.
2º Desde ese punto P avanzamos hacia la derecha una unidad y subimos m=2 unidades. En este caso llegamos al punto (1,1), si volvemos a avanzar un paso y subir m=2 llegamos a (2,3)

La gráfica se puede dibujar fácilmente ya:



ESTOS VIDEOS TE PUEDEN AYUDAR

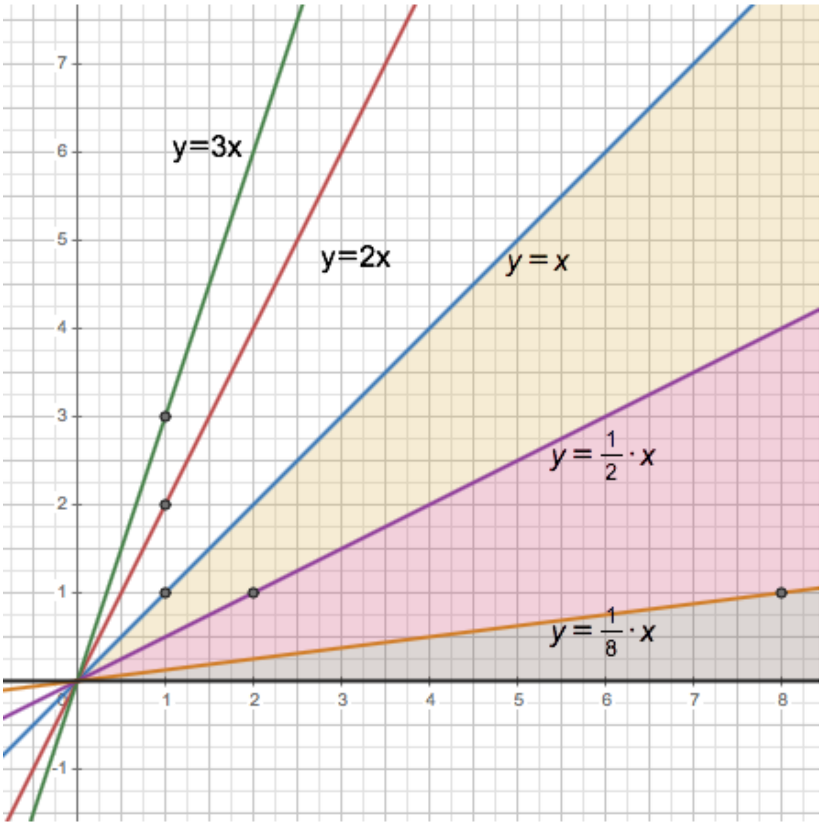
Video 1: https://youtu.be/Pw6_8GUKHfc

Video 2: https://youtu.be/MEfzEuSSoe8

NOTA: En el caso de las rectas “horizontales” tienen pendiente m = 0 y por tanto la expresión y = mx + n queda de la forma y = 0·x + n => y = n

En el caso de las rectas “verticales” no tiene sentido hablar de pendiente. No tienen.

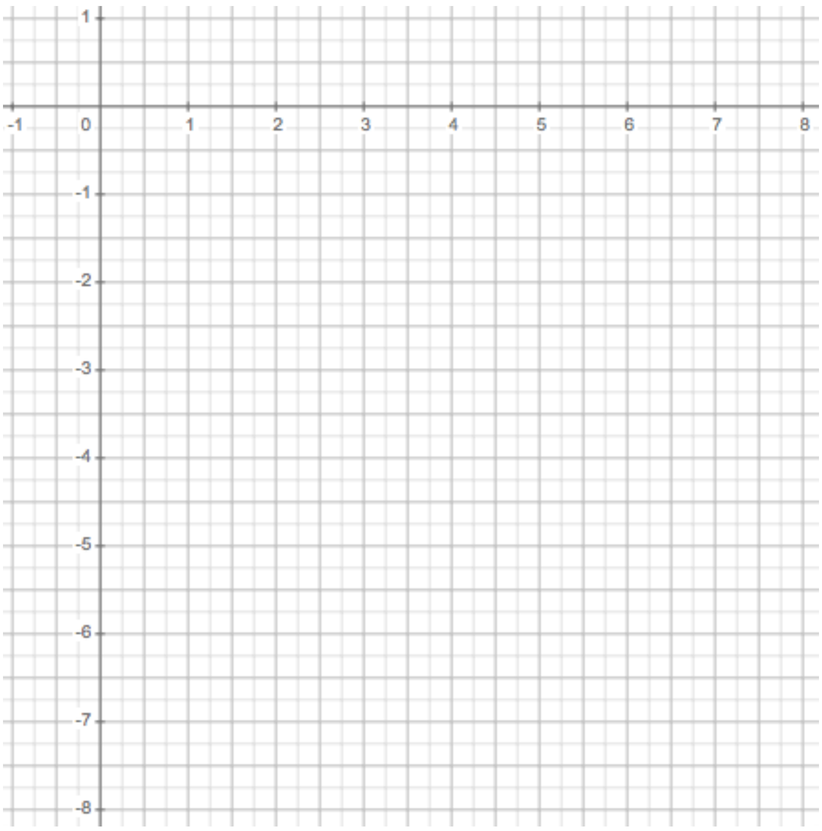
Veamos ahora un gráfico que muestra las pendientes POSITIVAS de algunas rectas:



Es curioso ver que todas las rectas con pendiente positiva que pasan por el (0,0) y están en la zona coloreada tienen pendiente comprendida entre 0 y 1.

La recta y = x tiene pendiente m=1

Las rectas que están en la zona sin colorear tienen por tanto pendientes que van desde 1 al ∞



Ejercicio3: Dibuja un gráfico análogo a este para las rectas que pasan por (0,0) con pendiente m negativa.

Ejercicio4: Representa las siguientes rectas utilizando la pendiente y la ordenada en el origen.

a) $-3x + y = -5$

b) $4x - y = 7$

c) $x + y = 2$

d) $-x + 2y = 4$

e) $3x + y = -1$

f) $-2x + 5y = -5$

*Nota: En casos en los que la pendiente sale fraccionaria conviene avanzar mas de una unidad desde el eje Y para buscar el siguiente punto. Por ejemplo, si la pendiente es **2/5**, al avanzar una unidad subo 2/5 pero si avanzo **5** unidades (denominador) subo **2** unidades (numerador). Es un simple ejercicio de tales.*

2b. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones lineales está compuesto por dos o más ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

Resolver un sistema consiste en encontrar las soluciones que tienen en común todas sus ecuaciones

En este caso … si buscamos entre sus soluciones para encontrar las comunes:

X	Y
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

X	Y
-1	2
0	7/3
1	8/3
2	3

- Pero obviamente ir probando soluciones hasta encontrar una común no parece un método muy aconsejable, por lo que vamos a ver a continuación los métodos más comunes para resolver sistemas.

- Método gráfico
- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método de reducción

MÉTODO GRÁFICO

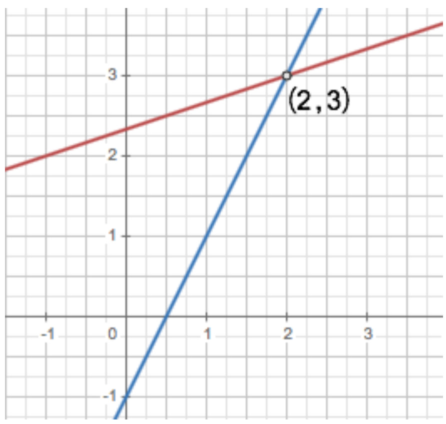
Este método nos servirá para entender conceptos y apartados posteriores de la teoría pero no resulta muy eficiente ya que si las soluciones no son enteras es difícil saber con exactitud la solución que resulta.

Este método consiste en representar las rectas del sistema y buscar los puntos en los que las rectas coinciden. Esos puntos corresponderán a soluciones comunes y serán por tanto la solución del sistema.

Ejem. Resuelve por el método gráfico el sistema:

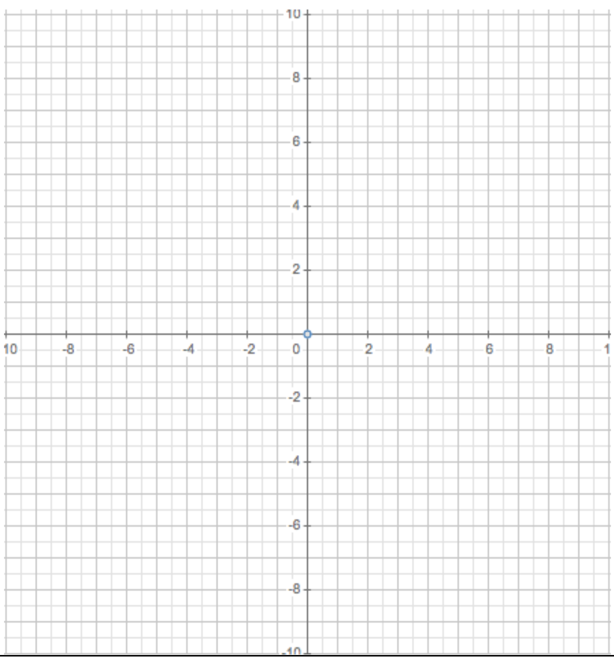
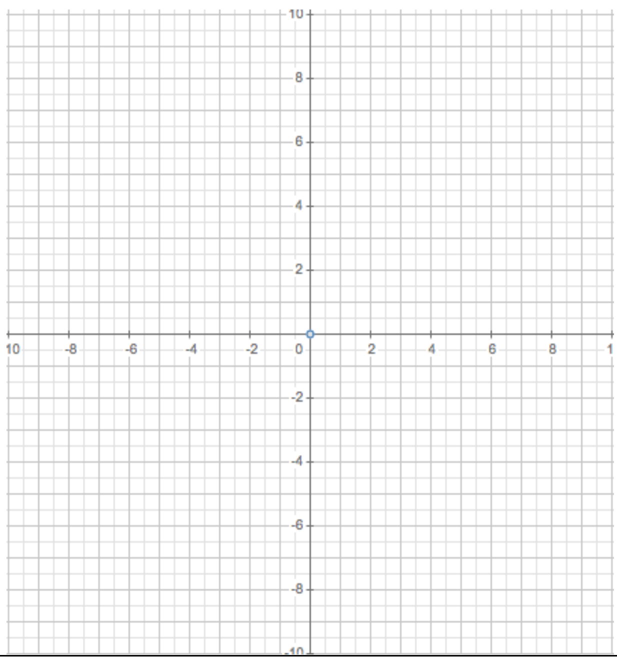
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

Aprovechando que ya hemos hecho las tablas de valores en el ejemplo anterior, podemos dibujar ambas rectas y ver que efectivamente el punto en que coinciden es el punto (2,3)

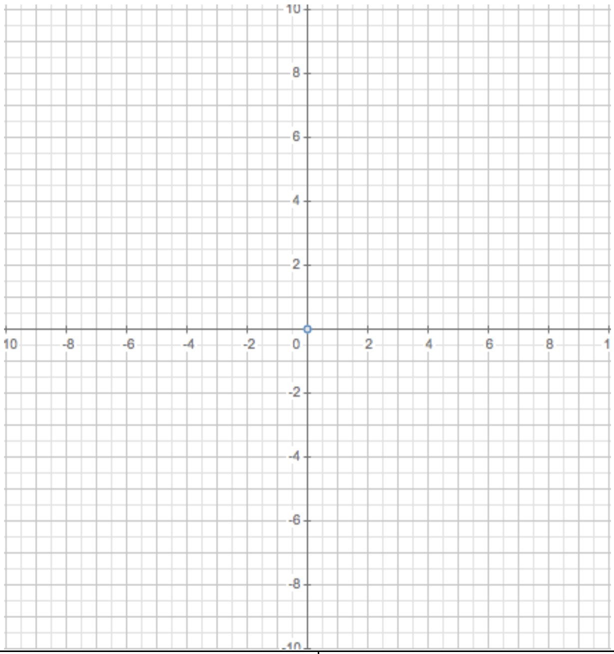


Ejercicio5: Resuelve mediante el método gráfico los siguientes sistemas:

$\begin{cases} -3x + y = -5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ (A)	$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$ (B)	$\begin{cases} -2x + 5y = -5 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$ (C)
$\begin{cases} y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ (D)	$\begin{cases} x + y = 8 \\ 4x = 12 \end{cases}$ (E)	$\begin{cases} x - y = 0 \\ 7x + y = 7 \end{cases}$ (F)

(A) 	(B) 
Tabla de valores(A)	*Tabla de valores(B)*

(C)



(D)

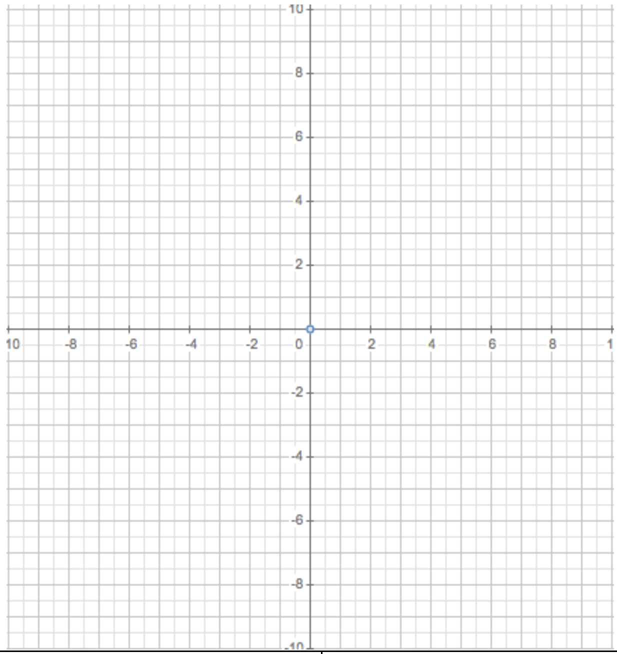


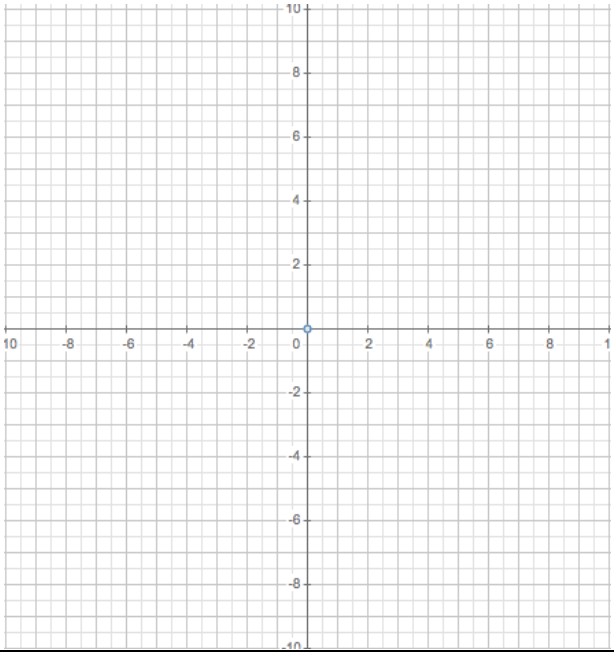
Tabla de valores(C)

Tabla de valores(E)

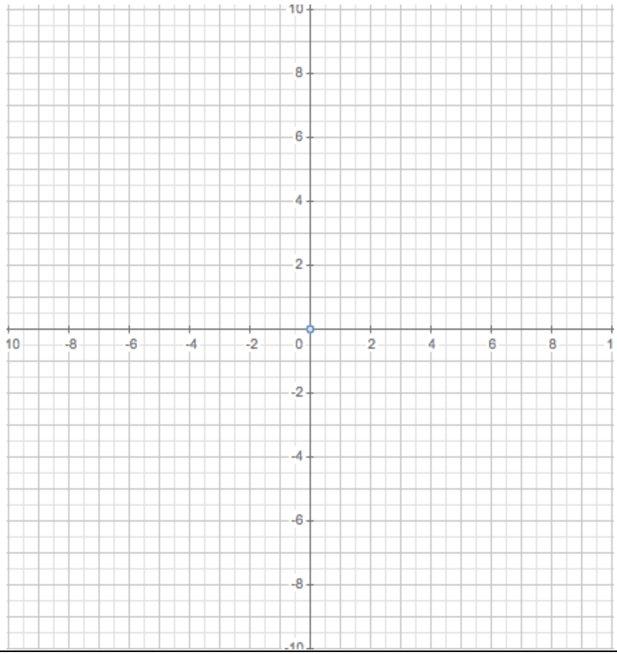
Tabla de valores(D)

Tabla de valores(F)

(E)



(F)



SISTEMAS DE ECUACIONES EQUIVALENTES

Antes de continuar con el resto de métodos de resolución de sistemas tenemos que definir lo que son **sistemas de ecuaciones equivalentes,** ya que en este curso será habitual resolver sistemas con coeficientes decimales o fraccionarios que dificultarían los cálculos.

DEF: **Sistemas de ecuaciones equivalentes** son aquellos que tienen exactamente las mismas soluciones.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x - 3y = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 3y - 7 \end{cases}$$

Son sistemas equivalentes ya que tienen la misma soluciones (2,3).

Ejercicio6: Comprueba que efectivamente son equivalentes.

PROPOSICIÓN: Si a alguna de las ecuaciones de un sistema se le aplica una transformación de equivalencia, el nuevo sistema es equivalente al anterior.

Por este motivo cuando nos encontremos con números que dificulten los cálculos (decimales, fracciones, …) podremos utilizar estas transformaciones ya conocidas y simplificarlo.

Ejercicio7: Transforma el siguiente SEL hasta obtener uno con coeficientes enteros. Resuélvelo por el método gráfico y comprueba que la solución obtenida es efectivamente solución del SEL de partida.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = 2 + y/2 \\ 0{'}8x = 2 - 0{'}4y \end{cases}$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

En el siguiente https://www.youtube.com/watch?v=h9q5rLcW73Y podréis encontrar un vídeo con una explicación sobre este método. Después de verlo completa las siguientes cuestiones y resuelve el ejercicio.

Este método consiste en …

Es el método más indicado cuando …

Ejercicio8: Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución

$$\begin{cases} x + 5y = 34 \\ 2x - y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + y = 16 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 2y = 2 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ y = 2x \end{cases}$$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

En el siguiente https://www.unicoos.com/video/matematicas/3-eso/sistemas-de-ecuaciones-2/sistemas-de-ecuaciones-2/sistema-de-ecuaciones-metodo-de-igualacion podréis encontrar un vídeo con una explicación sobre este método. Después de verlo completa las siguientes cuestiones y resuelve el ejercicio.

Este método consiste en …

Es el método más indicado cuando …

Ejercicio9: Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación

$$\begin{cases} x = -2 + 2y \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5x + 7 \\ 2x + 10y = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{\acute{}}2x + y = 3{\acute{}}6 \\ 4x - y/3 = 11 \end{cases}$$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

En el siguiente https://www.youtube.com/watch?v=hIYhtq8e8jA podréis encontrar un vídeo con una explicación sobre este método. Después de verlo completa las siguientes cuestiones y resuelve el ejercicio.

Este método consiste en …

Es el método más indicado cuando …

Ejercicio10: Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción

$$\begin{cases} -2x + y = 7 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 3x + 5y = -10 \end{cases}$$

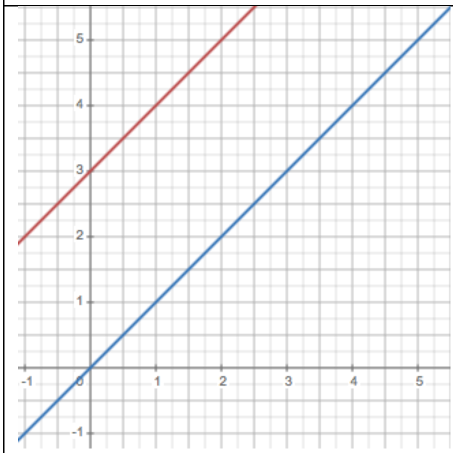
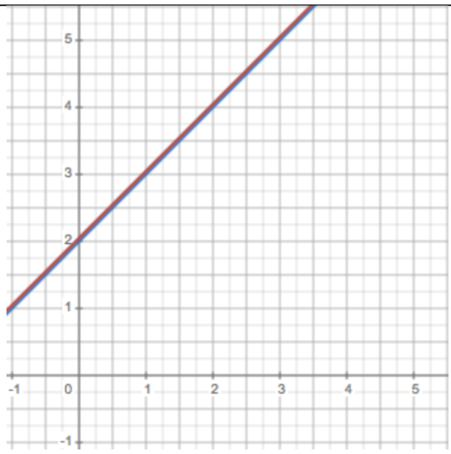
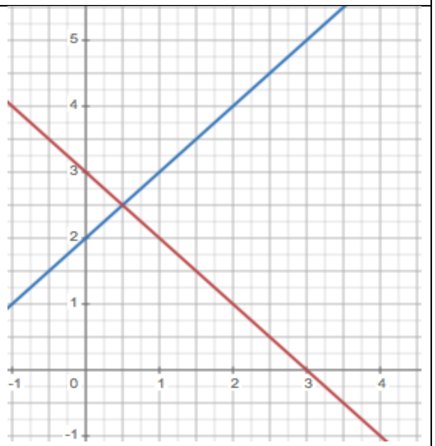
$$\begin{cases} 0´1x + 0´5y = -1 \\ 10x + y = 96 \end{cases}$$

2c. Nº DE SOLUCIONES DE UN S.E.L. Y POSICIÓN RELATIVA DE SUS RECTAS

Cuando me piden que estudie el número de soluciones de un S.E.L. con dos incógnitas o me piden que estudie la posición relativa de sus rectas, <u>me están pidiendo lo mismo</u>.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = mx + n \\ y = m'x + n' \end{cases}$$

Podemos estudiarlo de ambas formas

Al dibujar 2 rectas sobre un plano solo hay tres posibilidades		
		
INCOMPATIBLE **0 SOLUCIONES** RECTAS PARALELAS m = m´ y n ≠ n´ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	**COMPATIBLE INDETERMINADO** **∞ SOLUCIONES** RECTAS COINCIDENTES m = m´ y n = n´ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	**COMPATIBLE DETERMINADO** **1 ÚNICA SOLUCIÓN** RECTAS SECANTES m ≠ m´ $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

Antes de resolver un sistema, estudiar el número de soluciones que tiene nos puede ahorrar muchas cuentas, ya que si no tiene solución, nada hay que resolver y si son coincidentes cualquier punto de ambas rectas me sirve como solución. Sólo tendrá interés por tanto resolver los SISTEMAS COMPATIBLES DETERMINADOS (1 única solución).

Si al resolver un sistema llego a algo imposible tipo 5 = 0, el sistema es INCOMPATIBLE

Si al resolver un sistema llego a una identidad tipo 0 = 0, el sistema es COMP. INDETERMINADO

Ejercicio11: Estudia el número de soluciones de los siguientes sistemas y determina la posición relativa de sus rectas.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 7 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

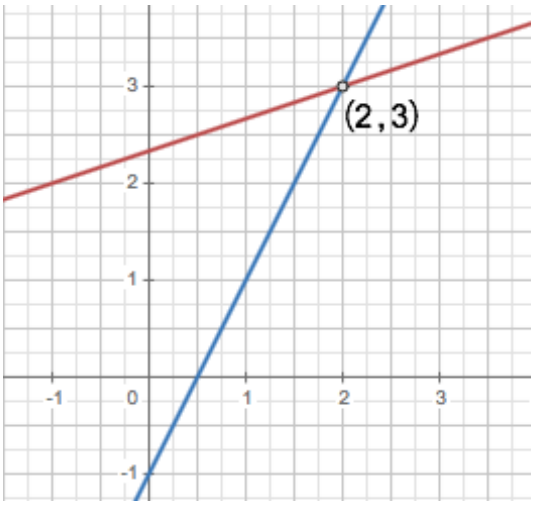
$$\begin{cases} 2x + 4y = -6 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 0{'}1y = -1 \\ 10x - y = 3 \end{cases}$$

Gracias a la pendiente y la ordenada en el origen dibujamos la grafica de una recta con mucha facilidad, pero si entendemos bien este concepto también podremos utilizar la pendiente y la ordenada en el origen para averiguar la ecuación de una recta a partir de su gráfica.

Ejem. Nos encontramos con estas dos rectas. ¿Cómo podríamos averiguar sus ecuaciones?

Utilizaremos m y n. La ecuación explícita de la recta es de la forma **y = mx + n** y por tanto :

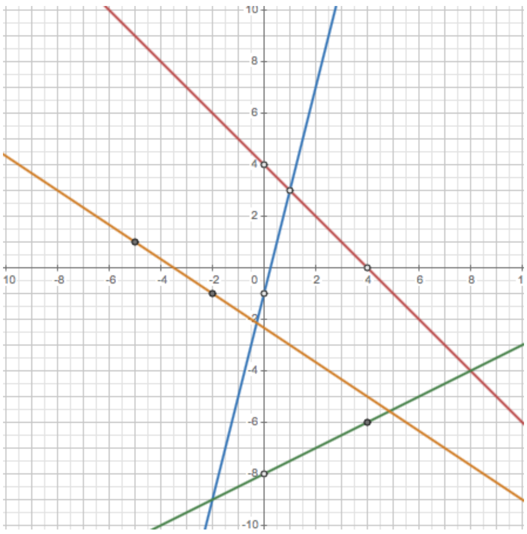


Recta azul. Pasa por (0 , **-1**) luego **n = -1** y su pendiente es **m = 2** por lo que su ecuación será **y = 2x -1**

Recta roja. Pasa por (2 , 3) y en este caso la n no se puede saber fácilmente pero la pendiente si, ya que pasa por (-1 , 2) y por (2 , 3) “avanza 3 unidades y sube 1 unidad” m = 1/3

Si sustituimos estos datos en la ecuación y=m**x** + n obtenemos 3=(1/3)·**2** + n . Despejando la n obtendremos n = 7/3 por lo que la ecuación resulta y=(1/3)x+7/3 que será equivalente a la ecuación 3y= x + 7 o -x +3y = 7

Ejercicio12: Resuelve como en el ejemplo y averigua las ecuaciones e las siguiente rectas:



Ejercicio13: Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más conveniente. Al final del ejercicio tendrás que haber utilizado sustitución, igualación y reducción.

$$\begin{cases} (1/2)x + y = 4 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y = 33 \\ x + 0\text{’}5y = 4\text{´}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2/3)x + y = 9 \\ x - 1\text{´}25y = -0\text{´}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 7y = 13 \\ -5x + 2y = 14 \end{cases}$$

3. OTROS SISTEMAS DE ECUACIONES

No todos los sistemas de ecuaciones son lineales de dos ecuaciones y con dos incógnitas. Los hay que contienen ecuaciones no lineales (cuadrática, con x en el denominador, con producto de incógnitas …), los hay con tantas incógnitas y/o ecuaciones como quieras.

a. S.E.L. CON MÁS DE DOS ECUACIONES / INCÓGNITAS

En este curso vamos a ve simplemente con un par de ejemplos algún sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y un método sencillo para resolverlos. Se trata de hacer reducción en dos etapas.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{sumo } 1^{a} \text{ y } 2^{a}} \\ \xrightarrow{\text{sumo } 2\cdot 2^{a} + 3^{a}} \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 3x + 4z = 15 \\ 7x + 2z = 13 \end{array}\right\}$$

Este nuevo sistema ya es resoluble por los métodos conocidos y resulta que

$x = 1$ y $z = 3$. Si sustituimos estos valores en el primer sistema llegaremos a

que $y = 2$. **Solución x = 1, y = 2 , z = 3** (puedes comprobarlo)

Ejercicio14: Resuelve el sistema.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 4y + 3z = 10 \\ 3x + 2y - 4z = -6 \end{array}\right.$$

a. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES (SENL)

En cuanto una de las ecuaciones del sistema no se pueda escribir como ecuación lineal, es decir de la forma ax + by = c decimos que el sistema no es lineal. La principal diferencia es que al no tratarse de ecuaciones cuyas gráficas sean rectas el número de soluciones puede ser distinto de 0, 1 o ∞.

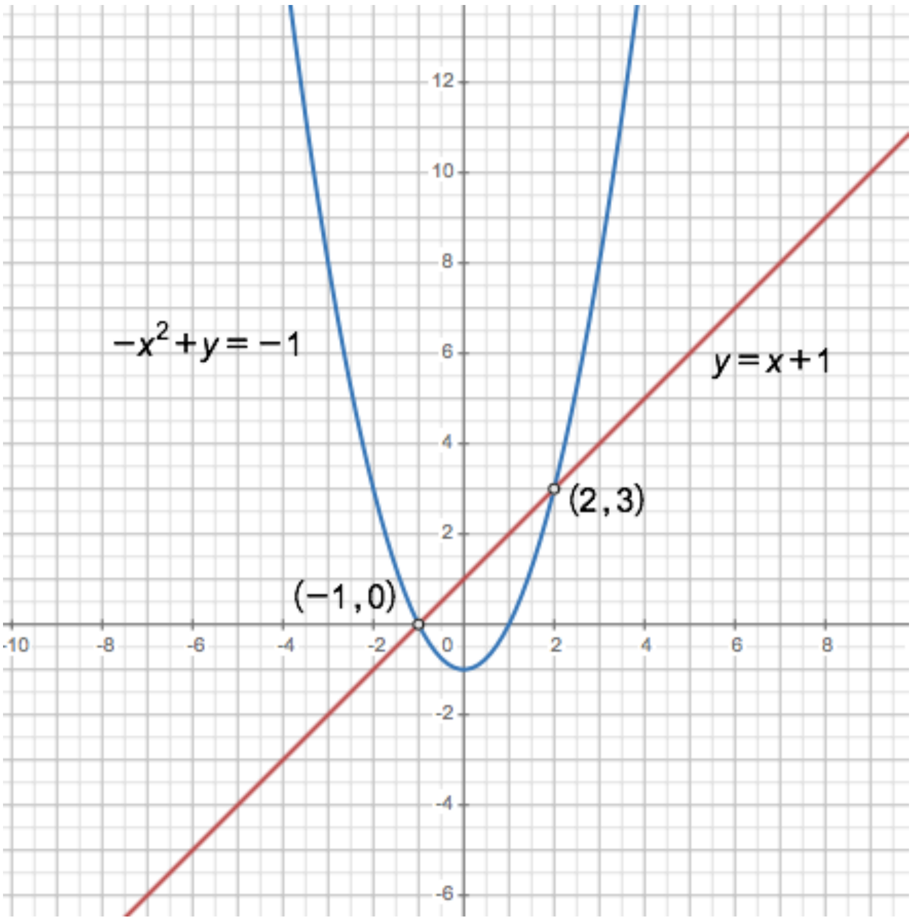
Los métodos que vamos a utilizar son los ya explicados y en cada caso habrá que decidir cual es el mejor pero será habitual que si una de las ecuaciones es lineal despejemos una incógnita en ella y hagamos sustitución.

Ejem

$$\begin{cases} -x^2 + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Tanto si lo resolvemos por igualación como si lo hacemos por sustitución o reducción llegaremos igualmente a que $x^2 - 1 = x + 1$ y al resolver la ecuación de 2º grado llegamos a que $x = o \Rightarrow y = -1$ ó $x = 2 \Rightarrow y = 3$

¿ y cómo puede ser que tenga dos soluciones? Veamos sus gráficas para entenderlo !



Ejercicio15: Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

Para finalizar este tema retomaremos los apuntes de “mareaverde” y haremos los siguines ejercicios:

Pág 147 $\Rightarrow$ 19

Pág 148 $\Rightarrow$ 20, 21,22 y 23

Pág 149 $\Rightarrow$ 24, 25, 29, 33, 34 y 35