

El famoso problema del pozo y las carreteras

Tres poblaciones cercanas quieren construir un pozo compartido. Una vez seleccionado el sistema de referencia (base y origen de coordenadas), las poblaciones quedan situadas sobre los puntos $A(0,6)$, $B(10,0)$ y $C(8,8)$.

NOTA: Vamos a suponer que piquemos donde piquemos vamos a encontrar agua, ya que en caso contrario este debería ser el principal problema a tratar.

- ¿En qué lugar P se deberíamos cavar el pozo?
- ¿A qué distancia estaría el pozo de cada población?
- ¿Qué expresión algebraica tendría una carretera circular que pasase por los tres pueblos?
- Si conectamos C con el pozo mediante una carretera recta, ¿en qué lugares se cruzará esta carretera con la carretera circular?

Es imprescindible la representación gráfica de todos los lugares geométricos solicitados.

a) El pozo deberá estar a igual distancia de A , B y C para contentar a todos. Por ello debe estar situado en el **circuncentro del triángulo ABC** (es decir en la intersección de sus mediatrices)

Si $P(x,y)$ está en la mediatriz AB
 $d(A,P)=d(B,P) \Rightarrow 5x-3y=16$

Si $P(x,y)$ está en la mediatriz BC
 $d(B,P)=d(C,P) \Rightarrow x-4y=-7$

El pozo resulta ser por tanto la solución del sistema formado por estas dos rectas.

Pozo= $(5,3)$

b) Al ser la misma distancia del pozo a los tres pueblos solo hay que calcular $d(P,A)=d(P,B)=d(P,C)$

$$d(P,A) = \sqrt{(0-5)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{34}$$

Aproximadamente 5,83 u.l.

c) La distancia calculada en el ejemplo anterior coincide con el radio de la circunferencia y por tanto la ecuación de esta será:

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 34$$

d) Al coincidir la carretera que pasa por P y C con una mediatriz ya tenemos que uno de los puntos de corte entre las carreteras es $C=(8,8)$

El otro punto de intersección Q , lo podemos obtener resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la circunferencia(opc1) o utilizando que el pozo es el punto medio entre C y Q (opc2) que resultará mucho más sencillo en este caso.

$$\text{Si } Q=(x,y) \text{ entonces } \left(\frac{x+8}{2}, \frac{y+8}{2}\right) = (5,3) \Rightarrow x=2, y=-2$$

